2022-2023学年下学期期中考试高一数学试题

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数$z=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则$z$的虚部为（　　）

A. 1　　　　B. i　　　　C. $-\frac{1}{5}$　　　　D. $-\frac{1}{5}\mathrm{i}$

【答案】A

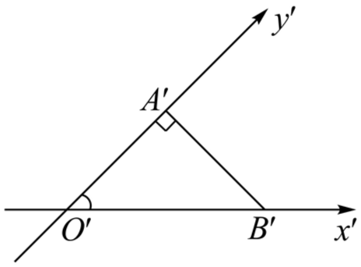
【解析】

【分析】根据复数的除法求解$z=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，进而可得$z$的虚部.

【详解】$z=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{5+5\mathrm{i}}{5}=1+\mathrm{i}$，故$z$的虚部为1.

故选：A

2. 如图，已知等腰直角三角形$\triangle O'A'B'$，$O'A'=A'B'$是一个平面图形的直观图，斜边$O'B'=2$，则这个平面图形的面积是（　　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. 1　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

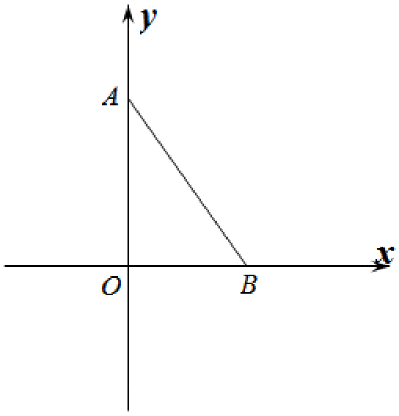
【解析】

【分析】根据直观图确定原图形的形状和大小，由此可求其面积.

【详解】因为$\triangle O'A'B'$为等腰直角三角形，$O'B'=2$，$O'A'=A'B'$，

所以$O'A'=A'B'=\sqrt{2}$，

所以对应的原平面图形如下，



其中 $OB=2$， $OA=2\sqrt{2}$，

所以这个平面图形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

故选：D.

3. 已知向量 $\vec{a}=(8,-2)$， $\vec{b}=(m,1)$， $\vec{c}=(4,2)$，若 $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}$，则实数 m 的值是（　　）

A. －10　　　　B. －8　　　　C. 10　　　　D. 8

【答案】A

【解析】

【分析】利用向量的坐标运算即可.

【详解】 $\vec{a}+\vec{b}=(8+m,-1)$;

$\vec{c}=(4\lambda,2\lambda)$；

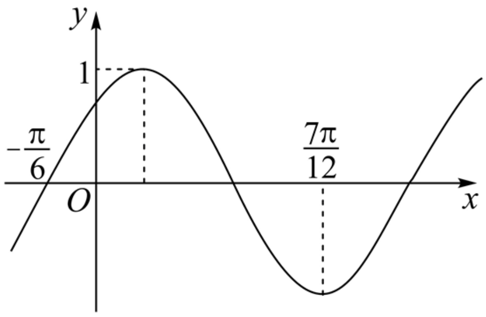
$\because \vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}$

$\therefore 8+m=-2$

$m=-10$

故选：A.

4. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $f\left(x\right)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $f\left(x\right)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】首先由周期求出ω，再根据函数过点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，求出$\varphi$，即可得解；

【详解】解：由图可知$\frac{3T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$，所以$T=\pi$，又$T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，

又函数过点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，即$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)=0$，

所以$-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi=2k\pi,k\in Z$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

故选：C

5. 若α是第二象限角，且$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{1}{7}$，

【答案】D

【解析】

【分析】由已知和$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$求出$\tan\alpha$，再代入两角和的正切展开式可得答案.

【详解】α是第二象限角，所以$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$，

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$， $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$， $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{1}{7}$.

故选：D.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=1, AC=4, \angle BAC=\frac{\pi}{3}$，点 D 为边 BC 上靠近 B 的三等分点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　　）

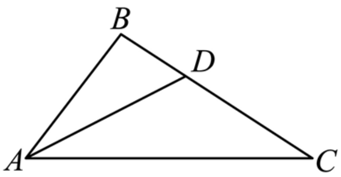
A. $-\frac{16}{3}$　　B. $\frac{16}{3}$　　C. -4　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用 $\overrightarrow{AB}$、 $\overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$、 $\overrightarrow{BC}$，利用平面向量数量积的运算性质可求得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值.

【详解】如下图所示：



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

由平面向量数量积的定义可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\frac{\pi}{3}=1\times4\times\frac{1}{2}=2$，

因此， $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}^2\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(4^2+2-2\times1^2\right)=\frac{16}{3}$.

