



数 学 文 化



教师简介

薛有才，教授，山西临猗人。主要研究方向为：计算数学、数学教育、科学技术哲学。主要讲授课程为：大学数学、高等代数、解析几何、概率与统计、数值分析、信息与编码、数学文化学、宏观经济学等。





课程简介

数学文化主要包含的内容有：**对数学的认识、数学的思想与方法、数学文化史、数学文化的价值、数学史上著名事件的意义分析、著名数学家及其影响；等。**

重点在**数学的思想与方法及数学的文化价值。**

主要参考资料

- 《数学文化学》，郑毓信等著，四川教育出版社。
- 《数学文化》，张楚廷编，高等教育出版社。
- 《数学哲学与数学文化》，黄秦安著，陕西师范大学出版社。
- 《数学的思想、方法和应用 》，张顺燕著，北京大学出版社。

- 
- 文理交融，全面发展，
 - 会当凌绝顶，
 - 一览众山小！
- 



序言——数学与数学文化





章节目录录

1. 数学的基本特征

2. 什么是数学

3. 数学是人类文化最重要的部分



1. 数学的基本特征


数学最基本的特征：

- (1) 抽象性
- (2) 逻辑演绎性
- (3) 应用的广泛性
- (4) 语言性
- (5) 教育的深刻性

(1) 数学的抽象性


提起数学的**抽象性**，每个人都有深刻的体会。例如，数字“3”，不是“3个人”、“3个苹果”等具体物件的数量，而是**完全脱离了这些具体事物的抽象的“数”**。

数学中研究的**形**——三角形、四边形等，也不是三角板、长方形纸片或足球场等具体形状，而是**与这些具体事物完全无关的、抽象的“几何图形”**。



数学中的等式“ $3=3$ ”，也是完全抽象的。如果我们说，3公斤干枯的杨树叶等于3公斤黄金，大家一定会发出一片嘘声。但是“ $3=3$ ”并没有告诉我们左边的3是黄金还是杨树叶。当然，我们更不用说今天的代数数论、抽象代数学、拓扑学等现代数学分支了。

为什么数学必须是抽象的？它具体点可以么？事实上，数学的抽象性主要是由于数学研究的对象。数学是模式的科学，它研究事物及其相互间量的关系。它必须抛开事物具体的物理特征，而仅研究事物所具有的量的关系。还是让我们通过例子来说明吧。



例1 七桥问题

18世纪时,帕瑞格河从哥尼斯堡(现属于俄罗斯)城中流过,河中有两个岛,把该城分为四个部分,河上7座桥,将两岸和岛连接,如图1所示。城里的人从桥上走来走去,有人便提出这样一个疑问:一个人能否依次走过所有的桥,而每座桥只走一次?如果可以的话,这个人能否还回到原来出发地?这就是有名的“七桥问题”。许多人都在试验,每天都有许多人在想法“不重复地走遍”所有这七座桥。但是,没有人能够完成这一“壮举”。这个问题有答案么?

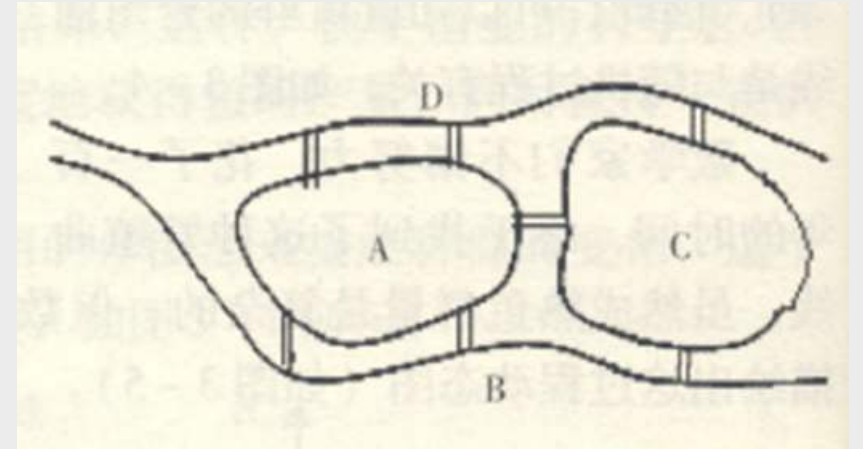


图1

欧拉把问题抽象为：把城市的4个部分不断缩小，最后都缩成一点，而把连接两部分陆地的桥，设想成连接这两点的一条线，于是得到一个“图”，如图2（或图3）所示。于是，原来的问题就变为：这个图能否一笔画成而不重复？如果可以的话，起点是否与终点重合？

