专题 3-2 一轮压轴小题导数技巧：求参

目录

热点题型归纳

【题型一】求参 1：基础讨论型

【典例分析】

若对任意 $x\in$（0，$+\infty$），不等式 $e^2x-m\ln(2m)-m\ln x\geq 0$ 恒成立，则实数 m 的最大值（　　）

A．$\sqrt{e}$　　　B．e　　　C．$2e$　　　D．e^2

【答案】B

【分析】令 $f(x)=e^2x-m\ln(2m)-m\ln x$，求导 $f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{m}{x}$，由 $x\to 0$ 时, $f'(x)<0$，

$f'(m)=2e^{2m}-1>0$，存在 $x_0\in(0,m)$，有 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)_{\min}=f(x_0)$，根据不等式 $e^2x-m\ln(2m)-m\ln x\geq 0$ 恒成立，则 $f(x)_{\min}=f(x_0)\geq 0$，整理转化为 $1-2x_0\ln 4-4x_0\ln x_0-4x_0^2\geq 0$，令 $h(x)=1-2x\ln 4-4x\ln x-4x^2$，用导数法得到 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，再根据 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，解得 $x_0\in(0,\dfrac{1}{2}]$，再由 $m=2x_0e^{2x_0}$ 求解.

【详解】令 $f(x)=e^{2x}-m\ln(2m)-m\ln x$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-\frac{m}{x}$，要 $\ln(2m)$ 有意义，

则 $m>0$，当 $x\to 0$ 时，$f'(x)<0$，$f'(m)=2e^{2m}-1>0$ 所以存在 $x_0\in(0,m)$，有 $f'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以

$f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{2x_0}-m\ln(2m)-m\ln x_0$，

又 $f'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{m}{x_0}=0$，所以 $m=2x_0e^{2x_0}$，$\ln(2m)=\ln 4x_0e^{2x_0}=\ln 4+\ln x_0+2x_0$，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{2x_0}-m\ln(2m)-m\ln x_0=e^{2x_0}-2x_0e^{2x_0}(\ln 4+\ln x_0+2x_0)-2x_0e^{2x_0}\ln x_0$，

$=e^{2x_0}(1-2x_0\ln 4-4x_0\ln x_0-4x_0^2)$，因为不等式 $e^{2x}-m\ln(2m)-m\ln x\geq 0$ 恒成立，

所以 $1-2x_0\ln 4-4x_0\ln x_0-4x_0^2\geq 0$ 令 $h(x)=1-2x\ln 4-4x\ln x-4x^2$，

$h'(x)=-4\ln x-8x-4-2\ln 4<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，又 $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

当 $h(x)\geq 0$ 时，$x\in(0,\frac{1}{2}]$，即 $x_0\in(0,\frac{1}{2}]$，又 $m=2x_0e^{2x_0}$，所以 $m'=2e^{2x_0}+4x_0e^{2x_0}>0$，

所以 $m=2x_0e^{2x_0}$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时是增函数，所以 $m=2x_0e^{2x_0}\leq 2\times\frac{1}{2}\times e^{2\times\frac{1}{2}}=e$，

所以实数 m 的最大值是 e.故选：B

【提分秘籍】

基本规律

无论大题小题，分类讨论求参是导数基础，也是复习训练重点之一：

1.移项含参讨论是所有导数讨论题的基础，也是学生日常训练的重点。

2.讨论点的寻找是关键。

3.一些题型，可以适当的借助端点值来“压缩”参数的讨论范围

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$x\in(0,+\infty)$，若 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是

A．$[e,+\infty)$　　B．$(e,+\infty)$　　C．$\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$　　D．$\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$

【答案】C

【分析】对函数 $y=f(x)$ 求导得出 $f'(x)=(x+1)(e^x-ax)$，由题意得出函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极小值点，然后对参数 a 分类讨论，在 $a\leq e$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递增，无最小值；在 $a>e$ 时，根据函数 $y=f(x)$ 的单调性得出 $f(x)_{极小值}\leq f(0)$，从而求出实数 a 的取值范围.

【详解】$\because f(x)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$\therefore f'(x)=(x+1)e^x-ax^2-ax=(x+1)(e^x-ax)$，

构造函数 $g(x)=e^x-ax$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leq 1$ 时，对任意的 $x>0$，$g'(x)>0$，则函数 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时，$g(x)>g(0)=1>0$，则对任意的 $x>0$，$f'(x)>0$.

