2023-2024学年重庆市高三五月第二次联考数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z=\dfrac{a+i}{1-i}(a\in R, i$ 为虚数单位$)$，若 z 为纯虚数，则 $a=($　　$)$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 设 M，N，U 均为非空集合，且满足 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$，则 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=($　　$)$

A. M　　B. N　　C. $\complement_U M$　　D. $\complement_U N$

3. 我国南宋著名数学家秦九韶提出了由三角形三边求三角形面积的“三斜求积”，设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，面积为 S，则“三斜求积”公式为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}$，若 $a^2\sin C=2\sin A$，$(a+c)^2=6+b^2$，则用“三斜求积”公式求得 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

4. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(\xi<1)=0.6$，则 $P(\xi>-1)=($　　$)$

A. 0.6　　B. 0.4　　C. 0.3　　D. 0.2

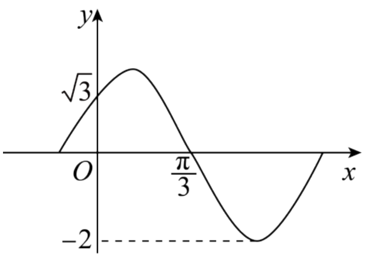
5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=4$，$S_7=56$，则 $a_7=($　　$)$

A. 10　　B. 12　　C. 16　　D. 20

6. 若圆 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 关于直线 $ax+by-12=0$ 对称，动点 P 在直线 $y+b=0$ 上，过点 P 引圆 C 的两条切线 PM、PN，切点分别为 M、N，则直线 MN 恒过定点 Q，点 Q 的坐标为(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(0,0)$　　D. $(0,12)$

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的图象如图所示，将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\theta(\theta>0)$ 个单位，使新函数为偶函数，则 θ 的最小值为.(　　)



A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{12}$　　D. $\dfrac{5\pi}{12}$

8. 设 $a=3^e$，$b=e^\pi$，$c=\pi^3$，则 a、b、c 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$　　D. $c>b>a$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 甲同学投掷骰子 5 次，并请乙同学将向上的点数记录下来，计算出平均数和方差．由于记录遗失，乙同学只记得这五个点数的平均数为 2，方差在区间 $[1.2\ ,\ 2.4]$ 内，则这五个点数(　)

A. 众数可能为 1

B. 中位数可能为 3

C. 一定不会出现 6

D. 出现 2 的次数不会超过两次

10. 设 *m*，*n* 为不同的直线，α，β 为不同的平面，则下列结论中正确的是.(　)

A. 若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

B. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m//n$

C. 若 $m//\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha//\beta$

D. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases} a_n+2(n\text{为奇数}) \\ 3a_n(n\text{为偶数}) \end{cases}$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和为 S_n，若存在正整数 *m*，*k*，使得 $\dfrac{S_{2m}}{S_{2m-1}}=a_k$，则 *m* 的值是(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 圆锥曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线过双曲线的另一个焦点．由此可得，过双曲线上任意一点的切线，平分该点与两焦点连线的夹角．请解决下面问题 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 *C*：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，点 *P* 为 *C* 在第一象限上的点，点 *M* 在 F_1P 延长线上，点 *Q* 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，且 *PQ* 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，则下列正确的是(　)

A. $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$

B. $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2\sqrt{3}$

C. 点 *P* 到 *x* 轴的距离为 $\sqrt{3}$

D. $\angle F_2PM$ 的角平分线所在直线的倾斜角为 150°

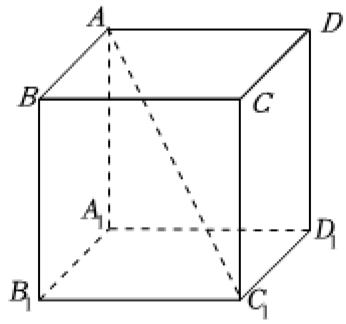
三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 为一组基底，若 $m\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 平行，则实数 $m=$__________.

14. 命题：“$\forall x\in(1,+\infty)$，$x^2-1>0$”的否定是__________ .

15.

16. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，动点P在对角线AC_1上，过点P作垂直于AC_1的平面α记平面α截正方体表面所得截面多边形的面积为y，令$AP=x$，$x\in(0,\sqrt{3})$，当$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，则$y=$__________，函数$y=f(x)$的值域为__________.



四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\sin(A-\dfrac{\pi}{3})\cos(A+\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{4}$，$A<\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求角 A 的大小；

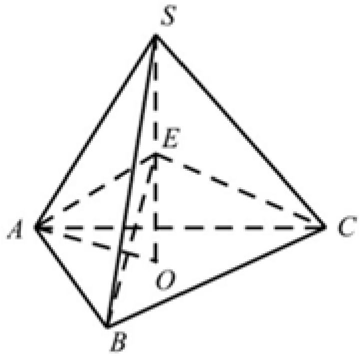
(2) 若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$a=1$，求 b 的取值范围.

18.（本小题 12 分）

如图，在正三棱锥$S-ABC$中，E 是高 SO 上一点，$AO=\dfrac{1}{2}SA$，直线 EA 与底面所成角的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求证：$AE\perp$平面 EBC；

(2) 求三棱锥$E-ABC$外接球的体积.



19.（本小题 12 分）

问题：已知$n\in N^*$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，是否存在数列$\{a_n\}$，满足$S_1=1$，$a_{n+1}\geqslant 1+a_n$，___?若存在，求通项公式a_n;若不存在，说明理由.

在①$a_{n+1}=2(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})$;②$a_n=S_{n-1}+n(n\geqslant 2)$;③$a_{n+1}=2a_n+n-1$这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

20.（本小题 12 分）

奥密克戎$BA.5$变异毒株的潜伏期又缩短了，但具体到个人，感染后潜伏期的长短还是有个体差异的．潜伏期是指已经感染了奥密克戎变异株，但未出现临床症状的和体征的一段时期，奥密克戎潜伏期做核算检测可能为阴性，建议可以多做几次核算检测，有助于明确诊断．某研究机构对某地 1000 名患者进行了调查和统计，得到如下表：

潜伏期：（单位：天）	$[0,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,8]$	$(8,10]$	$(10,12]$	$(12,14]$
人数	80	210	310	250	130	15	5

(1) 求这 1000 名患者的潜伏期的样本平均值$\bar{x}$.

(2) 该传染病的潜伏期受诸多因素的影响，为研究潜伏期与患者年龄的关系，以潜伏期是否超过 6 天为标准进行分层抽样，从上述 1000 名患者中抽取 300 人，得到如下列联表请将列联表补充完整，并根据列联表判断是否有95%的把握认为潜伏期与患者年龄有关.

	潜伏期$\leqslant 6$天	潜伏期>6天	总计
50 岁以上(含50)			150
50 岁以下	85		
总计			300

(3) 为了做好防疫工作，各个部门、单位抓紧将各项细节落到实处，对“确诊”、“疑似”、“无法明确排除”和“确诊密接者”等“四类”人员，强化网格化管理，不落一户、不漏一人．若在排查期间，某小区有 5 人被确认为“确诊患者的密接接触”，现医护人员要对这 5 人进行逐一“单人单管”核酸检测，只要出现一例阳性，则该小区将被划为“封控区”．假设每人被确诊的概率为$p(0<p<1)$且相互独立，若当$p=p_0$时，至少检测了 4 人该小区就被划为“封控区”的概率取得最大值，求p_0.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$

$P(\chi^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

21.（本小题 12 分）

已知离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与 x 轴，y 轴正半轴交于 A，B 两点，作直线 AB 的平行线交椭圆于 C，D 两点.

(1) 若$\triangle AOB$的面积为 1，求椭圆的标准方程；

(2) 在(1)的条件下.

(ⅰ) 记直线 AC，BD 的斜率分别为k_1，k_2，求证：k_1k_2为定值；

(ⅱ) 求$|CD|$的最大值.

22.（本小题 12 分）

定义在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$上的函数$f(x)=(x-m)\sin x$.

(1) 当$m=\dfrac{\pi}{3}$时，求曲线$y=f(x)$在点$(\dfrac{\pi}{3},0)$处的切线方程；

(2) $f(x)$的所有极值点为x_1，x_2，…，x_n，若$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=0$，求 m 的值.

