

专题 06 高考数学仿真押题试卷（六）

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定地点。
2. 选择题的作答：每题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、底稿纸和答题卡上的非答题地区均无效。
3. 非选择题的作答：用署名笔挺接答在答题卡上对应的答题地区内。写在试题卷、底稿纸和答题卡上的非答题地区均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

5 分，在每题给出的四个选项中，只有一项为哪一项切合题目

一、选择题：本大题共 12 小题，每题

目

要求的。

1. 复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$ (此中 i 是虚数单位)，则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

【解答】解：
$$\because z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i,$$

$\therefore \bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$

【答案】 C.

2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | x - 4 \leq 0\}$ ， $B = \{x | \ln x < 2\}$ ，则 $\complement_U (A \cap B) =$ ()

- A. $\{x | x > x - 4\}$ B. $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 4\}$ C. $\{x | x \leq 0, 4\}$ D. $\{x | x \leq x \text{ 或 } 4x \leq 2\}$

【解答】解：全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | x - 4 \leq 0\} = \{x | x \leq 4\}$ ， $B = \{x | \ln x < 2\} = \{x | 0 < x < e^2\}$ ，
则 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 4\}$ ，

则 $\complement_U (A \cap B) = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 4\}$ ，

【答案】 B.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 6$ ， $S_6 = 54$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

“超级资源 + 学科” 获取更多免费资源

【解答】解：依题意可得 $q \neq 1$ ，

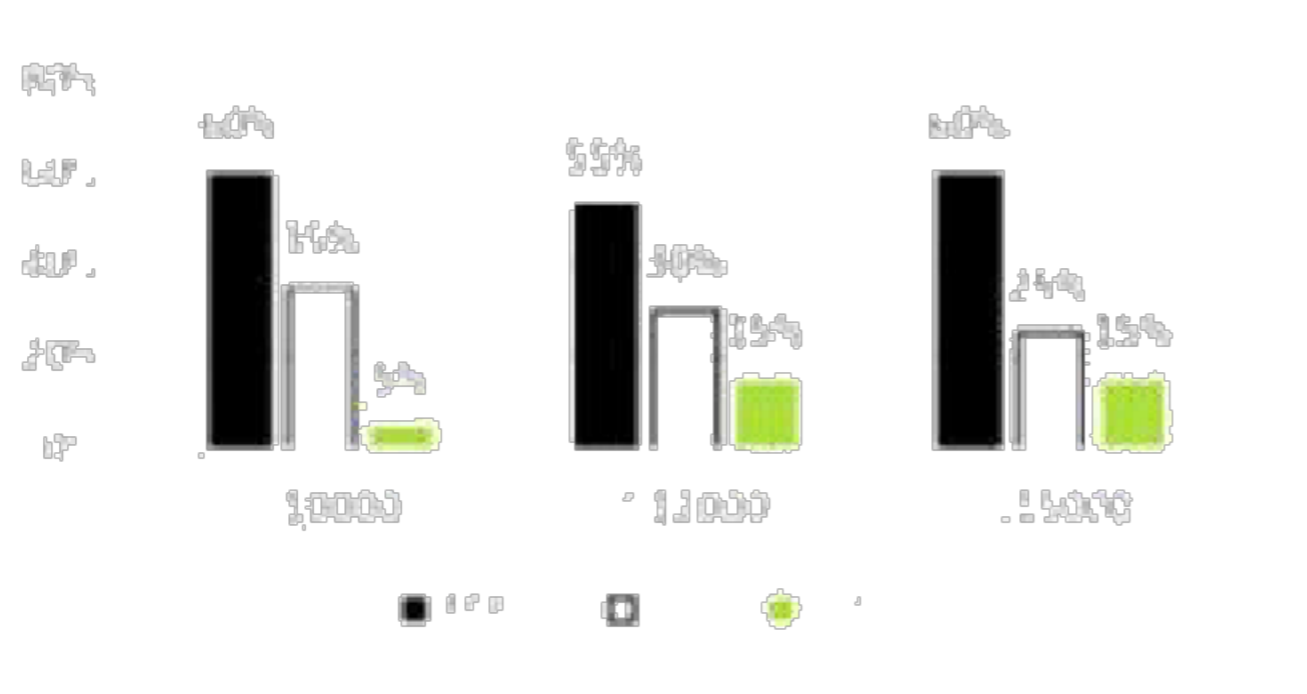
$$\therefore S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 6, \quad S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 54,$$

$$\therefore 1+q+q^2 = 9,$$

$$\therefore q = 2,$$

【答案】 C.

4. 如图是甲、乙、丙三个公司的产品成本（单位：万元）及其组成比率，则以下判断正确的选项是 (



-)
- A. 乙公司支付的薪资所占成本的比重在三个公司中最大
 - B. 因为丙公司生产规模大，所以它的其余花费开销所占成本的比重也最大
 - C. 甲公司本着节俭创业的原则，将其余花费支出降到了最低点
 - D. 乙公司用于薪资和其余花费支出额比甲丙都高

【解答】解：三个公司中甲公司薪资所占成本的比重最大，故 A 错误，

固然丙公司生产规模大，但它的其余花费开销所占成本的比重与乙公司是同样的，故 B 错，

甲公司其余花费开销的确最低，故 C 正确，

甲公司的薪资和其余花费开销额为 4000 万元，乙公司为 5400 万元，丙公司为 6000 万元，所以丙公司用于薪资和其余花费支出额比甲乙都高，故 D 错误，

【答案】 C.