此时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；

②当 $a>1$ 时，解方程 $g'(x)=e^x-a=0$，得 $x=\ln a$.

当 $0<x<\ln a$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$g'(x)>0$，

此时，$g(x)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$.

（i）当$1-\ln a\geq 0$时，即当$1<a\leq e$时，则对任意的$x>0$，$f'(x)\geq 0$，

此时，函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，无最小值；

（ii）当$1-\ln a<0$时，即当$a>e$时，$\therefore g(0)=1$，当$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，

由零点存在定理可知，存在$t_1\in(0,\ln a)$和$t_2\in(\ln a,+\infty)$，使得$g(t_1)=g(t_2)=0$，

即$e^{t_1}-at_1=e^{t_2}-at_2=0$，且当$0<x<t_1$和$x>t_2$时，$g(x)>0$，此时，$f'(x)>0$；

当$t_1<x<t_2$时，$g(x)<0$，此时，$f'(x)<0$.

所以，函数$y=f(x)$在$x=t_1$处取得极大值，在$x=t_2$取得极小值，

由题意可知，$f(x)_{极小值}=f(t_2)\leq f(0)=1$，

$\therefore f(t_2)=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}at_2^3-\frac{1}{2}at_2^2=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}-\frac{1}{2}t_2e^{t_2}+1=1--\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}+\frac{1}{2}t_2e^{t_2}\leq 1$，

可得$t_2\geq\frac{3}{2}$，又$e^{t_2}-at_2=0$，可得$a=\frac{e^{t_2}}{t_2}$，构造函数$h(x)=\frac{e^x}{x}$，其中$x\geq\frac{3}{2}$，

则$h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$，此时，函数$y=h(x)$在区间$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，

当$x\geq\frac{3}{2}$时，则$h(x)\geq h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$，$\therefore a\geq\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$.

因此，实数a的取值范围是$\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$，故选C.

2.若关于x的不等式$e^{x-a}\geq\ln x+a$对一切正实数x恒成立，则实数a的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　**B.** $(-\infty,e]$　　**C.** $(-\infty,1]$　　**D.** $(-\infty,2]$

【答案】C

【分析】

构造函数$f(x)=e^{x-a}-lnx-a(x>0)$，将原不等式转化为求解函数$f(x)$的最小值，通过导数判断函数的单调性研究函数的最值，得到$e^{x_0-a}-lnx_0-a...0$，再利用基本不等式进行求解即可.

【详解】

解：设$f(x)=e^{x-a}-lnx-a(x>0)$，则$f(x)...0$对一切正实数x恒成立，即$f(x)_{min}...0$，

由$f'(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x}$，令$h(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x}$，则$h'(x)=e^{x-a}+\frac{1}{x^2}>0$恒成立，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

当$x\to 0$时，$h(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$，则在$(0,+\infty)$上，存在x_0使得$h(x_0)=0$，

当$0<x<x_0$时，$h(x)<0$，当$x>x_0$时，$h(x)>0$，故函数$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0$，$+\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)$在$x=x_0$处取得最小值为$f(x_0)=e^{x_0-a}-lnx_0-a...0$，

因为$e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$，即$x_0-a=-lnx_0$，所以$\frac{1}{x_0}+x_0-a-a...0$恒成立，即$2a„ x_0+\frac{1}{x_0}$，

又$x_0+\frac{1}{x_0}...2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}=2$，当且仅当$x_0=\frac{1}{x_0}$，即$x_0=1$时取等号，故$2a„ 2$，所以$a„ 1$. 故选：C.

3.已知函数$f(x)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$x\in(0,+\infty)$，若$f(x)$有最小值，则实数$a$的取值范围是

A. $[e,+\infty)$　　**B.** $(e,+\infty)$　　**C.** $\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$　　**D.** $\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$

【答案】C

【分析】

对函数 $y=f(x)$ 求导得出 $f'(x)=(x+1)(e^x-ax)$，由题意得出函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极小值点，然后对参数 a 分类讨论，在 $a\le e$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递增，无最小值；在 $a>e$ 时，根据函数 $y=f(x)$ 的单调性得出 $f(x)_{极小值}\le f(0)$，从而求出实数 a 的取值范围.

