高考数学最新真题专题解析—导数及其应用（新高考卷）

【母题来源】2022 年新高考 I 卷

【母题题文】已知函数□(□) = □^{3} □ □ + 1，则(　　)

A. □(□)有两个极值点

B. □(□)有三个零点

C. 点(0, 1)是曲线□ = □(□)的对称中心

D. 直线□ = 2□是曲线□ = □(□)的切线

【答案】□□

【分析】

本题考查利用导数研究函数的极值与零点以及曲线上一点的切线问题，函数的对称性，考查了运算能力以及数形结合思想，属于中档题.

【解答】

解：□(□) = □^{3} □ □ + 1 □ □′(□) = 3□^{2} □ 1，令 □′(□) = 0 得：□ = $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

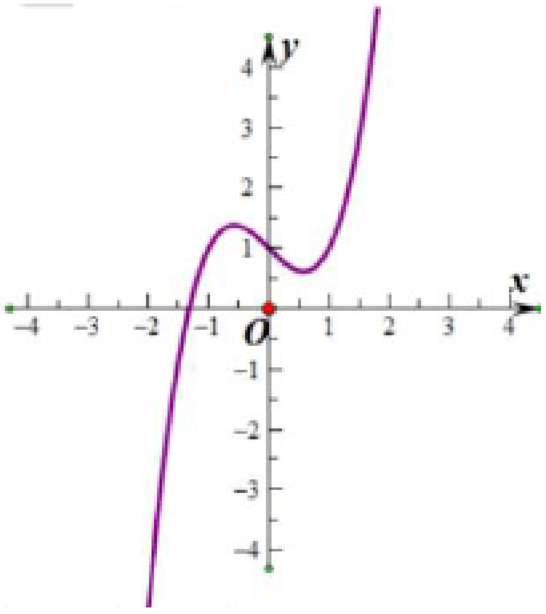
□′(□) > 0 □ □ < □$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 □ > $\frac{\sqrt{3}}{3}$；□′(□) < 0 □ □$\frac{\sqrt{3}}{3}$ < □ < $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 □(□)在 (□∞, □$\frac{\sqrt{3}}{3}$) 上单调递增，在 (□$\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$) 上单调递减，在 ($\frac{\sqrt{3}}{3}$, +∞) 上单调递增，

所以 □(□)有两个极值点（□ = □$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为极大值点，□ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为极小值点），故 A 正确；

又 □(□$\frac{\sqrt{3}}{3}$) = □$\frac{\sqrt{3}}{9}$ □ (□$\frac{\sqrt{3}}{3}$) + 1 = 1 + $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ > 0，□($\frac{\sqrt{3}}{3}$) = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ □ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ + 1 = 1 □ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ > 0，

所以 □(□)仅有 1 个零点（如图所示），故 B 错；



又 □(□□)□□³+ □+ 1 □ □(□□)□(□) 2 ，所以 □(□)关于 (0,1) 对称，

故 C 正确；

对于 □ 选项，设切点 □($□_0$,$□_0$)，在 □ 处的切线为 □□($□_0^3$□$□_0$ + 1) = (3$□_0^2$□1)(□□$□_0$)，

即 □= (3$□_0^2$□1)□□2$□_0^3$ + 1 ，

若 □= 2□ 是其切线，则 $\begin{cases} 3□_0^2 □1 = 2 \\ □2□_0^3 + 1 = 0 \end{cases}$ ，方程组无解，所以 □ 错．

【母题来源】2022 年新高考 II 卷

【母题题文】曲线 □= ln|□|经过坐标原点的两条切线方程分别为______，______．

【答案】□= $\frac{□}{□}$　　□= □$\frac{□}{□}$

【分析】

本题考查函数切线问题，设切点坐标，表示出切线方程，带入坐标原点，求出切点的横坐标，即可求出切线方程，为一般题．

【解答】

解：当 □> 0 时，点 ($□_1$,ln$□_1$)($□_1$> 0) 上的切线为 □□ln$□_1$ = $\frac{1}{□_1}$(□□$□_1$)．

若该切线经过原点，则 ln$□_1$ □1 = 0 ，解得 □= □，

此的切线方程为 □= $\frac{□}{□}$．

当 □< 0 时，点 $(□_2, \ln(-□_2))(□_2 < 0)$ 上的切线为 □□ln(□□$_2$) = $\frac{1}{□_2}$(□□□$_2$) .

若该切线经过原点，则 $\ln(-□_2)$ □1 = 0 ，解得 □= □□,

此时切线方程为 □= □$\frac{□}{□}$.

