医药数理统计方法

第二章 抽样分布

主讲：陈锦燕

第二节
抽样分布及概率、临界值计算

任务一：计算正态分布的样本均值$\bar{X}$落在某范围的概率

一、样本均值的分布

定理 3.2-1 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，则对其样本均值 $\bar{x}$ 有

$$\sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

即样本均值 $\bar{X}$ 的抽样分布仍为正态分布，且

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\bar{X}$，将样本均值标准化后，即有

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

例3.2-1

从正态总体 $N(1,4)$中抽取容量为 16 的样本。试求样本均

值 $\overline{x}$

落在区间(0, 2)上的概率。

解：　因为μ=1，σ^2=4，n=16，则有

$$u=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{x}-1}{1/2}\sim N($$

$$\frac{\overline{x}-1}{1/2}<2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=0.$$

$$p\{0<\overline{x}<2\}=F(2)-$$

任务二：计算大样本的样本均值$\bar{X}$落在某范围的概率

中心极限定理

定理 （中心极限定理 **central limit theorem**）

若总体 X 的均值μ和方差σ^2有限，则当样本容量 n 充分大（$n\geq 30$）时，不管总体服从什么分布，其样本均值 $\bar{x}$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \overset{近似}{\sim} N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

均值是μ，方差ﾒ

$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

例3.2-2

从均值μ=18和方差σ^2=16的总体中随机抽取样本容量为64的样本，试求样本均值$\boxed{\overline{x}}$

间的概率。

例3.2-2解答

解：因 n=64>30 为大样本，则由中心极限定理，其样

本均值 $\bar{x}$

$\frac{\sigma}{n}$

近似服从均值是 18、方差是

布，即

$$) - F(17) = \Phi\left(\frac{19-18}{1/2}\right) - \Phi\left(\frac{17-18}{1/2}\right)$$

$$) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9545$$

二、χ^2分布

定义 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独

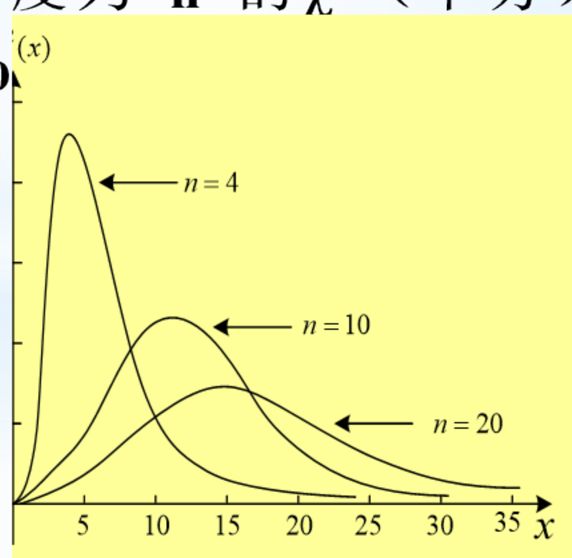
从标准正态分布 **N(0,1)**，则称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

服从自由度为 **n** 的χ^2（卡方）分布（**Chi-squ**

distributio



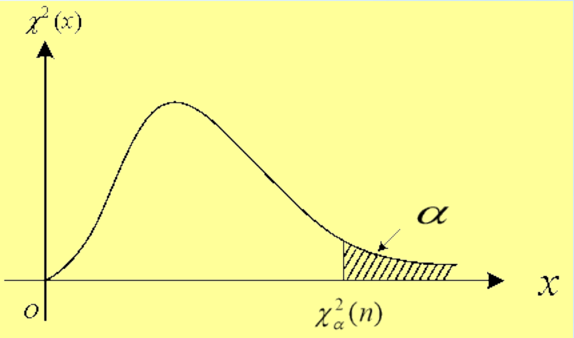
。

χ^2分布上侧α临界值（查表法）

本书附表 **5** 中编制的χ^2 分布表列出了上侧α临界值

$\chi^2_\alpha(n)$，（$n\leq 45$），满足

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$$



对于 $n>45$，近似地有

$$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(u_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$$

其中 u_α是标准正态分布 $N(0,1)$的上侧 α 临界值。

求$\chi^2_{0.05}(10)$ 、$\chi^2_{0.05}(30)$、$\chi^2_{0.05}(50)$的值。

χ^2分布的概率值和临界值（分位数）Excel函数计算

1、用Excel函数CHIDIST(x, n)计算χ^2分布累积概率值

* $P\{\chi^2(n) > x\}$=CHIDIST(x, n)　；

2、用Excel函数CHIINV(α, n)可计算χ^2分布的上侧α分位数

* $\chi^2_\alpha(n)$= CHIINV(α, n)
* 其中n为χ^2分布的自由度。

例3.2-3 用Excel函数计算

1、已知随机变量$x^2 \sim x^2(10)$,

（1）P{x^2>25}=;

（2）分位数$x^2{}_{0.05}$（10）、$\chi^2{}_{0.05}$(50）。

例3.2-3解答

解答(1) $P\{x^2>25\}$=CHIDIST(25, 10)=0. 053455.

(2) $x^2{}_{0.05}(10)$=CHIINV(0. 05, 10)=18. 30704.

$\chi^2{}_{0.05}(50)$=CHIINV(0. 05, 50)=67. 50480655.

当n>45时， $\chi^2{}_{0.05}(50) \approx \frac{1}{2}(\mu_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

$=\frac{1}{2}(1.64+\sqrt{2\times 50-1})^2$

=67. 163

三、*t*分布的概率和临界值计算

定义　设随机变量 $X \sim N(0,1)$ ，随机变量 $Y \sim \chi^2(n)$，**X** 与 **Y** 相互独立，则称随机

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 ***n*** 的 t 分布或学生分布，记为 $t \sim t(n)$