5. 已知函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x)+f(-x)=0$ ， $f(x+4)+f(-x)=0$ 成立；②当 $x \in (0, 2]$ 时，

$$f(x) = x(x-2), \text{ 则 } f(2019) = ()$$

- A. 1
- B. 0
- C. 2
- D. -1

【解答】解： $\because f(x)+f(-x)=0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 是奇函数，

搜寻“超级资源 +学科”获取更多免费资源

设三棱锥内切球的半径为 r ，则由等体积法得

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times 2\sqrt{2})r = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2$$

解得 $r = \sqrt{2} - 1$

所以该三棱锥内切球的表面积为

$$S = 4\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = (12 - 8\sqrt{2})\pi$$

【答案】 A.

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 4$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$ ， E 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} =$ ()

- A. 4 B. -8 C. -12 D. -16

【解答】解：由 $AB = 2$ ， $AD = 4$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$ ，

所以 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 = -12$ ，

【答案】 C.

9. 已知 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单一递增，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{3}]$ B. $(0, \frac{2}{3}] \cup [\frac{26}{3}, 7]$ C. $[\frac{26}{3}, \frac{50}{3}] \cup [19, 19]$ D. $(0, \frac{2}{3}] \cup [\frac{50}{3}, 19]$

【解答】解： $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ，

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

得 $2k\pi - \frac{5\pi}{6} \leq \omega x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ， $k \in \mathbb{Z}$

即 $\frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{\omega} \leq x \leq \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{\omega}$ ，即函数的单一递增区间为 $[\frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{\omega}, \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{\omega}]$ ， $k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单一递增，

$$\therefore \begin{cases} \frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{\omega} \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{\omega} \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \omega \leq 12k - 5 \\ \omega \leq 8k + \frac{2}{3} \end{cases}$$

搜寻“超级资源 + 学科”获取更多免费资源

即 $12k - 5 \leq \omega \leq 8k + \frac{2}{3}$,

$\omega \geq 0$,

\therefore 当 $k=0$ 时 $-\frac{5}{3} \leq \omega \leq \frac{2}{3}$, 此时 $0 < \omega \leq \frac{2}{3}$,

当 $k=1$ 时, $\frac{7}{3} \leq \omega \leq \frac{26}{3}$,

当 $k=2$ 时, $19 \leq \omega \leq 16 + \frac{2}{3}$, 此时不可立,

综上 ω 的范围是 $0 < \omega \leq \frac{2}{3}$ 或 $\frac{7}{3} \leq \omega \leq \frac{26}{3}$,

即 $(0, \frac{2}{3}] \cup [7, \frac{26}{3}]$,

【答案】 B.

10. 已知函数 $y = f(x-2)$ 是 R 上的偶函数, 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成,

若 $a = f(\log_3 18)$, $b = f(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $c = f(\frac{\ln 22}{e^2})$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【解答】解: 依据题意, 函数 $y = f(x-2)$ 是 R 上的偶函数, 则函数 $f(x)$ 的图象对于直线 $x = 2$ 对称,

又由对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为增函数,

则 $\log_3 18 = \log_3(9 \times 2) = 2 + \log_3 2$, $\ln \frac{e^2}{\sqrt{2}} = 2 - \ln \sqrt{2}$, $\frac{\ln 22}{e^2} = \sqrt{22} - 2$,

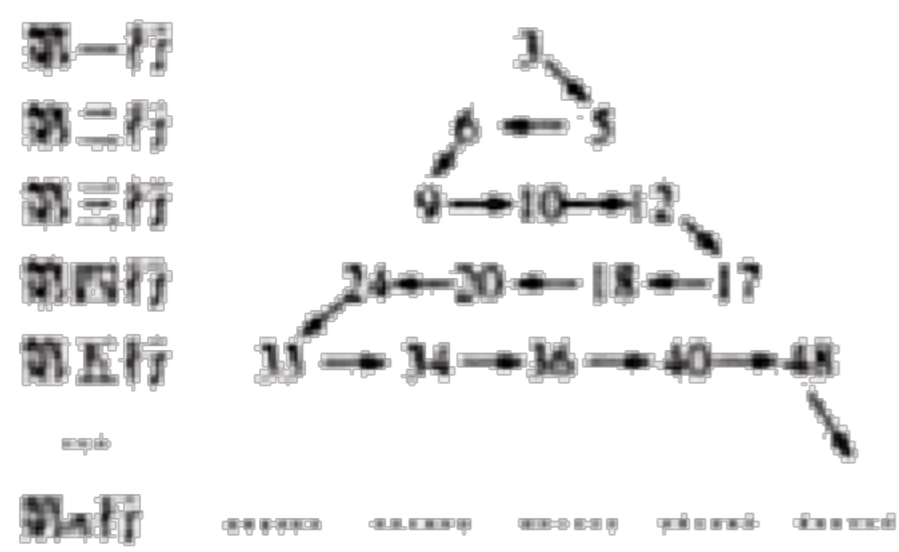
又由 $\ln \sqrt{2} = \log_2 2 < \log_3 2 < \sqrt{22} - 2$,

故 $b < a < c$;

【答案】 A.

