

浙南名校 2024 届高三高考 3 月模拟试卷数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

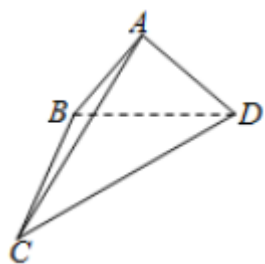
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2$ ($t \in R$) 有公共点，则 $t(4 - t)$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{32}{9}$ D. $\frac{32}{7}$

2. 如图，四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰直角三角形， $AB = \sqrt{2}$ ， $\angle BAD = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ，且二面角

$A - BD - C$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ，若四面体 $ABCD$ 的顶点都在球 O 上，则球 O 的表面积为 ()



- A. $\frac{22\pi}{3}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2c$. 点 A 为双曲线 C 的右顶点，若点 A 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}c$ ，则双曲线 C 的离心率是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

4. 泰山有“五岳之首”“天下第一山”之称，登泰山的路线有四条：红门盘道徒步线路，桃花峪登山线路，天外村汽车登山线路，天烛峰登山线路. 甲、乙、丙三人在聊起自己登泰山的线路时，发现三人走的线路均不同，且均没有走天外村汽车登山线路，三人向其他旅友进行如下陈述：

甲：我走红门盘道徒步线路，乙走桃花峪登山线路；

乙：甲走桃花峪登山线路，丙走红门盘道徒步线路；

丙：甲走天烛峰登山线路，乙走红门盘道徒步线路；

事实上，甲、乙、丙三人的陈述都只对一半，根据以上信息，可判断下面说法正确的是 ()

- A. 甲走桃花峪登山线路 B. 乙走红门盘道徒步线路
C. 丙走桃花峪登山线路 D. 甲走天烛峰登山线路

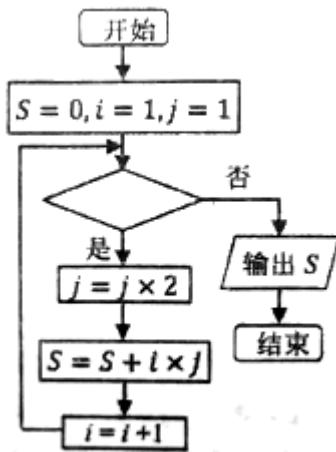
5. $(x - \frac{1}{x} + 1)^5$ 展开项中的常数项为

- A. 1 B. 11 C. -19 D. 51

6. 若 $z = 1 - i + \frac{2}{i}$, 则 z 的虚部是

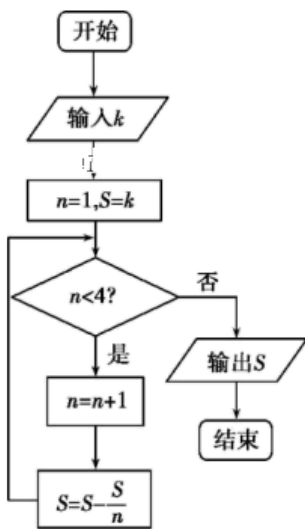
- A. 3 B. -3 C. 3i D. -3i

7. 如图所示程序框图, 若判断框内为“ $i < 4$ ”, 则输出 $S = (\quad)$



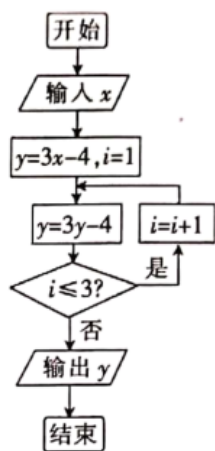
- A. 2 B. 10 C. 34 D. 98

8. 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题：“今有器中米，不知其数，前人取半，中人三分取一，后人四分取一，余米一斗五升(注 一斗为十升).问，米几何？”下图是解决该问题的程序框图，执行该程序框图，若输出的 $S=15$ (单位：升)，则输入的 k 的值为 ()



- A. 45 B. 60 C. 75 D. 100

9. 明代数学家程大位（1533~1606年），有感于当时筹算方法的不便，用其毕生心血写出《算法统宗》，可谓集成计算的鼻祖。如图所示的程序框图的算法思路源于其著作中的“李白沽酒”问题。执行该程序框图，若输出的 y 的值为2，则输入的 x 的值为（ ）



- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{56}{27}$ C. 2 D. $\frac{164}{81}$

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $2+a_5=a_6+a_3$ ，则 $S_7=$ （ ）

- A. 28 B. 14 C. 7 D. 2

11. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\}$ ， $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x - 1, x \in A\}$ ，则 $A \cup B =$ （ ）

- A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$

12. 已知函数 $f(x) = 4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$ ，若函数 $F(x) = f(x) - 3$ 的所有零点依次记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，且

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ ，则 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n =$ （ ）

- A. $\frac{50\pi}{3}$ B. 21π C. $\frac{100\pi}{3}$ D. 42π

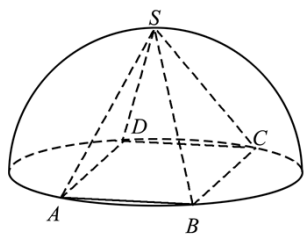
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$ ，函数 $f(x) = e^{|x|} a_{n+1} - (2a_n + 1)\cos x$ 在 \mathbb{R} 上有唯一零点，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

14. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，过 F 作直线与 C 相交于 P, Q 两点，且 Q 在第一象限，若 $\overline{2PF} = \overline{FQ}$ ，则直线 PQ 的斜率是_____.