【命题意图】

考察导数的概念，考察导数的几何意义，考察导数求导法则求导公式，导数的应用，考察数学运算和逻辑推导素养，考察分类讨论思想，函数和方程思想，化归与转化的数学思想，分析问题与解决问题的能力。

【命题方向】

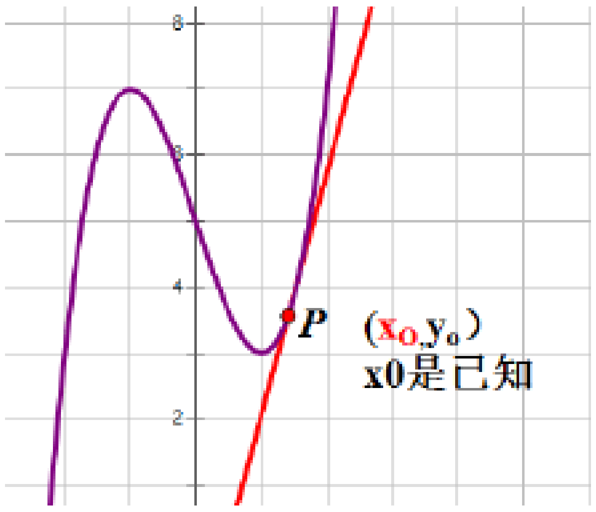
导数在高考数学中，是作为应用工具来考察的。常规考察，要考察求导公式，求导法则与导数的几何意义，涉及到求切线，导数计算，和求导法则的应用。在应用层次上，要考察导数的极值，单调性，最值等应用，需要理解导数与原函数之间的关系。深度考察，则涉及到求函数零点或者零点个数，零点范围，比大小或者证明不等式，恒成立或者存在型问题求参等等，常常和函数单调性，数列，不等式等等知识有机结合进行综合考察。

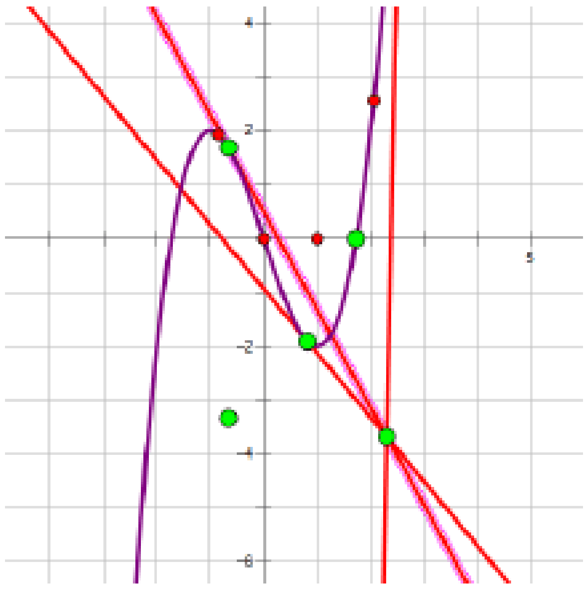
【得分要点】

一、导数求切线思维

1、设切点：$P(x_0, y_0)$
2、y_0=f（x_0）
3、y=f□(x)□ k=f□(x_0)。
4、切线方程：$y-y_0$ □k(x□x_0)
~~~~~~~~~~~~~~
5、过□a，b□，代入：$y-y_0$ □k(x□x_0)
得$b-y_0$ □k(a□x_0)□ 解出x_0

以上是“在点”与“过点”的区别，授课时可参考下图
~~~~~~~~~~~~~~





二、恒成立求参经验思维

一般地，已知函数 $y=f(x), x\in[a,b]$，$y=g(x), x\in[c,d]$

（1）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\forall x_2\in[c,d]$，总有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{max}<g(x_2)_{min}$；

（2）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{max}<g(x_2)_{max}$；

（3）若 $\exists x_1\in[a,b]$，$\forall x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{min}<g(x_2)_{min}$；

（4）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集．

真题汇总及解析

1．（2022·四川成都·高三阶段练习（文））若函数 $f(x)=x^3-3kx+1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】B

【分析】

利用函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的导函数为非负数，列不等式，解不等式即可求得 k 的取值范围.

【详解】

由题意得，

$f'(x)=3x^2-3k=3(x^2-k)\geq 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $k\leq x^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

又函数 $y=x^2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，得 $x^2>1$，

所以 $k\leq 1$，即实数 k 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

故选：B

2.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$，则 $f'(1)=$（　　）

A．$-e$　　　　B．-1　　　　C．1　　　　D．e

【答案】B

【分析】

求得函数的导数 $f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$，令 $x=1$，即可求解.