11. 将会合 $\{2^x + 2^y \mid 0 \leq x < y\}$, $x, y \in N$ 中的全部元素依据从小到大的次序摆列成一个数表, 以下图,

则第 61 个数是 ()



- A. 2019 B. 2050 C. 2064 D. 2080

【解答】解：第 1 行一个数，第 2 行 2 个数，第 3 行 3 个数，则第 n 行 n 个数，奇数行从左到右是递增，偶数行从左到右是递减的，

则元素的个数为 $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

因为当 $n=10$ 时， $S_{10}=55$, 当 $n=11$ 时， $S_{11}=66$,

所以第 61 个数是第 11 行第 6 个数字，

且 $3=2^0+2^1$, $5=2^0+2^2$, $6=2^1+2^2$, $9=2^0+2^3$, $10=2^1+2^3$, $12=2^2+2^3$,

所以第 61 个数 $2^5+2^{11}=2080$,

【答案】 D.

12. 已知 $f(x) = \frac{e^x}{x} + x$, $g(x) = \frac{\ln x}{x} + k$, 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有两个交点，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. (0, 1) B. (e, e+1) C. (e-1, e) D. (e+1, +∞)

【解答】解：设 $h(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} + x$,

则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有两个交点，

即 $y = h(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个交点，

又 $h'(x) = \frac{e^x(x-1) + \ln x + x^2 - 1}{x^2}$,

设 $\varphi(x) = e^x(x-1) + \ln x + x^2 - 1$,

则 $\varphi'(x) = xe^x + \frac{1}{x} + 2x > 0$, 即 $y = h'(x)$ 为增函数，

由 $h'(1) = 0$,

即当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$,

即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 为增函数, 在 $(1, +\infty)$ 为减函数,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = e + 1$,

又 $x \rightarrow 0^+$, $h(x) \rightarrow +\infty$,

$x \rightarrow +\infty$, $h(x) \rightarrow +\infty$,

所以当 $y = h(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个交点时,

实数 k 的取值范围是 $k > e + 1$,

【答案】 D.

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每题 5 分.

13. 已知 x, y 知足拘束条件:
$$\begin{cases} x + 2y - 1 \leq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$
, 则 $z = 2x + y$ 的最大值是 3.

【解答】解: 作出 x, y 知足拘束条件:
$$\begin{cases} x + 2y - 1 \leq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$
 对应的平面地区如图: (暗影部分),

由 $z = 2x + y$ 得 $y = -2x + z$,

平移直线 $y = -2x + z$,

由图象可知当直线 $y = -2x + z$ 经过点 A 时, 直线 $y = -2x + z$ 的截距最大,

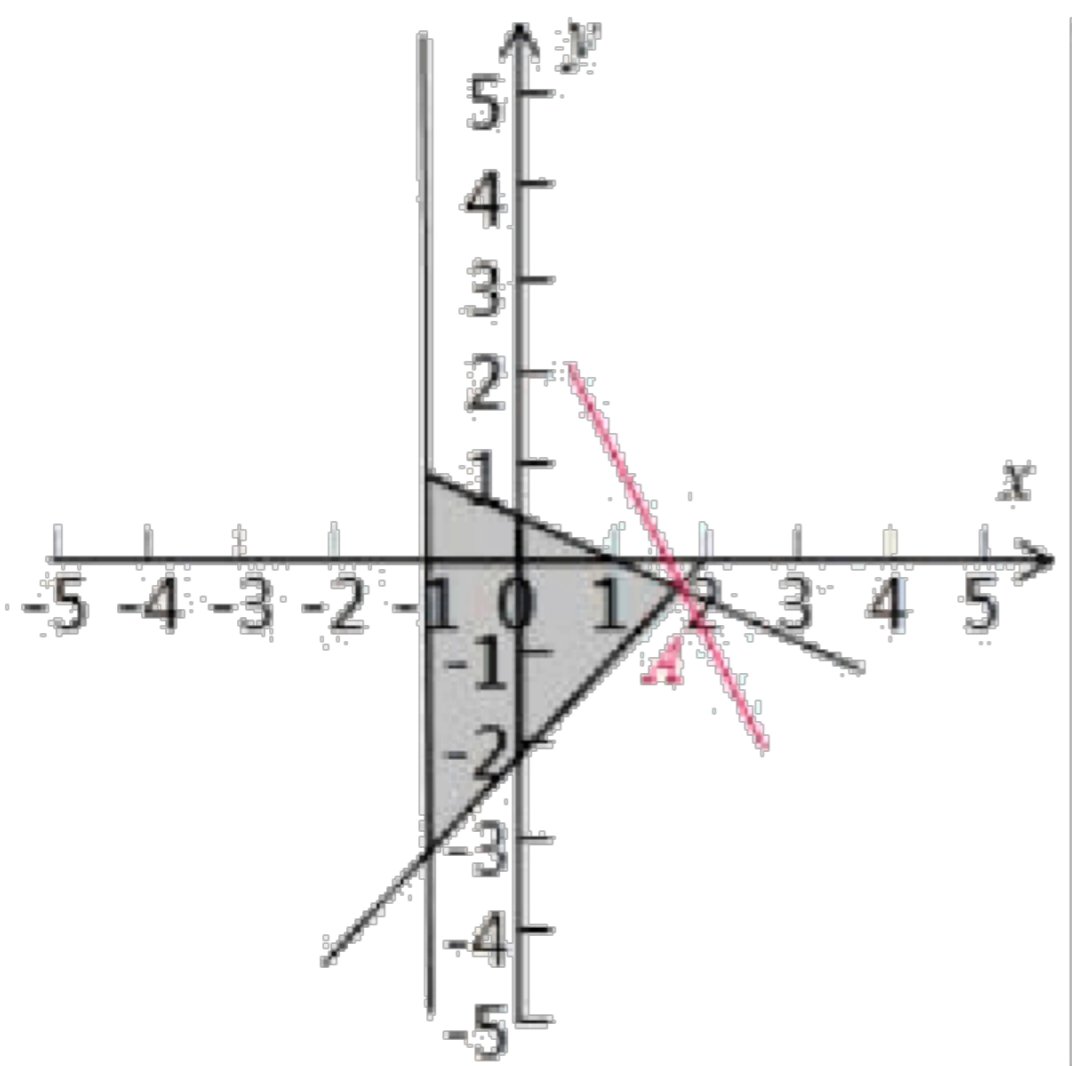
此时 z 最大.

