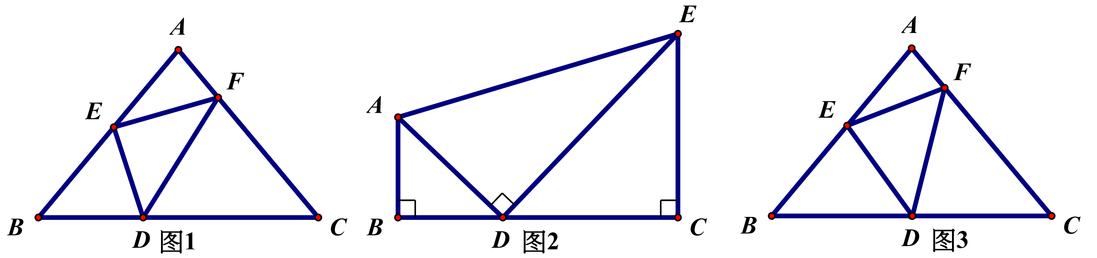
专项11 相似三角形-一线三等角模型综合应用

【解题思路】



1. 如图1，$\angle B=\angle C=\angle EDF \Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta CFD$（一线三等角）

   如图2，$\angle B=\angle C=\angle ADE \Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta DCE$（一线三直角）

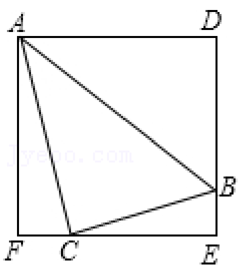
   如图3，特别地，当 D 是 BC 中点时：$\Delta BDE \backsim \Delta DFE \backsim \Delta CFD \Rightarrow ED$ 平分 $\angle BEF$，FD 平分 $\angle EFC$。

2. **一线三等角辅助线添加**：**一般情况下，已知一条直线上有两个等角（直角）或一个直角时，可构造“一线三等角”型相似。**

【典例分析】

【类型1：标准“K”型图】

【典例1】如图有一块三角尺，Rt△*ABC*，∠*C*＝90°，∠*A*＝30°，*BC*＝6，用一张面积最小的正方形纸片将这个三角尺完全覆盖．求出这个正方形的面积．



【解答】解：∵∠*C*＝90°，∠*A*＝30°，*BC*＝6，

∴*AB*＝2*BC*＝12，

∴*AC*＝$6\sqrt{3}$，

∵四边形 *AFED* 是正方形，

∴$\angle F=\angle E=90°$，$AF=FE$，

∴$\angle FAC+\angle FCA=90°$，

∵$\angle C=90°$，

∴$\angle FCA+\angle BCE=90°$，

∴$\angle FAC=\angle BCE$，

∴$\triangle AFC\backsim\triangle CEB$，

∴$\frac{AF}{CE}=\frac{AC}{CB}$，

∴$\frac{AF}{CE}=\sqrt{3}$，

设 $AF=x$，则 $CE=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

∴$FC=\frac{3-\sqrt{3}}{3}x$，

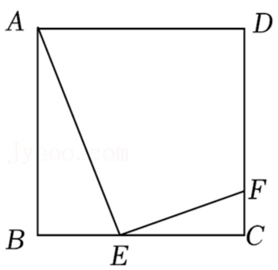
∵$AF^2+FC^2=AC^2$，

∴$x^2+(\frac{3-\sqrt{3}}{3}x)^2=(6\sqrt{3})^2$，

∴$x2=\frac{2268}{37}+\frac{648}{37}\sqrt{3}$，

答：这个正方形的面积为：$\frac{2268}{37}+\frac{648}{37}\sqrt{3}$．

【变式 1-1】如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 边上，且 $AE\perp EF$，若 $BE=2$，$CF=\frac{4}{3}$，求正方形 $ABCD$ 的边长．



【解答】解：∵$\angle AEB+\angle CEF=90°$，$\angle BAE+\angle AEB=90°$，

∴$\angle BAE=\angle CEF$，

又∵$\angle B=\angle C=90°$，

∴$\triangle BAE\backsim\triangle CEF$，

∴$\frac{CF}{BE}=\frac{CE}{AB}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3}$，