【详解】

由题意，函数 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$，可得 $f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$，

所以 $f'(1)=2f'(1)+1$，则 $f'(1)=-1$.

故选：B.

3.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=ae^x+b\ (a,b\in R)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的

切线方程为 $y=3x+2$，则 $2a+b=$（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．5

【答案】D

【分析】

求导，利用切线方程，得到方程组，求出 $a=3$，$b=-1$，求出答案.

【详解】

由 $f(x)=ae^x+b$，则 $f'(x)=ae^x$，所以 $\begin{cases} f(0)=2=a+b, \\ f'(0)=3=a, \end{cases}$

解得：$a=3$，$b=-1$，所以 $2a+b=5$

.故选：D.

4．（2022·全国·模拟预测（理））已知函数

$f(x)=C_n^0+C_n^1x+\frac{1}{3}C_n^3x^3+\frac{1}{5}C_n^5x^5+\cdots+\frac{1}{k}C_n^kx^k+\cdots+\frac{1}{n}C_n^nx^n$（$k,n$ 为正奇数），$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(1)-f(0)=$（　　）

A．2^n　　　　B．2^{n-1}

C．2^n-1　　　　D．$2^{n-1}-1$

【答案】D

【分析】

依题意求出 $f(0)$，再求出函数的导函数，根据二项式系数的特征求出 $f'(1)$，即可得解；

【详解】

解：因为 $f(x)=C_n^0+C_n^1x+\frac{1}{3}C_n^3x^3+\frac{1}{5}C_n^5x^5+\cdots+\frac{1}{k}C_n^kx^k+\cdots+\frac{1}{n}C_n^nx^n$，

所以 $f(0)=C_n^0=1$，

所以 $f(x)=C_n^1+C_n^3x^2+C_n^5x^4+\cdots+C_n^kx^{k-1}+\cdots+C_n^nx^{n-1}$，

则 $f(1)=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$，

其中 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$，

所以 $f(1)=2^{n-1}$，

所以 $f(1)-f(0)=2^{n-1}-1$；

故选：D

5．（2022·福建·莆田八中高三开学考试）已知函数 $y=a+2\ln x,\ (\frac{1}{e}\le x\le e)$ 的图象上存在点M，函数 $y=x^2-1$ 的图象上存在点N，且M，N关于x轴对称，则a的取值范围是（　　）

A．$[-1-e^2,2]$　　　　B．$\left[3-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$

C．$\left[3-\frac{1}{e^2},2\right]$　　　　D．$\left[-1-e^2,3-\frac{1}{e^2}\right]$

【答案】A

【详解】

因为函数 $y=x^2-1$ 与函数 $y=-x^2+1$ 的图象关于x轴对称，

根据已知得函数 $y=a+2\ln x,\ (\frac{1}{e}\le x\le e)$ 的图象与函数 $y=-x^2+1$ 的图象有交点，

即方程 $a+2\ln x=-x^2+1$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有解，

即 $a=-2\ln x-x^2+1$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有解.

令 $g(x)=-2\ln x-x^2+1$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，

则 $g'(x)=-\frac{2}{x}-2x=\frac{-2-2x^2}{x}=\frac{-2(1+x^2)}{x}$，

可知 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,e)$ 上单调递减，

故当 $x=1$ 时，$g(x)_{max}=g(1)=-2$，

由于 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-3-\frac{1}{e^2}$，$g(e)=1-e^2$，且 $-3-\frac{1}{e^2}>1-e^2$，

所以 $1-e^2\le a\le -2$．

故选：A．

6．（2022·全国·模拟预测（理））若函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{3}x^3$ 对任意的 $x_1>x_2>0$，不等式 $m\ge\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}$ 恒成立，则整数 m 的最小值为（　　）

A．2　　　B．1　　　C．0　　　D．-1

【答案】A

【分析】

根据所给不等式转化为 $x_1>x_2>0$ 时，$mg(x_1)-x_1f(x_1)>mg(x_2)-x_2f(x_2)$ 恒成立，构造函数 $h(x)=mg(x)-xf(x)$ 知其单调递增，利用导数恒大于等于 0 求解即可．

【详解】

因为 $g(x)=\frac{1}{3}x^3$ 单调递增，$x_1>x_2>0$，所以 $g(x_1)-g(x_2)>0$，即 $g(x_1)-g(x_2)>0$，

原不等式恒成立可化为 $mg(x_1)-mg(x_2)>x_1f(x_1)-x_2f(x_2)$ 恒成立，

即 $x_1>x_2>0$ 时，$mg(x_1)-x_1f(x_1)>mg(x_2)-x_2f(x_2)$ 恒成立，

即函数 $h(x)=mg(x)-xf(x)=\frac{m}{3}x^3-x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h'(x)=mx^2-\ln x-1\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $m\ge\frac{\ln x+1}{x^2}$，令 $k(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$，则 $k'(x)=\frac{-2\ln x-1}{x^3}$，

当 $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$ 单调递增，当 $x>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调递减，

故当 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 时，函数 $k(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$，

即 $m>\frac{e}{2}$ 恒成立，由 $m\in Z$ 知，整数 m 的最小值为 2.