由
$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$
, 解得 $A(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3})$,

代入目标函数 $z = 2x + y$ 得 $z = 3$.

即目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 3

故答案为: 3



14. 甲、乙、丙三人中，只有一个会弹钢琴。甲说：“我会”，乙说：“我不会”，丙说：“甲不会”。假如这三句话只有一句是真的，那么会弹钢琴的是 乙。

【解答】解：①设会弹钢琴的是甲，则甲、乙说的是实话，与题设矛盾，故会弹钢琴的不是甲，
 ②设会弹钢琴的是乙，则丙说的是实话，与题设符合，故会弹钢琴的是乙，
 ③设会弹钢琴的是丙，则乙、丙说的时实话，与题设矛盾，故会弹钢琴的不是丙，

综合①②③得：会弹钢琴的是乙，

故答案为：乙

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的偶函数，且 $f(x-1)$ 为奇函数，当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = 1 - x^3$ ，则

$$f\left(\frac{29}{2}\right) = \frac{7}{8}$$

【解答】解：依据题意， $f(x-1)$ 为奇函数，则函数 $f(x)$ 对于点 $(1, 0)$ 对称，则有 $f(-x) = -f(2+x)$ ，

又由函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x) = f(-x)$ ，

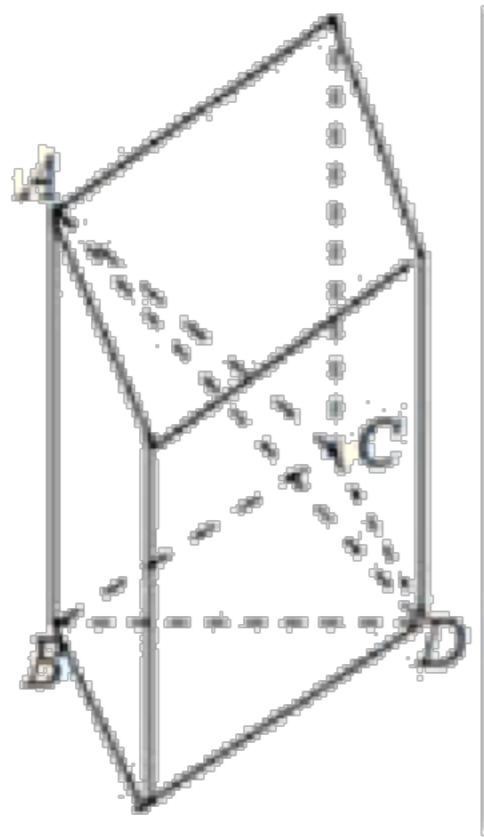
则有 $f(x) = -f(x+2)$ ，变形可得 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$$f\left(\frac{29}{2}\right) = f\left(16 - \frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = -\frac{7}{8}$$

故答案为： $\frac{7}{8}$

16. 四周体 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 底面 BCD ， $AB = BD = \sqrt{2}$ ， $CB = CD = 1$ ，则四周体 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 4π 。

【解答】解：如图，在四周体 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 底面 BCD ， $AB = BD = \sqrt{2}$ ， $CB = CD = 1$ ，



可得 $\angle BCD = 90^\circ$ ，补形为长方体，则过一个极点的三条棱长分别为 $1, 1, \sqrt{2}$ ，

则长方体的对角线长为 $\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ ，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的半径为 1 。

其表面积为 $4\pi \times 1^2 = 4\pi$ 。

故答案为： 4π 。

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比 $q > 1$ ，且 $a_2 + 1$ 为 a_1, a_3 的等差中项， $S_3 = 14$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(II) 记 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【解答】解：(I) $a_2 + 1$ 是 a_1, a_3 的等差中项， $\therefore 2(a_2 + 1) = a_1 + a_3$ ，

$$\therefore a_1(q^2 + 1) = 2a_1q + 2, \quad a_1(1 + q + q^2) = 14,$$

化为 $2q^2 - 5q + 2 = 0$ ， $q > 1$ ，解得 $q = 2$ ， $\therefore a_1 = 2$

$$\therefore a_n = 2^n.$$

$$(II) b_n = a_n \cdot \log_2 a_n = n \cdot 2^n.$$

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$ 。

$$2T_n = 2 \times 2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}.$$

$$\therefore -T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1}.$$

$$\text{解得：} T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

18. 为了让税收政策更好的为社会发展服务，国家在订正《中华人民共和国个人所得税法》以后，公布了

《个人所得税专项附加扣除暂行办法》，明确“专项附加扣除”就是子女教育、继续教育重病医疗、住宅贷

搜寻“超级资源 + 学科”获取更多免费资源

款利息、住宅租金赡养老人等花费，并宣布了相应的定额扣除标准，决定自 2019 年 1 月 1 日起实行，某机

关为了检查内部职员对新个税方案的满意程度与年纪的关系，经过问卷检查，整理数据得以下 2×2 列联表：

	40 岁及以下	40 岁以上	共计
基本满意	15	10	25
很满意	25	30	55
共计	40	40	80

(1) 依据列联表，可否有 99% 的把握以为满意程度与年纪相关？

(2) 为了帮助年纪在 40 岁以下的未购房的 8 名职工解决实质困难，该公司拟职工贡献积分 x (单位：分) 给予相应的住房补贴 y (单位：元)，现有两种补贴方案，方案甲： $y = 1000 + 700x$ ；方案乙：