答案和解析

1.【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查复数的有关概念，复数的运算，属于基础题.

根据复数的基本运算和纯虚数定义，即可得到结论.

【解答】

解：$z=\frac{a+i}{1-i}=\frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a-1+(1+a)i}{2}=\frac{a-1}{2}+\frac{1+a}{2}i$，

若 z 为纯虚数，则 $\frac{a-1}{2}=0$ 且 $\frac{1+a}{2}\neq 0$，

解 $a=1$，

故选：C

2.【答案】D

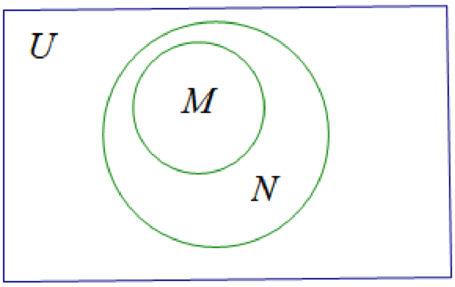
【解析】【分析】

本题考查集合的包含关系以及交集、补集的混合运算，考查 *venn* 图的应用，属于基础题.

作出 *venn* 图，利用图示即可判断.

【解答】

解：因为 M，N，U 均为非空集合，且满足 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$，作出 *venn* 图如下：



由图可知：$\complement_U N\subsetneqq \complement_U M$，所以 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U N$.

故选 D.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查利用正弦定理解三角形，属于基础题.

根据正弦定理由$a^2\sin C=2\sin A$得$ac=2$，则由$(a+c)^2=6+b^2$得$a^2+c^2-b^2=2$，利用公式可得结论.

【解答】

解：根据正弦定理：由$a^2\sin C=2\sin A$得$ac=2$，则由$(a+c)^2=6+b^2$得$a^2+c^2-b^2=2$，

则$\triangle ABC$的面积$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}=\sqrt{\frac{1}{4}(4-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

4.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查了正态分布的对称性，掌握正态分布的对称性是解决正态分布概率的关键，属于基础题.

根据已知条件，结合正态分布的对称性，即可求解.

【解答】

解：$\because$随机变量ξ服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，

$\therefore P(\xi<1)=P(\xi<0)+P(0<\xi<1)=0.5+P(0<\xi<1)$，

解得$P(0<\xi<1)=0.1$，

$\therefore P(-1<\xi<0)=P(0<\xi<1)=0.1$，

$\therefore P(\xi>-1)=P(-1<\xi<0)+P(\xi>0)=0.5+0.1=0.6$.

故选：A.

5.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查等差数列前n项和中的基本量计算，属于基础题.

利用等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式和通项公式列出方程组，求出$a_1=-4$，$d=4$，由此能求出a_7.

【解答】

解：$\because$等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=4$，$S_7=56$，

$$\therefore\begin{cases}a_3=a_1+2d=4\\S_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d=56\end{cases},$$

解得$a_1=-4$，$d=4$，

$\therefore a_7=-4+4\times6=20$.

故选：D.

6.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查直线与圆的位置关系，直线过定点问题，圆的公共弦方程.

根据圆 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 关于直线 $ax+by-12=0$ 对称，可求 b，设点 $P(t,-6)$，则以 PC 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{t}{2})^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$，可得公共弦的方程 $-tx+8y=0$，再求出定点.

【解答】

解：依题可得圆 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 的圆心 $C(0,2)$ 在直线 $ax+by-12=0$ 上，

所以 $2b-12=0$，$b=6$，

设点 $P(t,-6)$，则 $|PC|^2=t^2+(-6-2)^2=t^2+64$，

故以 PC 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{t}{2})^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$，

将 $(x-\frac{t}{2})^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$ 和 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 相减，

即可得直线 MN 的方程为 $-tx+8y=0$，

$\therefore$ 直线 MN 恒过定点 $Q(0,0)$，

故选：C.

7.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质，属于中档题.

由 $f(x)_{\min}=-2$，$f(0)=\sqrt{3}$，$f(\frac{\pi}{3})=0$ 可求得 $f(x)$，由此可得平移后的解析式，根据平移后为偶函数可构造方程 $\frac{\pi}{3}-2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，结合 $\theta>0$ 可求得最小值.