【详解】

$\because f(x)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$\therefore f'(x)=(x+1)e^x-ax^2-ax=(x+1)(e^x-ax)$，

构造函数 $g(x)=e^x-ax$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=e^x-a$.

①当 $a\le 1$ 时，对任意的 $x>0$，$g'(x)>0$，则函数 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时，$g(x)>g(0)=1>0$，则对任意的 $x>0$，$f'(x)>0$.

此时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；

②当 $a>1$ 时，解方程 $g'(x)=e^x-a=0$，得 $x=\ln a$.

当 $0<x<\ln a$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$g'(x)>0$，

此时，$g(x)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$.

（i）当 $1-\ln a\ge 0$ 时，即当 $1<a\le e$ 时，则对任意的 $x>0$，$f'(x)\ge 0$，

此时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；

（ii）当 $1-\ln a<0$ 时，即当 $a>e$ 时，$\therefore g(0)=1$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

由零点存在定理可知，存在 $t_1\in(0,\ln a)$ 和 $t_2\in(\ln a,+\infty)$，使得 $g(t_1)=g(t_2)=0$，

即 $e^{t_1}-at_1=e^{t_2}-at_2=0$，且当 $0<x<t_1$ 和 $x>t_2$ 时，$g(x)>0$，此时，$f'(x)>0$；

当 $t_1<x<t_2$ 时，$g(x)<0$，此时，$f'(x)<0$.

所以，函数 $y=f(x)$ 在 $x=t_1$ 处取得极大值，在 $x=t_2$ 取得极小值，

由题意可知，$f(x)_{极小值}=f(t_2)\le f(0)=1$，

$\therefore f(t_2)=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}at_2^3-\frac{1}{2}at_2^2=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}-\frac{1}{2}t_2e^{t_2}+1=1-\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}+\frac{1}{2}t_2e^{t_2}\le 1$，

可得 $t_2\ge\frac{3}{2}$，又 $e^{t_2}-at_2=0$，可得 $a=\frac{e^{t_2}}{t_2}$，构造函数 $h(x)=\frac{e^x}{x}$，其中 $x\ge\frac{3}{2}$，

则 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$，此时，函数 $y=h(x)$ 在区间 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

当 $x\ge\frac{3}{2}$ 时，则 $h(x)\ge h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$，$\therefore a\ge\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$.

因此，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$，故选 C.

【题型二】求参 2：分离参数型

【典例分析】

已知不等式 $xe^{x+1}-x\ge\ln x+2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 m 取值范围为（　　）

A．$m\le-\frac{1}{2}$　　B．$m\ge-\frac{1}{2}$　　C．$m\le-2$　　D．$m>-2$

【答案】A

【分析】将问题转化为 $xe^{x+1}-x-\ln x\ge 2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，构造函数 $f(x)=xe^{x+1}-x-\ln x$，进而通过导数方法求出函数的最小值，即可得到答案.

【详解】不等式 $xe^{x+1}-x\ge \ln x+2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $xe^{x+1}-x-\ln x\ge 2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $f(x)=xe^{x+1}-x-\ln x(x>0)$，$f'(x)=(x+1)e^{x+1}-1-\dfrac{1}{x}=(x+1)\left(e^{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)$，而 $g(x)=e^{x+1}-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增（增+增），且 $\begin{cases} g(1)=e^2-1>0 \\ g\left(\dfrac{1}{16}\right)=e^{\frac{17}{16}}-16<0 \end{cases}$，所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{1}{16},1\right)$（$x_0$ 唯一），使得 $g(x_0)=e^{x_0+1}-\dfrac{1}{x_0}=0$.

则 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0+1}-x_0-\ln x_0$

根据 $g(x_0)=e^{x_0+1}-\dfrac{1}{x_0}=0\Rightarrow\begin{cases} x_0e^{x_0+1}=1 \\ \ln x_0=-(x_0+1) \end{cases}$，

所以 $f(x)_{\min}=1-x_0+(x_0+1)=2$，所以 $2\ge 2m+3\Rightarrow m\le -\dfrac{1}{2}$.

故选：A.