故选：B.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c， $\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan C$，且 $b=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为（　　）

A· $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角恒等变换求出B，再利用余弦定理和基本不等式求出ac的最大值，即可求得$\triangle ABC$面积的最大值．

【详解】因为$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan C$，

所以$\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin C}{\cos C}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}$，

即$\frac{\sin A\cos C+\sin C\cos A}{\cos A\cos C}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}$，

即$\sin(A+C)+\sqrt{3}\cos A\cos C=\sqrt{3}\sin A\sin C$，

即$\sin(A+C)=\sqrt{3}\left(\sin A\sin C-\cos A\cos C\right)=-\sqrt{3}\cos\left(A+C\right)$，

所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，解得$\tan B=\sqrt{3}$，

因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$，

又因为$b=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

$\cos B=\frac{a^2+c^2-4}{2ac}=\frac{1}{2}$，解得$a^2+c^2=ac+4$，

因为a，b，c都为正数，所以$a^2+c^2\geq 2ac$，即$ac+4\geq 2ac$，

解得$ac\leq 4$，当且仅当$a=c=2$时等号成立，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\leq\sqrt{3}$，当且仅当$a=c=2$时等号成立，

即$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$．

故选：A．

8. 已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+e^{-|x|}$，$a$，$b$，$c$分别为$\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$所对的边，且$4a^2+4b^2-c^2=6ab$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $f\left(\sin A\right)\leq f\left(\cos B\right)$　　　　B. $f(\cos A)\leq f(\cos B)$

C. $f(\sin A)\geq f(\sin B)$　　　　D. $f(\sin A)\geq f(\cos B)$

【答案】D

【解析】

【分析】先利用余弦定理和基本不等式求得$\frac{\pi}{2}\le C<\pi$，从而得到$0<B\le\frac{\pi}{2}-A<\frac{\pi}{2}$.由$y=\sin x$和$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的单调性得到$\sin B\le\cos A,\cos B\ge\sin A$，而$\sin A$、$\sin B$大小不确定，$\cos A$、$\cos B$大小不确定.

利用复合函数的单调性法则判断出$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+e^{-x}$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.对四个选项一一验证：

对于A、D：因为$\cos B\ge\sin A$，所以$f(\sin A)\ge f(\cos B)$.即可判断；

对于B、C：因为$\sin A$、$\sin B$大小不确定，$\cos A$、$\cos B$大小不确定.

【详解】因为a，b，c分别为$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边，且$4a^2+4b^2-c^2=6ab$,

由余弦定理得：$3a^2+3b^2=6ab-2ab\cos C$,

利用基本不等式可得：$6ab-2ab\cos C=3a^2+3b^2\ge3\times2ab$，所以$-2ab\cos C\ge0$，

所以$\cos C\le0$.

因为$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$\frac{\pi}{2}\le C<\pi$，所以$0<A+B\le\frac{\pi}{2}$,

所以$0<B\le\frac{\pi}{2}-A<\frac{\pi}{2}$.

因为$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

所以$\sin B\le\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A,\cos B\ge\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A$,

即$\sin B\le\cos A,\cos B\ge\sin A$.

由于A、B大小不确定，所以$\sin A$、$\sin B$大小不确定，$\cos A$、$\cos B$大小不确定.

当$x>0$时，$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+e^{-x}$.

因为$y=x^2+1$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，所以$y=\frac{1}{x^2+1}$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，所以$y=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减；

因为$y=e^x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，所以$y=e^{-x}$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，所以$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+e^{-x}$在

$(0,+\infty)$上单调递减.

对于 A、D：因为$\cos B\geq\sin A$，所以$f(\sin A)\geq f(\cos B)$.故 A 错误，D 正确.

对于 B、C：因为$\sin A$、$\sin B$大小不确定，$\cos A$、$\cos B$大小不确定，所以 B、C 不能确定.

故选：D

【点睛】在解三角形中，选择用正弦定理或余弦定理，可以从两方面思考：

(1)从题目给出的条件，边角关系来选择；

(2)从式子结构来选择.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法中不正确的是（　　）

A. 若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角

B. 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$都是非零向量

C. 若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{b}$与$\vec{c}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{c}$共线

D. “$\vec{a}=\vec{b}$”的充要条件是“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}\parallel\vec{b}$”

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用向量的相关概念以及数量积运算的概念进行判断.

【详解】对于 A，若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角也可以为π，不一定是钝角，故 A 不正确；

对于 B，因为$\vec{0}$与任意向量都共线，若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，则$\vec{a}$与$\vec{b}$都是非零向量，故 B 正确；

对于 C，若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{b}$与$\vec{c}$共线，$\vec{b}=\vec{0}$，则$\vec{a}$与$\vec{c}$不一定共线，故 C 不正确；

对于 D，若$\vec{a}=\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$是相等向量，则它们模长相等，方向相同，

若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，它们不一定是相等向量，故 D 不正确.