故选：A

7.（2022•云南师大附中高三阶段练习（文））设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2\ (a,b\in R)$，若 $f(2+x)+f(2-x)=8$，则下列不等式正确的是（　　）

A．$f(e)+f\left(\frac{3}{2}\right)>8$　　　　B．$f(e)+f\left(2+\sqrt{3}\right)<8$

C．$f(\ln 7)+f\left(2+\sqrt{3}\right)>8$　　　　D．$f(\ln 5)+f(3-\ln 2)<8$

【答案】C

【分析】

可由 $f(2+x)+f(2-x)=8$ 确定函数解析式，求出函数的单调区间，每个选项中，可赋值其中一个，进而根据单调性比较另外两个大小即可确定每个选项正误.

【详解】

由题 $(2+x)^3+a(2+x)^2+b(2+x)+2+(2-x)^3+a(2-x)^2+b(2-x)+2=8$，

化简整理得 $(6+a)x^2+2(2a+b+3)=0$，于是 $\begin{cases}6+a=0,\\2a+b+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6,\\b=9,\end{cases}$

所以 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$，进而 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

据此，$f(x)$ 在 $(-\infty,1),(3,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

因为 $f(2+x)+f(2-x)=8$，即 $f(x)+f(4-x)=8$.

对于 A，由 $f(e)+f(4-e)=8$，又 $1<4-e<\frac{3}{2}<3$，所以 $f(4-e)>f\left(\frac{3}{2}\right)$，

$(e)\square f\left(\frac{3}{2}\right)\square 8$，故　错误；对于 B，

$f(2\square\sqrt{3})\square(2\square\sqrt{3})^3\square 6(2\square\sqrt{3})^2\square 9(2\square\sqrt{3})\square 2\square 4$，

因为 $1\square 2\square e\square 3$，所以 $f(2)\square f(e)$，而 $f(2)\square 2^3\square 6\square 2^2\square 9\square 2\square 2\square 4$，

所以 $f(e)\square f(2\square\sqrt{3})\square 8$，故 B 错误；对于 C，

$f(2\square\sqrt{3})\square(2\square\sqrt{3})^3\square 6(2\square\sqrt{3})^2\square 9(2\square\sqrt{3})\square 2\square 4$，而 $1\square \ln 7\square 2$，

所以 $f(\ln 7)\square f(2)\square 4$，所以 $f(\ln 7)\square f(2\square\sqrt{3})\square 8$，故 C 正确；

对于 D，由 $f(\ln 5)\square f(4\square\ln 5)\square 8$，因为 $1\square 3\ln 2\square 4\square\ln 5\square 3$，

所以 $f(3\ln 2)\square f(4\square\ln 5)$，所以 $f(\ln 5)\square f(3\ln 2)\square 8$，故 D 错误.

故选：C.

【点睛】

（1）赋值法是解决一些抽象函数问题常见的方法之一；

（2）根据单调性比较大小是解决抽象函数及复杂函数比大小或解不等式的重要方法.

8.（2021·全国·高考真题（理））设 $a\square 2\ln 1.01$，$b\square\ln 1.02$，$c\square\sqrt{1.04}\square 1$．则（　　）

A．$a\square b\square c$　　B．$b\square c\square a$　　C．$b\square a\square c$　　D．$c\square a\square b$

【答案】B

【分析】

利用对数的运算和对数函数的单调性不难对 ,b 的大小作出判定，对于 a 与 c，b 与 c 的大小关系，将 0.01 换成 x,分别构造函数 $f\left(x\right)\square 2\ln\left(1\square x\right)\square\sqrt{1\square 4x}\square 1$，

$g\left(x\right)\square\ln\left(1\square 2x\right)\square\sqrt{1\square 4x}\square 1$，利用导数分析其在 0 的右侧包括 0.01 的较小范围内的

$g(0)=0$即可得出 a 与 c，b 与 c 的大小关系.

【详解】

$\because a=2\ln1.01=\ln1.01^2=\ln(1+0.01)^2=\ln(1+2\times0.01+0.01^2)>\ln1.02=b$，

所以 $b<a$；

下面比较 c 与 a,b 的大小关系.