【解答】

解：由图象可知：$f(x)_{\min}=-2=-A$，$\therefore A=2$;

$\because f(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$;

$\because f(\frac{\pi}{3})=2\sin(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3})=0$，$\therefore \frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=\pi$，解得：$\omega=2$，$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$;

$\therefore f(x-\theta)=2\sin(2x-2\theta+\frac{\pi}{3})$ 为偶函数，$\therefore \frac{\pi}{3}-2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

解得：$\theta=-\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，又 $\theta>0$，

$\therefore$ 当 $k=-1$ 时，$\theta_{\min}=\dfrac{5\pi}{12}$.

故选：D.

8.【答案】*D*

【解析】【分析】

本题考查利用导数比较大小，考查学生的逻辑思维能力和运算能力，属中档题.

首先根据指数函数和幂函数的单调性判断出 *a* 与 *c* 的大小关系，然后构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，并利用导数研究其单调性，进而比较 *a* 与 *b* 的大小关系，最后构造函数 $h(x)=x-3\ln x$，并利用导数研究其单调性，进而比较 *c* 与 *b* 的大小关系.

【解答】

解：$\because 3^e<\pi^e<\pi^3$，$\therefore a<c$，

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<e$ 时，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x>e$ 时，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\because e<\pi$，$\therefore \dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，

即 $e^\pi>\pi^e$，而 $\pi^e>3^e$，

$\therefore e^\pi>3^e$，$\therefore b>a$.

设 $h(x)=x-3\ln x$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x-3}{x}$，

当 $0<x<3$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x>3$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

而 $h(3)=3-3\ln 3<0$，$h(4)=4-3\ln 4=\ln\dfrac{e^4}{64}<0$，且 $3<\pi<4$，

$\therefore h(\pi)=\pi-3\ln\pi<0$，

$\therefore \ln b-\ln c=\pi-3\ln\pi<0$，

$\therefore \ln b<\ln c$，

$\therefore b<c$，

综上所述，$a<b<c$.

故选：D.

9.【答案】*ACD*

【解析】【分析】

本题考查数据的平均数、中位数、众数、方差，考查数学运算能力及数据分析能力，属于中档题.

可举例判断 A，B；分析出出现 6 的数据，可判断 C；根据反正法判断 D。

【解答】

解：对于 A，当这 5 个点数分别为 1，1，1，3，4 时，满足平均数为 2，计算方差为1.6，满足题意，故 A 正确；

对于 B，若中位数为 3，则点数最小的组合为 1，1，3，3，3，此时平均数为2.2，所以中位数不可能为 3，故 B 错误；

对于 C，假设这组数据出现点数 6，又因为平均数为 2，则数据为 1，1，1，1，6，可计算方差大于2.4，所以这 5 个点数一定不会出现 6，故 C 正确；

对于 D，假设 2 出现大于等于三次，又平均数为 2，所以这 5 个点数为分别为 1，2，2，2，3，或 2，2，2，2，2，计算方差分别为0.4，0，均不满足题意，所以出现 2 的次数不会超过两次，D 正确.

故选 ACD.

10.【答案】BD

【解析】【分析】

本题考查了线面、面面平行的性质定理和判定定理，熟练的掌握定理是关键，属于基础题.

利用面面平行、面面垂直的判定定理和线面垂直、线面平行的性质定理对四个选项分别分析解答.

【解答】

解：对于 A 选项，若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$或 m，n 异面或 m，n 相交，故 A 错误；

对于 B 选项，若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m // n$，故 B 正确；

对于 C 选项，若$m//\alpha, m\subset\beta$，则$\alpha//\beta$或α与β相交.故 C 错误;

对于 D 选项，若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$，又$n\perp\beta$，则有$\alpha\perp\beta.D$选项正确.

故本题选：$BD.$

11.【答案】AB

【解析】【分析】

本题考查了等差数列及等比数列的求和公式，属中档题.

由已知可得数列$\{a_n\}$的奇数项为以 1 为首项，2 为公差的等差数列，偶数项为以 2 为首项，3 为公比的等比数列，然后结合等差数列及等比数列的求和公式求解即可.