$$y = \begin{cases} 3000, & 0 < x \leq 5 \\ 5600, & 5 < x \leq 10 \\ 9000, & x > 10 \end{cases}$$

已知这

8 名职工的贡献积分为 2 分， 3 分， 6 分， 7 分， 7 分， 11 分， 12 分， 12 分，

将采纳方案甲比采纳方案乙获取更多补助的职工记为 “A 类职工”。为认识职工对补助方案的认同度，现从

这 8 名职工中随机抽取 4 名进行面谈，求恰巧抽到 3 名 “A 类职工” 的概率。

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d$$

附：

，此中

参照数据：

$P(K^2 \geq k)$								
k_0								

【解答】解：(1) 依据列联表能够求得 K^2 的观察值：

$$k = \frac{80(25 \times 30 - 10 \times 15)^2}{35 \times 40 \times 40 \times 40} = \frac{80}{7} \approx 11.42 > 6.635$$

故有 99% 的把握以为满意程度与年纪相关。

(2) 据题意，该 8 名职工的贡献积分及按甲乙两种方案所获补助状况为：

积分	2	3	6	7	7	11	12	12
方案甲	2400	3100	5200	5900	5900	8700	9400	9400
方案乙	3000	3000	5600	5600	5600	9000	9000	9000

由表可知，“A类职工”有 5 名，

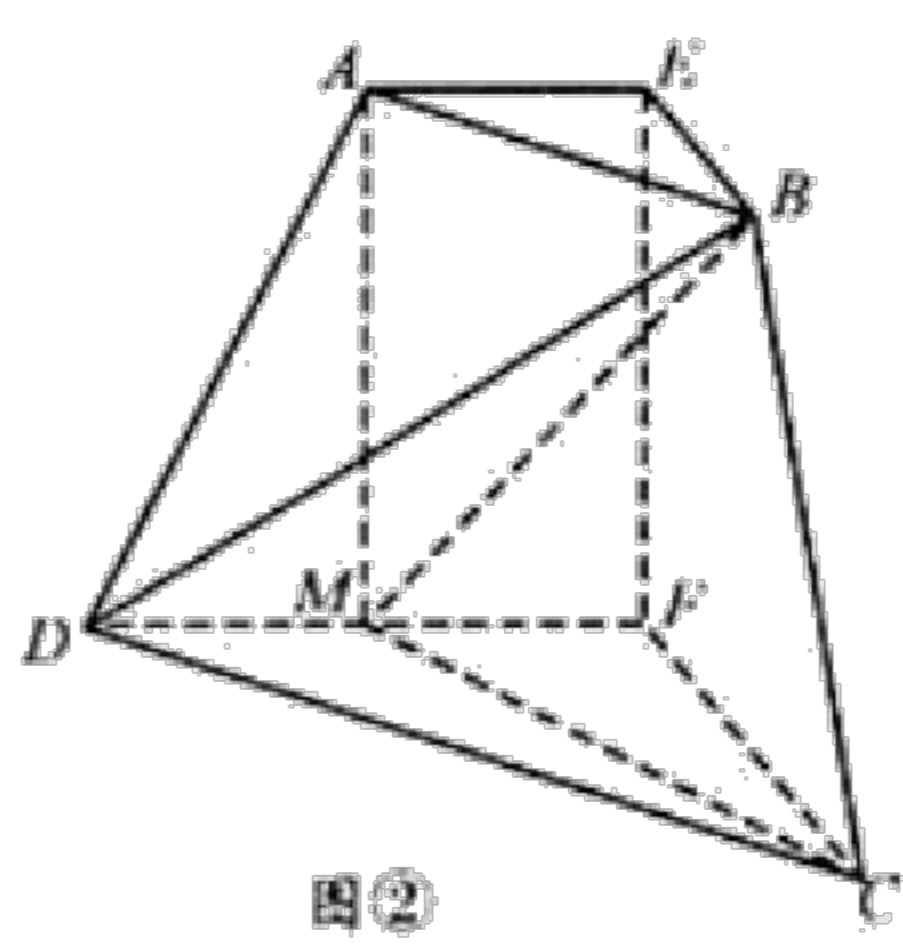
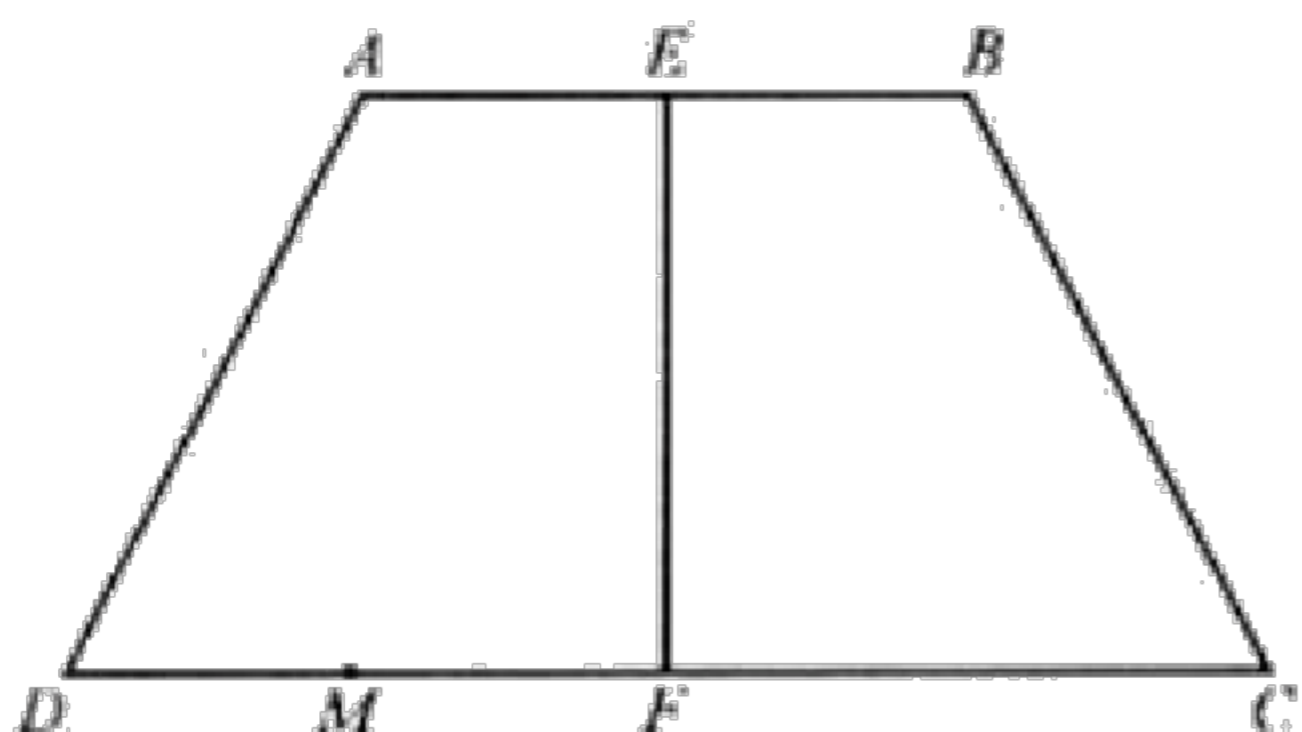
设从这 8 名职工中随机抽取 4 名进行面谈，恰巧抽到 3 名“A类职工”的概率为 P ，