【提分秘籍】

基本规律

分离参数是属于“暴力计算”型方法，**分离参数：将参数提取到单独的一侧，然后通过求解函数的最值来求解参数的取值范围。**

1. 分离参数思维简单，不需过多思考；

2. 参变分离原则是容易分离且构造的新函数不能太过复杂

3. 缺点是，首先得能分参，其次求导计算可能十分麻烦，甚至需要二阶，三阶。。等等求导。

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^4}-k\ln x$，当 $x>1$ 时，不等式 $f(x)\ge x+1$ 恒成立，则 k 的取值范围是

A. $(-\infty,-e]$　　B. $(-\infty,-4]$　　C. $(-\infty,-e^2]$　　D. $(-\infty,0]$

【答案】B

【分析】参变分离，构造函数 $g(x)=e^x-x-1$，研究单调性，得到 $e^x\ge x+1$，再构造 $h(x)=x-4\ln x$，研究其单调性，得到 $h(x)=0$ 有解，进而得到 $e^{x-4\ln x}\ge x-4\ln x+1$，求出结果.

【详解】因为 $x>1$，所以 $\ln x>0$，则当 $x>1$ 时，不等式 $f(x)\ge x+1$ 恒成立等价于

$k\le\dfrac{\frac{e^x}{x^4}-x-1}{\ln x}=\dfrac{e^{x-4\ln x}-x-1}{\ln x}$. 设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$. 当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 则 $g(x)\ge g(0)=0$，即 $e^x-x-1\ge 0$，即 $e^x\ge x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立. 设 $h(x)=x-4\ln x$，则 $h'(x)=1-\dfrac{4}{x}=\dfrac{x-4}{x}$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>4$；由 $h'(x)<0$，得 $0<x<4$. 则 $h(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $h(4)=4-4\ln 4<0$，$h(e^4)=e^4-16>0$，所以 $h(x)=0$ 有解，则 $e^{x-4\ln x}\ge x-4\ln x+1$，当且仅当 $x-4\ln x=0$ 时，等号成立，从而

$\dfrac{e^{x-4\ln x}-x-1}{\ln x}\ge\dfrac{x-4\ln x+1-x-1}{\ln x}=-4$，故 $k\le -4$.

故选：B

2.关于 x 的方程 $(k-7)x^2+4\ln x-\frac{1}{x^2}+k=0$ 有两个不等实根，则实数 k 的取值范围是__________.

【答案】$(4,7)$

【详解】

由 $(k-7)x^2+4\ln x-\frac{1}{x^2}+k=0$ 得 $k=7+\frac{\frac{1}{x^2}-4\ln x-7}{x^2+1}, h(x)=\frac{\frac{1}{x^2}-4\ln x-7}{x^2+1}$

$h'(x)=\frac{10x-\frac{8}{x}-\frac{2}{x^2}+8x\ln x}{(x^2+1)^2}$，可得在 $(0,1)$ 上 $h(x)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 上 $h(x)$ 递减，

$x\to 0, f(x)\to+\infty, x\to+\infty, f(x)\to 7$，$h(x)_{\min}=h(1)<k<7$，即 $4<k<7$，故答案为 $4<k<7$.

3.已知函数 $f(x)=x\cdot e^x-1, g(x)=\ln x+kx$,且 $f(x)\ge g(x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,则实数 k 的最大值为______.

【答案】1

【解析】

由题意可得 $k\le e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,令 $h(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$, $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$,易知存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使 $h'(x_0)=0$，且 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是减函数，在 $(x_0,+\infty)$ 上是增函数,即函数的最小值为 $h(x_0)$,又 $h(1)=e-1>1$, $h\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}+e-e=e^{\frac{1}{e}}>1$,因此 $h(x_0)\ge 1$,所以 $k\le 1$，即实数 k 的最大值为 1.

【题型三】求参 3：零点型

【典例分析】

已知函数 $f(x)=2ae^x-e^ax^2$ 至多有 2 个不同的零点，则实数 a 的最大值为

A．0　　B．1　　C．2　　D．e

【答案】C

【分析】先将零点问题转化为两函数交点问题，构造函数，研究其单调性，极值，画出函数图象，从而得到 $\frac{2a}{e^a}=0$ 或 $\frac{2a}{e^a}\ge\frac{4}{e^2}$，再次构造关于 a 的函数 $h(a)=\frac{2a}{e^a}$，研究其单调性，解出不等式，求出数 a 的最大值.