15. 已知椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$ ， $M(\sqrt{2}, 0)$ ，若椭圆 C 上存在点 N 使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形（ O 为原点），则椭圆 C 的离心率为_____.

16. 如图, 半球内有一内接正四棱锥 $S-ABCD$, 该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 则该半球的体积为_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, P 为 AB

中点.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和点 P 的轨迹 C_2 的极坐标方程;

(2) 若 $|AB| \cdot |OP| = \sqrt{3}$, 求 α 的值.

18. (12 分) 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$.

(I) 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值;

(II) 证明: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{2}{ab}$.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 边上一点, $\angle BAM = 45^\circ$, $\cos \angle AMC = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin B$;

(2) 若 $MC = \frac{1}{2}BM$, $AC = 4$, 求 MC .

20. (12 分) 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = 1 + t \sin \alpha, \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin \theta, \\ y = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \end{cases}$ (θ 为参

数).

(1) 求 C_1 与 C_2 的普通方程;

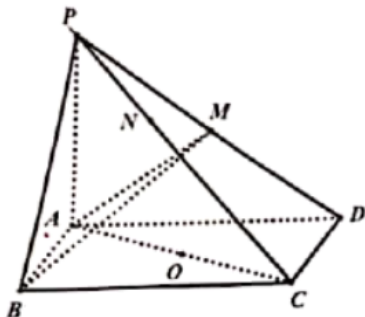
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{2}$, 求 $\sin \alpha$ 的值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$.

(1) 若 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$ 在 $x = x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$;

(2) 若对于任意 $k \in (-\infty, 1)$, 直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 都有唯一公共点, 求实数 b 的取值范围.

22. (10分) 中国古代数学经典《数书九章》中, 将底面为矩形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为“阳马”, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为“鳖臑”. 在如图所示的阳马 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = 2$, $AB = \sqrt{2}$, 以 AC 的中点 O 为球心, AC 为直径的球面交 PD 于 M (异于点 D), 交 PC 于 N (异于点 C).



(1) 证明: $AM \perp$ 平面 PCD , 并判断四面体 $MCDA$ 是否是鳖臑, 若是, 写出它每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;

(2) 求直线 ON 与平面 ACM 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 表示圆和直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 有公共点, 得到 $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$, 再利用二次函数的性质求解.

【详解】

因为 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 表示圆,

所以 $2t - t^2 > 0$, 解得 $0 < t < 2$,

因为直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 有公共点,

所以圆心到直线的距离 $d \leq r$,

$$\text{即 } \frac{|t|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2t - t^2},$$

$$\text{解得 } 0 \leq t \leq \frac{4}{3},$$

$$\text{此时 } 0 \leq t \leq \frac{4}{3},$$

因为 $f(t) = t(4-t) = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$, 在 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ 递增,

$$\text{所以 } t(4-t) \text{ 的最大值 } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查圆的方程, 直线与圆的位置关系以及二次函数的性质, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题.

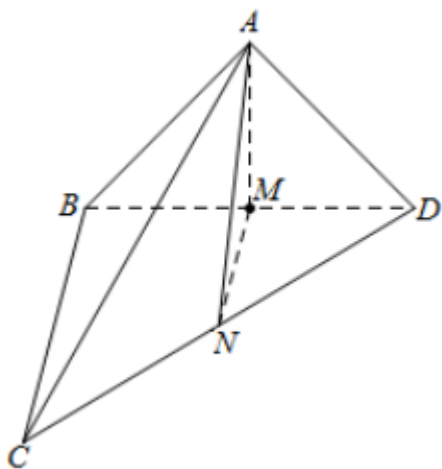
2、B

【解析】

分别取 BD 、 CD 的中点 M 、 N , 连接 AM 、 MN 、 AN , 利用二面角的定义转化二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AMN = \frac{2\pi}{3}$, 然后分别过点 M 作平面 ABD 的垂线与过点 N 作平面 BCD 的垂线交于点 O , 在 $Rt\triangle OMN$ 中计算出 OM , 再利用勾股定理计算出 OA , 即可得出球 O 的半径, 最后利用球体的表面积公式可得出答案.