∵$AB=BC$，

∴$\frac{CE}{BC}=\frac{2}{3}$，

∴$\frac{CE}{BE}=\frac{2}{1}$，

∴$CE=4$，

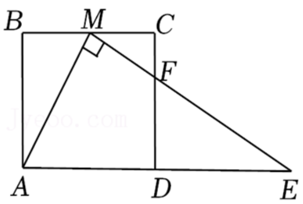
∴$BC=CE+BE=4+2=6$，

∴正方形 $ABCD$ 的边长为 6．

【变式 1-2】如图，在正方形 $ABCD$ 中，M 为 BC 上一点，$ME\perp AM$，ME 交 CD 于 F，交 AD 的延长线于点 E．

（1）求证：$\triangle ABM\backsim\triangle MCF$；

（2）若 $AB=4$，$BM=2$，求$\triangle DEF$ 的面积．



【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC=CD$，$\angle B=\angle C=90°$，$BC\parallel AD$，

∴$\angle BAM+\angle AMB=90°$，

∵$ME\perp AM$，

∴$\angle AME=90°$，

∴$\angle AMB+\angle FMC=90°$，

∴$\angle BAM=\angle FMC$，

∴$\triangle ABM\backsim\triangle MCF$；

（2）解：∵$AB=4$，

∴$AB=BC=CD=4$，

∵$BM=2$，

∴$MC=BC-BM=4-2=2$，

由（1）得：$\triangle ABM\backsim\triangle MCF$，

∴$\frac{AB}{CM}=\frac{BM}{CF}$，

∴$\frac{4}{2}=\frac{2}{CF}$，

∴$CF=1$，

∴$DF=CD-CF=4-1=3$，

∵$BC\parallel AD$，

∴$\angle EDF=\angle MCF$，$\angle E=\angle EMC$，

∴$\triangle DEF\backsim\triangle CMF$，

∴$\frac{DE}{CM}=\frac{DF}{CF}$，

∴$\frac{DE}{2}=\frac{3}{1}$，

∴$DE=6$，

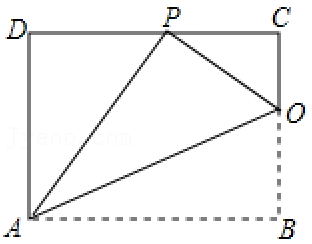
∴$\triangle DEF$ 的面积$=\frac{1}{2}DE\bullet DF=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$，

答：$\triangle DEF$ 的面积为 9．

【变式 1-3】已知矩形 $ABCD$ 的一条边 $AD=8$，将矩形 $ABCD$ 折叠，使得顶点 B 落在 CD 边上的 P 点处．如图，已知折痕与边 BC 交于点 O，连接 AP、OP、OA．

（1）求证：$\frac{OC}{PD}=\frac{OP}{AP}$；

（2）若 OP 与 PA 的比为 1：2，求边 AB 的长．



【解答】（1）证明：由折叠的性质可知，$\angle APO=\angle B=90°$，

∴$\angle APD+\angle OPC=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$\angle D=\angle C=90°$，