故选：ACD.

10. 欧拉公式$e^{xi}=\cos x+i\sin x$是由瑞士著名数学家欧拉创立，该公式将指数函数的定义域扩大到复数集，建立了三角函数与指数函数的关联，在复变函数论里面占有非常重要的地位，被誉为数学中的天桥．依据欧拉公式，下列选项中正确的是（　　）

A. $e^{\frac{2\pi}{3}i}$对应的点位于第二象限

B. $e^{\frac{\pi}{2}i}$为纯虚数

C. $\dfrac{e^{\pi i}}{\sqrt{3}+i}$的模长等于$\frac{1}{2}$

D. $e^{\frac{\pi}{6}i}$的共轭复数为$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据欧拉公式结合复数在复平面内对应的点的特征、纯虚数的概念、复数的模长公式、以及共轭复数的概念逐项分析即可得出结论.

【详解】对于 A：$e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

$\therefore e^{\frac{2\pi}{3}i}$在复平面内对应的点为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$位于第二象限，故 A 正确；

对于 B：$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$，$\therefore e^{\frac{\pi}{2}i}$为纯虚数，故 B 正确；

对于 C：$\frac{e^{\pi i}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\cos\pi+i\sin\pi}{\sqrt{3}+i}=\frac{-1}{\sqrt{3}+i}=\frac{-1\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$，

所以$\left|\frac{e^{\pi i}}{\sqrt{3}+i}\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$，故 C 正确；

对于 D：$e^{\frac{\pi}{6}i}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，所以$e^{\frac{\pi}{6}i}$的共轭复数为$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，故 D 错误.

故选：ABC.

11. 三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，下列条件能判断 $\triangle ABC$ 是钝角三角形的有（　　）

A. $a=6,b=5,c=4$

B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2a$

C. $\frac{a-b}{c+b}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}$

D. $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$

【答案】BC

【解析】

【分析】利用正余弦定理逐一判断即可

【详解】A：由$a>b>c$可知$A>B>C$，且$b^2+c^2=41>36=a^2$，所以 A 是锐角，故 A 不能判断；

B：由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-ac\cos B=2a$,得$\cos B<0$，则$B$为钝角，故 B 能判断；

C：由正弦定理$\frac{a-b}{c+b}=\frac{c}{a+b}$，得$b^2+c^2-a^2=-bc$，则$\cos A=-\frac{1}{2}$，$A=\frac{2\pi}{3}$，故 C 能判断；

D：由正弦定理，条件等价于 $\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 B=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

则 $\sin B\sin C=\cos B\cos C$，即 $\cos(B+C)=0$，故 $B+C=\frac{\pi}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{2}$，故 D 不能判断.

故选：BC

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $3b\cos C+3c\cos B=a^2$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $B+C=2A$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 3π

B. 若 $A=\frac{\pi}{4}$，且 $\triangle ABC$ 有两解，则 b 的取值范围为 $\left[3,3\sqrt{2}\right]$

C. 若 $C=2A$，且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 c 的取值范围为 $\left(3\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$

D. 若 $A=2C$，且 $\sin B=2\sin C$，O 为 $\triangle ABC$ 的内心，则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}-3}{4}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据条件 $3b\cos C+3c\cos B=a^2$ 求出 $a=3$.

选项 A：根据条件 $B+C=2A$ 求角 A，根据正弦定理求外接圆的半径，从而求外接圆的面积；

选项 B：由余弦定理得 $9=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，将此式看作关于 c 的二次方程，由题意得此方程有两个正解，求得 b 的取值范围；

选项 C：根据正弦定理把边 c 表示为 $6\cos A$，利用 $\triangle ABC$ 为锐角三角形求角 A 的范围，从而求边 c 的范围；

选项 D：利用正弦定理求出角 C，从而判断出 $\triangle ABC$ 是直角三角形，利用直角三角形内切圆半径公式求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，从而求 $\triangle AOB$ 的面积.

【详解】因为 $3b\cos C+3c\cos B=a^2$，所以由正弦定理，得 $3\sin B\cos C+3\sin C\cos B=a\sin A$，

即 $3\sin\left(B+C\right)=a\sin A$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin\left(B+C\right)=\sin A$，且 $\sin A\neq 0$，所以 $a=3$.

选项 A：若 $B+C=2A$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，所以 $R=\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 $\pi\times\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$，选项 A 正确；