则
$$P = \frac{C_3^3 C_5^1}{C_8^4} = \frac{3}{7}.$$

19. 如图①，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， E ， F 分别为 AB ， CD 的中点， $CD = 2AB = 2EF = 4$ ， M 为 DF 中点. 现将四边形 $BEFC$ 沿 EF 折起，使平面 $BEFC \perp$ 平面 $AEFD$ ，获取如图②所示的多面体. 在图②中，

(I) 证明： $EF \perp MC$ ；

(II) 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



【解答】证明：(I) 由题意知在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，

$\because E$ ， F 分别为 AB ， CD 的中点， $\therefore EF \perp AB$ ， $EF \perp CD$ ，

\therefore 折叠后， $EF \perp DF$ ， $EF \perp CF$ ，

$\because DF \cap CF = F$ ， $\therefore EF \perp$ 平面 DCF ，

又 $MC \subset$ 平面 DCF ， $\therefore EF \perp MC$ 。

解：(II) \because 平面 $BEFC \perp$ 平面 $AEFD$ ，平面 $BEFC \cap$ 平面 $AEFD = EF$ ，且 $EF \perp DF$ ，

$\therefore DF \perp$ 平面 $BEFC$ ， $\therefore DF \perp CF$ ， $\therefore DF$ ， CF ， EF 两两垂直，

以 F 为坐标原点，分别以 FD ， FC ， FE 所在直线为 x ， y ， z 轴，成立空间直角坐标系，

$\therefore DM = 1$ ， $\therefore FM = 1$ ，

$\therefore M(1, 0, 0)$ ， $D(2, 0, 0)$ ， $A(1, 0, 2)$ ， $B(0, 1, 2)$ ，

$\therefore \overrightarrow{MA} = (0, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{DA} = (-1, 0, 2)$ ，