∴$\angle POC+\angle OPC=90°$，

∴$\angle APD=\angle POC$，

∴$\triangle OCP\backsim\triangle PDA$，

∴$\frac{OC}{PD}=\frac{OP}{AP}$；

（2）解：∵$\triangle OCP\backsim\triangle PDA$，

$\therefore \frac{PC}{AD}=\frac{OP}{PA}$，

∵OP 与 PA 的比为 1：2，$AD=8$，

$\therefore \frac{PC}{8}=\frac{1}{2}$，

∴$PC=4$，

设 $AB=x$，则 $DC=x$，$AP=x$，$DP=x-4$，

在 Rt△APD 中，$AP^2=AD^2+PD^2$，

∴$x^2=8^2+(x-4)^2$，

解得：$x=10$，

∴$AB=10$．

【类型 2：做辅助线构造“K”型图】

【典例 2】已知：在△EFG 中，∠$EFG=90°$，$EF=FG$，且点 E，F 分别在矩形 $ABCD$ 的边 AB，AD 上．

（1）如图 1，填空：当点 G 在 CD 上，且 $DG=1$，$AE=2$，则 $EG=$______；

（2）如图 2，若 F 是 AD 的中点，FG 与 CD 相交于点 N，连接 EN，求证：∠$AEF=$∠FEN；

（3）如图 3，若 $AE=AD$，EG，FG 分别交 CD 于点 M，N，求证：$MG^2=MN\cdot MD$．

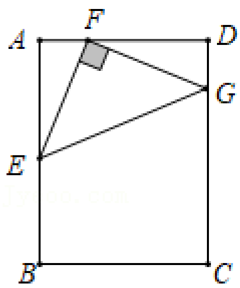


图1

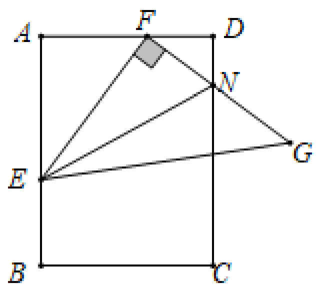


图2

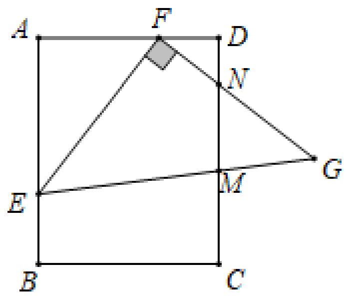


图3

【解答】（1）解：∵∠$EFG=90°$，

∴∠AFE+∠$DFG=90°$，

∵∠AEF+∠$AFE=90°$，

∴∠$AEF=$∠DFG，

又∵∠$A=$∠$D=90°$，$EF=FG$，

∴△AEF≌△DFG（AAS），

∴$AE=FD=2$，

∴$FG=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴$EG=\sqrt{2}FG=\sqrt{10}$，

故答案为：$\sqrt{10}$；

（2）证明：延长 EA、NF 交于点 M，

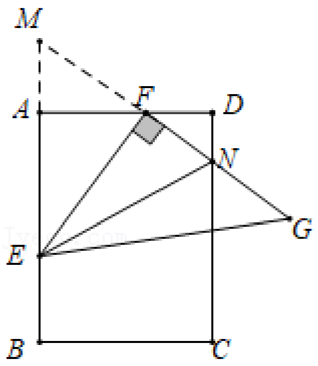


图2

∵点 F 为 AD 的中点，

∴$AF=DF$，

∵$AM\parallel CD$，

∴$\angle M=\angle DNF$，$\angle MAD=\angle D$，

∴$\triangle MAF\cong\triangle NDF$（$AAS$），

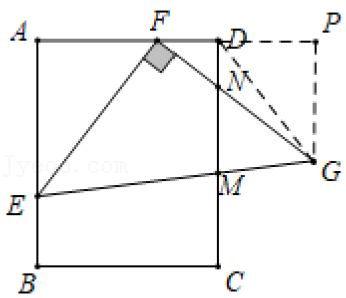
∴$MF=FN$，

∵$EF\perp MG$，

∴$ME=GE$，

∴$\angle MEF=\angle FEN$；

（3）证明：如图，过点 G 作 $GP\perp AD$ 交 AD 的延长线于 P，



∴$\angle P=90^\circ$，

同（1）同理得，$\triangle AEF\cong\triangle PFG$（$AAS$），

∴$AF=PG$，$PF=AE$，

∵$AE=AD$，

∴$PF=AD$，

∴$AF=PD$，

∴$PG=PD$，

∵$\angle P=90°$，

∴$\angle PDG=45°$，

∴$\angle MDG=45°$，

在 Rt△EFG 中，$EF=FG$，

∴$\angle FGE=45°$，

∴$\angle FGE=\angle GDM$，

∵$\angle GMN=\angle DMG$，

∴△MGN∽△MDG，

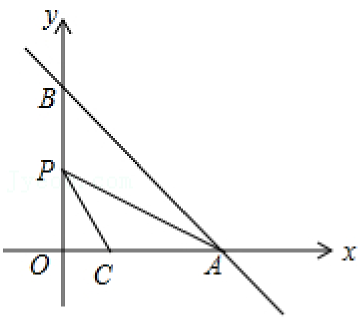
∴$\frac{MG}{DM}=\frac{MN}{MG}$，

∴$MG^2=MN\cdot MD$．

【变式 2】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB：$y=-x+m$ 分别交 x 轴，y 轴于 A，B 两点，已知点 C（2，0）．

（1）当直线 AB 经过点 C 时，m=______；

（2）设点 P 为线段 OB 的中点，连接 PA，PC，若 $\angle CPA=\angle ABO$，则 m 的值是______．



【解答】解：（1）当直线 AB 经过点 C 时，点 A 与点 C 重合，

当 $x=2$ 时，$y=-2+m=0$，即 $m=2$，

故答案为 2．

（2）作 $OD=OC=2$，连接 CD．则 $\angle PDC=45°$，如图，

由 $y=-x+m$ 可得 A（m，0），B（0，m）．

∴$OA=OB=m$，$AB=\sqrt{2}m$，

当△PCD∽△APB 时，∠APC=∠ABP．

理由：∵△PCD∽△APB，

∴∠CPD=∠PAB，

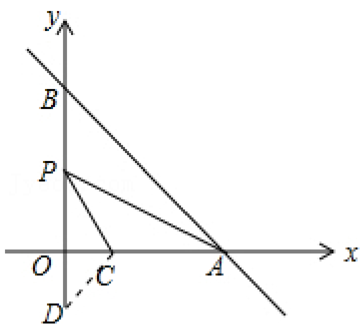
∵∠APD=∠ABP+∠PAB=∠APC+∠CPD，

∴∠APC=∠ABP．

所以$\frac{PD}{AB}=\frac{CD}{PB}$，即$\frac{\frac{1}{2}m+2}{\sqrt{2}m}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}m}$，