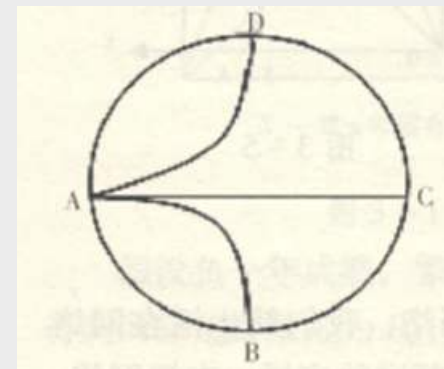


图2

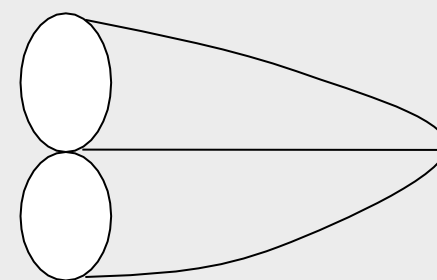


图3

几个定义

由彼此相连接的顶点和边组成的部分图形(子图), 称为图的一条“**链**”或“**路**”。如果一条路首尾相连, 则称为**回路**, 或**环**。

一个图, 如果每两个顶点都有且只有一条边相连, 则称之为“**完全图**”。如果图 G 的一条链, 包含了 G 的所有顶点和边, 则称之为“**欧拉链**”; 特别地, 如果一条回路包含 G 的所有顶点和边, 则称之为“**欧拉回路**”。于是, **七桥问题**就变成: **图2**是否为一个欧拉链? 或者, 它是否为一个欧拉回路?

几个定义

为此，需要关于顶点的几个概念。

一个顶点所聚集的边的数目，称为该顶点的“**度**”。顶点的度是奇数，称为“**奇顶点**”；顶点的度是偶数，称为“**偶顶点**”。


关于一个图是否为欧拉链或者欧拉回路，有一个简单的判定准则。我们把它写成定理的形式：

定理

定理1 (欧拉回路判定准则) 一个连通图 (图中任何两个顶点都能够用一条链来连接) 是欧拉回路的充要条件是它的奇顶点的个数是0或2。


由此可以得到图是否可以一笔画的判定准则:

定理2 (一笔画判定准则) 如果一个图上的奇顶点的个数是0或2, 该图就可以一笔画, 否则不能一笔画。特别地, 若奇顶点的个数为0, 即图上没有奇顶点, 则该图不仅可以一笔画, 而且起点还能与终点重合。



据此，对于上述七桥问题很容易得出结论：因为图上的4个点都是奇顶点，所以它不是欧拉回路，也不是欧拉链，所以它不能一笔画。从而知道哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的。

这就是数学中的抽象过程，陆地再大再广，在所研究的问题中作用并不大，它们与一个点的作用相当。桥也不管长短曲直与宽阔，完全可以用一条曲线代替。抽象的结果，走路问题变成了一笔画问题。



数学抽象方面的特点

第一，在抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切。

第二，数学的抽象是经过一系列阶段而产生的；抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。数学中许多概念是在抽象概念之上的抽象。例如，群的概念。


第三，数学抽象的特殊性在于数学对象是借助于明确的定义建构的；在严格的数学研究中，我们都只能依据相应的定义和推理规则进行，而不能求助于直观。例如，“虚单位 i ”就是人们为了满足运算而构造出来的。