设平面 MAB 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

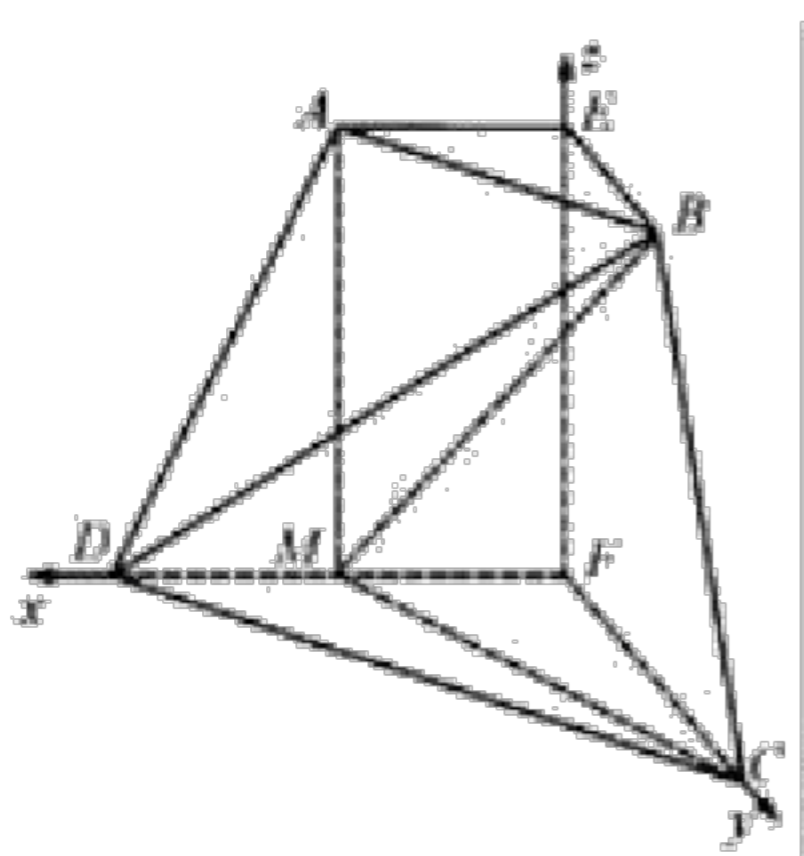
$$\begin{cases} \overline{MA} \cdot \vec{m} = 2z = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{m} = -x + y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{得 } \vec{m} = (1, 1, 0),$$

设平面 ABD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overline{DA} \cdot \vec{n} = -x + 2z = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{n} = -x + y = 0 \end{cases}, \text{取 } z = 1, \text{得 } \vec{n} = (2, 2, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

\therefore 二面角 M-AB-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{1}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设椭圆 C 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 左, 右极点分别为 A, B, 点 M, N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点, 且 $F_1M \parallel F_2N$, 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $3k_1 + 2k_2 = 0$, 求直线 F_1M 的方程.

【解答】解: (I) 由题意可得: $2b = 4\sqrt{2}, \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, a^2 = b^2 + c^2$.

联立解得: $b = 2\sqrt{2}, 2c = a = 3$.

\therefore 椭圆 C 的标准方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(II) $A(-3, 0), B(3, 0), F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$

设 F_1M 的方程为: $x = my - 1, M(x_1, y_1), (y_1 > 0)$, 直线 F_1M 与椭圆的另一个交点为 $M'(x_2, y_2)$.

$\because F_1M \parallel F_2N$, 依据对称性可得: $N(x_2, -y_2)$.

$$\begin{cases} 8x^2 + 9y^2 = 72 \\ x = my - 1 \end{cases}, \text{化为: } (8m^2 + 9)y^2 - 16my - 64 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{16m}{8m^2 + 9}, \quad y_1 y_2 = \frac{-64}{8m^2 + 9},$$

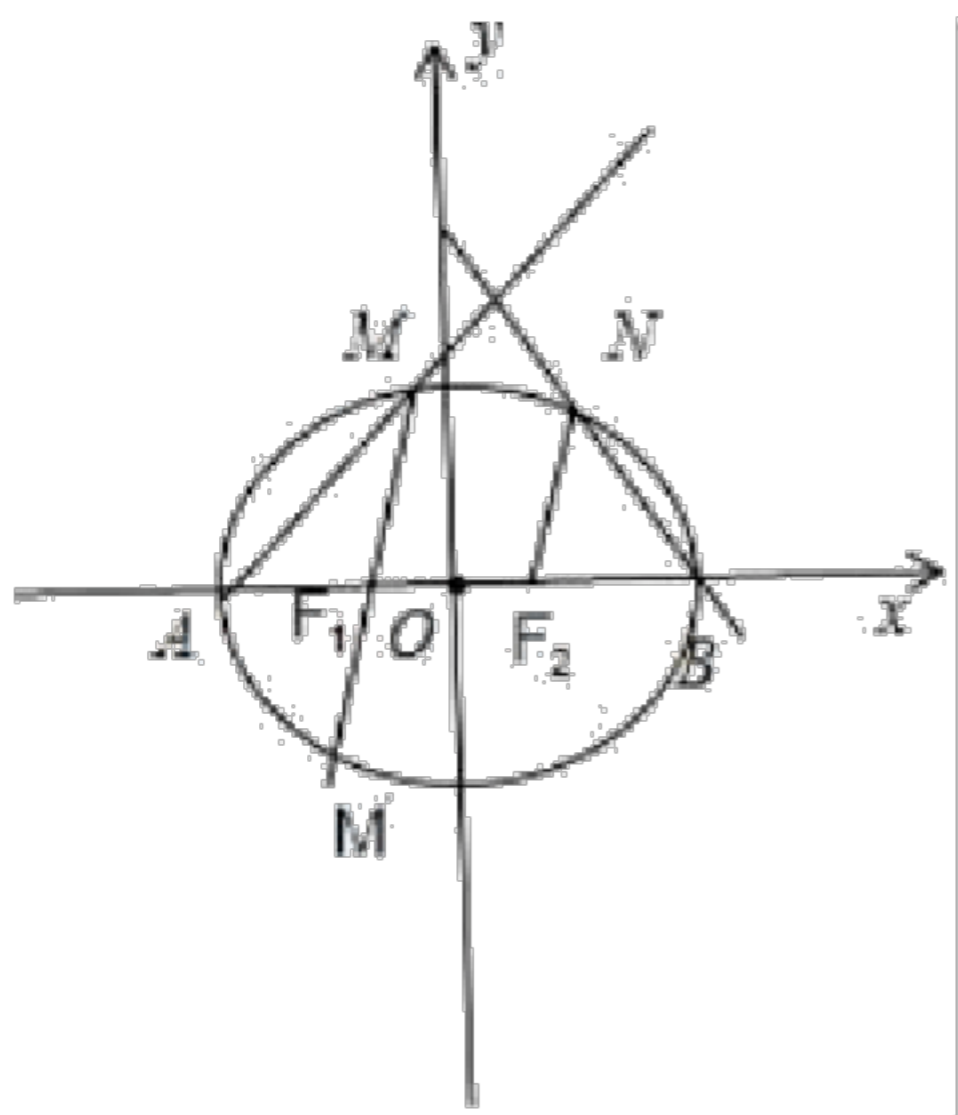
$$\therefore 3k_1 + 2k_2 = 0, \quad \therefore \frac{3y_1}{my_1 + 2} + \frac{2y_2}{my_2 + 2} = 0, \quad \text{即 } 5my_1 y_2 + 6y_1 + 4y_2 = 0,$$