解得 $m=12$．

故答案是：12．

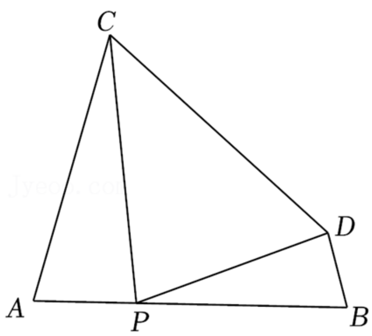


【类型 2：特殊“K”型图】

【典例 3】如图，$AB=9$，$AC=8$，P 为 AB 上一点，∠A=∠CPD=∠B，连接 CD．

（1）若 $AP=3$，求 BD 的长；

（2）若 CP 平分∠ACD，求证：$PD^2=CD \cdot BD$．



【解答】（1）解：∵$AB=9$，$AC=3$，

∴$BP=AB-AP=9-3=6$，

∵∠A=∠CPD，∠ACP+∠APC=180°－∠A，∠APC+∠BPD=180°－∠CPD，

∴∠ACP=∠BPD，

∵ $\angle A=\angle B$，

∴ $\triangle ACP \backsim \triangle BPD$，

∴ $\frac{AC}{BP}=\frac{AP}{BD}$，

∴ $\frac{8}{6}=\frac{3}{BD}$，

∴ $BD=\frac{9}{4}$，

∴ BD 的长为$\frac{9}{4}$；

（2）证明：∵ CP 平分$\angle ACD$，

∴ $\angle PCD=\angle ACP$，

∵ $\angle ACP=\angle DPB$，

∴ $\angle PCD=\angle DPB$，

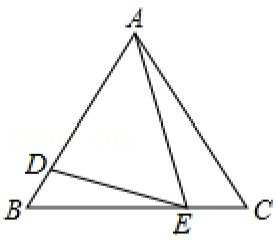
∵ $\angle CPD=\angle B$，

∴ $\triangle CPD \backsim \triangle PBD$，

∴ $\frac{PD}{BD}=\frac{CD}{PD}$，

∴ $PD^2=CD\cdot BD$．

【变式 3-1】如图，在等边三角形 ABC 中，点 E，D 分别在 BC，AB 上，且$\angle AED=60°$，求证：$\triangle AEC \backsim \triangle EDB$．



【解答】证明：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=60°$，

∴ $\angle EDB+\angle BED=120°$，$\angle CAE+\angle AEC=120°$

∵ $\angle AED=60°$，

∴ $\angle BED+\angle AEC=180°-60°=120°$，

∴ $\angle BED=\angle CAE$，

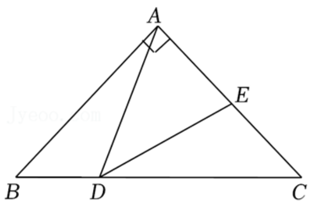
∴ $\triangle AEC \backsim \triangle EDB$．

【变式 3-2】如图，在等腰直角$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D、E 分别在边 BC、

AC 上，连接 AD、DE，有 $\angle ADE=45°$．

（1）证明：$\triangle BDA\backsim\triangle CED$．

（2）若 $BC=6$，当 $AE=ED$ 时，求 BD 的长．



【解答】（1）证明：∵$\angle AED=\angle C+\angle EDC=45°+\angle EDC$，

而 $\angle ADC=\angle ADE+\angle EDC$．

∵$\angle ADE=45°$，

∴$\angle ADC=45°+\angle EDC$，

∴$\angle AED=\angle ADC$．

∴$\angle DEC=\angle ADB$（等角的补角相等）．

而 $\angle B=\angle C=45°$，

∴$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$．

故 $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$ 得证．

（2）解：当 $AE=DE$ 时，

∴$\angle ADE=\angle DAE$，

∵$\angle ADE=45°$，

∴$\angle ADE=\angle DAE=45°$，

∵$\angle BAC=90°$，$\angle BAD=\angle EAD=45°$，

∴AD 平分 BAC，

∴AD 垂直平分 BC，

∴$BD=3$．

【跟踪训练】

1．如图，点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，若要判定 $\triangle ABP\backsim\triangle ACB$，则下列添加的条件不正确的是（　　）