(2) 数学的逻辑演绎性


获取知识有很多方法，**经验的方法、归纳的方法、类比的方法。**

远古时期的数学公式由经验积累而成。例如，古人对许多图形求面积的方法就是在多次反复体验的基础上得出来的。

类比的方法也在很多场合运用，如数学以平面的性质类比得出立体空间的性质。当然这些类比得到的结果还必须进行证明。



使用得更为广泛的另一种推理方法是**归纳法**。归纳过程的本质在于：**在有限的几个例子的基础上概括出一些总是正确的结论**。归纳法在科学实验中是基本的推理方法。尽管由归纳推理得出的结论，似乎被事实证明是正确的，但还不能说这些结论就确定无疑。归纳推理的方式还有其它的限制。比如我们不能采用归纳方法将一项未经试验的法律对社会的作用作出结论。



演绎法：

数学中还有一种更重要的获取知识的方法，这就是古希腊人发展的**演绎法**。所谓**演绎法**是一种运用理性思维形式从一些普遍性结论或一般性原理中推导出个别性结论的论证方法。例如，在数学上，从原始概念和公理出发，运用演绎思维得出一些定理，然后再依据这些定理以及定义等继续进行推理论证，得出一个比较完整的数学理论系统。欧几里得几何学是世界上第一个演绎推理系统，它从几个不证自明的公理与一些基本定义出发，运用演绎推理方法，得到一系列几何（数学）定理，形成一个完整的公理化体系。


演绎法：

演绎法有很多优点：

首先，如果前提确定无疑则结论也确定无疑；


其次，与试验相反，即使不利用或缺乏昂贵的仪器，演绎也能进行下去；

再次，在行动之前，用演绎推理我们就已经知道结论。



演绎法具有的这些优点，使得它有时成了唯一有效的方法。例如，计算天文距离不可能使用直尺，而且试验也只能使我们局限在很小的时空范围内，但是演绎推理却可以对无限的时空进行研究。

我们说数学是精确的，如“ $3+5=8$ ”，是精确的，不是近似的，估计的；欧氏几何定理“三角形三内角之和等于 180° ”，是从几何公理和定理，经过逻辑推导出来的。数学的精确性，来源于数学的演绎推理。



例2 抽屉原理的应用

设有10本书，共3类，文学类（A类），史学类（B类）、数学类（C类），证明至少有一类书有4本或4本以上。这个问题很容易通过反证法证明。

假设A类、B类、C类的书都不超过3本，那么所有的书加起来就不超过9本。这与有10本书相矛盾。所以，至少有一类书超过3本，即4本或4本以上。

这个问题相当于：有10件物品，装在3个抽屉里，那么有一个抽屉至少有4件物品。这是一个具体的抽屉原理问题，看似很简单，却很有用。

从古希腊开始，演绎的方法过去一直是数学中“唯一”被承认的方法，归纳的方法几乎被赶出了数学的家园。但是在近年，我国数学家吴文俊院士、张景中院士等却发展了一种“例证法”——用演绎来支持归纳。

例如，证明恒等式： $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ 。我们用 $x=1$ 代入上式，两边都是0；用 $x=2$ 代入上式，两边都是1；用 $x=3$ 代入上式，两边都是4。这就已经证明了上式一定是恒等式。这是因为如果它不是恒等式，它一定是一个二次或一次代数方程，那么它最多只有两个根。现在 $x=1, 2, 3$ 都是根，说明它不是方程而只能是恒等式。

(3) 数学应用的广泛性

华罗庚：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，
地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。

哈雷彗星的发现

古时人们认为彗星的出现是不祥之兆，直到17世纪，英国天文学家哈雷开始计算彗星轨道时，发现1682年、1607年和1531年出现的彗星有相似的轨道，他判断这三颗彗星其实是同一颗彗星，并预言它将在1758年底或1759年初再次出现。1759年，这颗彗星果然出现了。虽然哈雷已在此前的1742年逝世，但为了纪念他，这颗彗星称为“哈雷彗星”。

哈雷彗星的回归周期为76年，最近一次的回归是在1986年；下一次回归是在2062年。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/466232120200010142>