$$\text{联立解得: } y = \frac{128m}{8m^2 + 9}, \quad y_2 = \frac{-112}{8m^2 + 9},$$

$$\because y_1 > 0, \quad y_2 < 0, \quad \therefore m > 0$$

$$\therefore y_1 y_2 = \frac{128m}{8m^2 + 9} \cdot \frac{-112}{8m^2 + 9} = \frac{-64}{8m^2 + 9}, \quad \therefore \frac{m\sqrt{6}}{12}.$$

$$\therefore \text{直线 } F_1 M \text{ 的方程为 } x = \frac{\sqrt{6}}{12} y, \quad \text{即 } 2\sqrt{6}x - y + 2\sqrt{6} = 0.$$



21. 已知函数 $f(x) = \ln x + a\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $f(x) > 0$, 求实数 a 取值的会合;

(II) 证明: $e^x + \frac{1}{x} \geq 2 - \ln x + x^2 + (e-2)x$.

【解答】 (I) 解: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$. ($x > 0$).

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单一递增, 又 $f(1) = 0$.

所以 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$.

当 $a > 0$ 时, 可得函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单一递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单一递增,

$\therefore x = a$ 时, 函数 $f(x)$ 获得极小值即最小值,

则 $f(a) = \ln a + 1 - a \geq 0$.

令 $g(a) = \ln a + 1 - a$, $g(1) = 0$.

$g'(a) = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$ ，可知：当 $a=1$ 时，函数 $g(a)$ 获得极大值即最大值，而 $g(1)=1$ 。

所以只有 $a=1$ 时知足 $f(a) = \ln a + 1 - a \geq 0$ 。

故 $a=1$ 。

∴ 实数 a 取值的集合是 $\{1\}$ 。

(II) 证明：由 (I) 可知：当 $a=1$ 时， $f(x)$ ，即 $\ln x + \frac{1}{x}$ 在 $x > 0$ 时恒成立。

要证明： $e^x + \frac{1}{x} \geq 2 - \ln x + x^2 + (e-2)x$ ，即证明： $e^x \geq 1 + x^2 + (e-2)x$ ，即 $e^x - 1 - x^2 - (e-2)x \geq 0$ 。

令 $h(x) = e^x - 1 - x^2 - (e-2)x$ ， $x > 0$ 。

$h'(x) = e^x - 2x - (e-2)$ ，令 $u(x) = e^x - 2x - (e-2)$ ，

$u'(x) = e^x - 2$ ，令 $u'(x) = e^x - 2 = 0$ ，解得 $x = \ln 2$ 。

可得：当 $x = \ln 2$ 时，函数 $u(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单一递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单一递增。

即函数 $h'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单一递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单一递增。

而 $h'(0) = 1 - (e-2) = 3 - e > 0$ ， $h'(\ln 2) = h'(1) = 0$ 。

∴ 存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$ 使得 $h'(x) = 0$ ，

当 $x \in (0, x_0)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单一递增；当 $x \in (x_0, \ln 2)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单一递减。当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时，

$h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单一递增。

又 $h(0) = 1 - 1 = 0$ ， $h(1) = e - 1 - 1 - (e-2) = 0$ ，

∴ 对 $\forall x > 0$ ， $h(x) \geq 0$ 恒成立，即 $e^x - 1 - x^2 - (e-2)x \geq 0$ 。

综上所述： $e^x + \frac{1}{x} \geq 2 - \ln x + x^2 + (e-2)x$ ，成立。

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，假如多做，则按所做的第一题记分。作答时，用 2B 铅笔在答题卡

上把所选题目对应的标号涂黑。 [选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数， α 为倾斜角)，曲线 C 的参数方程为

$\begin{cases} x = 4 + 2 \cos \beta \\ y = 2 \sin \beta \end{cases}$ (β 为参数， $\beta \in [0, \pi]$)，以坐标原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系。

(I) 写出曲线 C 的一般方程和直线的极坐标方程；

搜寻“超级资源 + 学科”获取更多免费资源

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/456030040042011005>