记 $f(x)=2\ln(1+x)-(\sqrt{1+4x}-1)$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2\left(\sqrt{1+4x}-1-x\right)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$，

由于 $1+4x-(1+x)^2=2x-x^2=x(2-x)$

所以当 0<x<2 时，$1+4x-(1+x)^2>0$，即 $\sqrt{1+4x}>(1+x)$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $f(0.01)>f(0)=0$，即 $2\ln1.01>\sqrt{1.04}-1$，即 $a>c$；

令 $g(x)=\ln(1+2x)-(\sqrt{1+4x}-1)$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2\left(\sqrt{1+4x}-1-2x\right)}{(1+2x)\sqrt{1+4x}}$，

由于 $1+4x-(1+2x)^2=-4x^2$，在 x>0 时，$1+4x-(1+2x)^2<0$，

所以 $g'(x)<0$，即函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(0.01)<g(0)=0$，即

$\ln1.02<\sqrt{1.04}-1$，即 b<c;

综上，$b<c<a$，

故选：B.

【点睛】

本题考查比较大小问题，难度较大，关键难点是将各个值中的共同的量用变量替换，构造函数，利用导数研究相应函数的单调性，进而比较大小，这样的问题，凭借近似估计计算往往是无法解决的.

（2022·黑龙江·哈九中模拟预测(理)）已知函数 x□□x□1□ln x□□□x□1□，(□□0)的三个零点分别为 x_1，x_2，x_3，其中 x_1□x_2□x_3，□x_1□x_2□□x_2□x_3□□x_3□x_1□的取值范围为（）

A．□□64, □32□　　　　B．□□, □64□

C．□□, □32□　　　　D．□□, □16□

【答案】D

【分析】

构造 g(x) □ln x□$\frac{□x□1□}{x□1}$，结合零点个数及单调性求出□□2，求出

0□x_3□a□1□x_2□b□x_1 且 x_3□$\frac{1}{x_1}$，利用基本不等式得到□x_1□x_2□□x_2□x_3□□x_3□x_1□□8，从而得到答案

【详解】

∵ f□x□□x□1□ln x□□□x□1□，令□x□1□ln x□□(x□1)□0，即 ln x□$\frac{□x□1□}{x□1}$□0，（x□0）

令 g(x)□ln x□$\frac{□x□1□}{x□1}$，（x□0），则 g(1)□0，

则 g□x□□$\frac{1}{x}$□$\frac{2□}{□x□1□^2}$□$\frac{x^2□□2□□2□x□1}{x□x□1□^2}$，（x□0），

令 h□x□□x^2□□2□□2□x□1，（x□0），

要想 g□x□除 1 外再有两个零点，则 g(x) 在□0, □□上不单调，

则□□2□□2□^{2}□4□4□^{2}□8□□0，

解得：□□2 或□□0，

当□□0 时，g□x□□0 在□0, □□恒成立，

(x) 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能有两个零点，

当 $\lambda>2$ 时，设 $g'(x)=0$，即 $h(x)=0$ 的两根为 a,b，且 $a<b$，

则有 $\begin{cases} ab=1 \\ a+b=2(\lambda-1)>0 \end{cases}$，故 $0<a<1<b$，

令 $g'(x)>0$，解得：$x<a$ 或 $x>b$，令 $g'(x)<0$，解得：$a<x<b$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,a)$，$(b,+\infty)$ 上单调递增，在 (a,b) 上单调递减，

因为 $x_1>x_2>x_3$，所以 $0<x_3<a<1<x_2<b<x_1$，

又因为 $g\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}-\frac{\lambda\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\frac{1}{x}+1}=-\ln x-\frac{\lambda(1-x)}{1+x}=-g(x)$，

若 $g(x)=0$，则 $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$，

因为 $g(x_1)=g(x_3)=0$，所以 $x_3=\frac{1}{x_1}$，

所以 $-\lambda(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-\lambda(x_1+1)\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=-\lambda\left(2+x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$

$<-\lambda\left(2+2\sqrt{x_1\cdot\frac{1}{x_1}}\right)\left(2\sqrt{x_1\cdot\frac{1}{x_1}}\right)=-8\lambda$，

因为 $\lambda>2$，故 $-\lambda(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)<-16$

检验：当 $\lambda=2$ 时，$g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$（$x>0$），$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$，

此时 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，即 $x_1=x_2=x_3=1$，此时为临界情况，$-\lambda(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-16$；

综上：$-\lambda(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$ 的取值范围为 $(-\infty,-16)$.

故选：D.