【详解】

如下图所示,



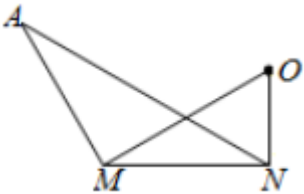
分别取 BD 、 CD 的中点 M 、 N , 连接 AM 、 MN 、 AN ,

由于 $\triangle ABD$ 是以 $\angle BAD$ 为直角等腰直角三角形, M 为 BD 的中点, $\therefore AM \perp BD$,

$\angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ，且 M 、 N 分别为 BD 、 CD 的中点，所以， $MN \parallel BC$ ，所以， $MN \perp BD$ ，所以二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AMN = \frac{2\pi}{3}$ ，

由 $AB = AD = \sqrt{2}$ ，则 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2$ ，且 $BC = 2$ ，所以， $AM = \frac{1}{2}BD = 1$ ， $MN = \frac{1}{2}BC = 1$ ，

$\triangle ABD$ 是以 $\angle BAD$ 为直角的等腰直角三角形，所以， $\triangle ABD$ 的外心为点 M ，同理可知， $\triangle BCD$ 的外心为点 N ，分别过点 M 作平面 ABD 的垂线与过点 N 作平面 BCD 的垂线交于点 O ，则点 O 在平面 AMN 内，如下图所示，



由图形可知， $\angle OMN = \angle AMN - \angle AMO = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，

在 $Rt\triangle OMN$ 中， $\frac{MN}{OM} = \cos \angle OMN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore OM = \frac{MN}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以， $OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ，

所以，球 O 的半径为 $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ，因此，球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28\pi}{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查球体的表面积，考查二面角的定义，解决本题的关键在于找出球心的位置，同时考查了计算能力，属于中等题。

3、A

【解析】

由点到直线距离公式建立 a, b, c 的等式，变形后可求得离心率。

【详解】

由题意 $A(a, 0)$ ，一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ， $\therefore d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}c$ ，

$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$ ，即 $\frac{a^2(c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$ ， $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$ ， $e = \sqrt{2}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，掌握渐近线方程与点到直线距离公式是解题基础。

4、D

【解析】

甲乙丙三人陈述中都提到了甲的路线，由题意知这三句中一定有一个是正确的另外两个错误的，再分情况讨论即可。

【详解】

若甲走的红门盘道徒步线路，则乙、丙描述中的甲的去向均错误，又三人的陈述都只对一半，则乙丙的另外两句话“丙走红门盘道徒步线路”，“乙走红门盘道徒步线路”正确，与“三人走的线路均不同”矛盾。

故甲的另一句“乙走桃花峪登山线路”正确，故丙的“乙走红门盘道徒步线路”错误，“甲走天烛峰登山线路”正确。乙的话中“甲走桃花峪登山线路”错误，“丙走红门盘道徒步线路”正确。

综上所述，甲走天烛峰登山线路，乙走桃花峪登山线路，丙走红门盘道徒步线路

故选：D

【点睛】

本题主要考查了判断与推理的问题，重点是找到三人中都提到的内容进行分类讨论，属于基础题型。

5、B

【解析】

展开式中的每一项是由每个括号中各出一项组成的，所以可分成三种情况。

【详解】

展开式中的项为常数项，有3种情况：

(1) 5个括号都出1，即 $T = 1$ ；

(2) 两个括号出 x ，两个括号出 $(-\frac{1}{x})$ ，一个括号出1，即 $T = C_5^2 \cdot x^2 \cdot C_3^2 \cdot (-\frac{1}{x})^2 \cdot 1 = 30$ ；

(3) 一个括号出 x ，一个括号出 $(-\frac{1}{x})$ ，三个括号出1，即 $T = C_5^1 \cdot x \cdot C_4^1 \cdot (-\frac{1}{x}) \cdot 1 = -20$ ；

所以展开项中的常数项为 $T = 1 + 30 - 20 = 11$ ，故选 B。

【点睛】

本题考查二项式定理知识的生成过程，考查定理的本质，即展开式中每一项是由每个括号各出一项相乘组合而成的。

6、B

【解析】

因为 $z = 1 - i - 2i = 1 - 3i$ ，所以 z 的虚部是 -3 。故选 B。

7、C

【解析】

由题意，逐步分析循环中各变量的值的变化情况，即可得解.

【详解】

由题意运行程序可得：

$$i < 4, j = 1 \times 2 = 2, s = 0 + 1 \times 2 = 2, i = 1 + 1 = 2;$$

$$i < 4, j = 2 \times 2 = 4, s = 2 + 2 \times 4 = 10, i = 2 + 1 = 3;$$

$$i < 4, j = 4 \times 2 = 8, s = 10 + 3 \times 8 = 34, i = 3 + 1 = 4;$$

$i < 4$ 不成立，此时输出 $s = 34$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了程序框图，只需在理解程序框图的前提下细心计算即可，属于基础题.

8、B

【解析】

根据程序框图中程序的功能，可以列方程计算.

【详解】

$$\text{由题意 } S \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 15, S = 60.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图，读懂程序的功能是解题关键.

9、C

【解析】

根据程序框图依次计算得到答案.

【详解】

$$y = 3x - 4, i = 1; y = 3y - 4 = 9x - 16, i = 2; y = 3y - 4 = 27x - 52, i = 3;$$

$$y = 3y - 4 = 81x - 160, i = 4; y = 3y - 4 = 243x - 484, \text{此时不满足 } i \leq 3, \text{跳出循环,}$$

输出结果为 $243x - 484$ ，由题意 $y = 243x - 484 = 2$ ，得 $x = 2$.

故选：C

【点睛】

本题考查了程序框图的计算，意在考查学生的理解能力和计算能力.

10、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/465033043142012004>