【详解】令 $f(x)=2ae^x-e^ax^2=0$，得到 $\frac{x^2}{e^x}=\frac{2a}{e^a}$，

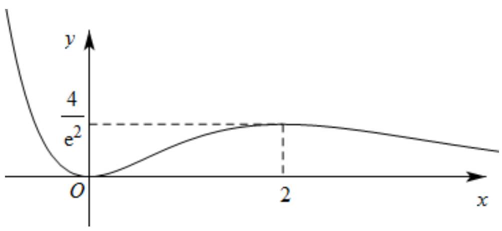
函数 $f(x)=2ae^x-e^ax^2$ 至多有 2 个不同的零点，等价于 $\frac{x^2}{e^x}=\frac{2a}{e^a}$ 至多有两个不同的根，

即函数 $y=\frac{x^2}{e^x}$ 与 $y=\frac{2a}{e^a}$ 至多有 2 个不同的交点令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$，

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $x=0$ 与 $x=2$ 为函数 $g(x)$ 的极值点，且 $g(0)=0, g(2)=\frac{4}{e^2}$，且 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}\ge 0$ 在 R 上恒成立，

画出 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 的图象如下：



有图可知：$\frac{2a}{e^a}=0$ 或 $\frac{2a}{e^a}\ge\frac{4}{e^2}$ 时，符合题意，其中 $\frac{2a}{e^a}=0$，解得：$a=0$。设 $h(a)=\frac{2a}{e^a}$，则 $h'(a)=\frac{2-2a}{e^a}$，

当 $a<1$ 时，$h'(a)>0$，当 $a>1$ 时，$h'(a)<0$，

所以 $h(a)=\frac{2a}{e^a}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，由 $\frac{2a}{e^a}\ge\frac{4}{e^2}$ 可得：$h(a)\ge h(2)$，所以 $a\le 2$，

综上：实数 a 的最大值为 2 故选：C

【提分秘籍】

基本规律

（1）确定零点的个数问题：可利用数形结合的办法判断交点个数，如果函数较为复杂，可用导数知识确定极值点和单调区间从而确定其大致图象；

（2）方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题，可参变分离，转化为求函数的值域问题处理.可以通过构造函数的方法，把问题转化为研究构造的函数的零点问题；

（3）利用导数研究函数零点或方程根，通常有三种思路：①利用最值或极值研究；②利用数形结合思想研究；③构造辅助函数研究.

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ a\ln x,x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 有 5 个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-e,0)$　　　B．$\left(-\frac{1}{e},0\right)$　　　C．$(-\infty,-e)$　　　D．$\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$

【答案】C

【分析】通过分析得到当 $x>0$ 时，$-x=a\ln x$ 要有 2 个根，参变分离后构造函数 $g(x)=-\frac{x}{\ln x}$，研究其单调性和极值，数形结合求出实数 a 的取值范围.

【详解】$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称，且 $f(0)=0$，要想 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 有 5 个零点，

则当 $x>0$ 时，$-x=a\ln x$ 要有 2 个根，结合对称性可知 $x<0$ 时也有 2 个零点，故满足有 5 个零点，

当 $x=1$ 时，$-1=0$，不合题意；

当 $x\ne 1$ 时，此时 $a=-\frac{x}{\ln x}$ 令 $g(x)=-\frac{x}{\ln x}$，定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$，

令 $g'(x)>0$ 得：$0<x<1$，$1<x<e$，令 $g'(x)<0$ 得：$x>e$，

故 $g(x)=-\frac{x}{\ln x}$ 在 $(0,1),(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\frac{x}{\ln x}>0$ 恒成立，

$g(x)=-\frac{x}{\ln x}$ 在 $x=e$ 处取得极大值，其中 $g(e)=-e$，

故 $a\in(-\infty,-e)$，此时与 $g(x)=-\frac{x}{\ln x}$ 有两个交点.故选：C

2.若函数 $f(x)=x+e^{x+b}+b(x+x^2-x\ln x)$ 有零点，则 b 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　　B．$[-1,0)$

C．$(-\infty,0)$　　　D．$(0,+\infty)$

【答案】C

【分析】将零点问题转化为两个函数交点问题，构造函数，考察函数的极值及变化速率的关系可得.

【详解】易知，当 $b=0$ 时，函数 $f(x)>0$ 恒成立，不满足题意

因为 $f(x)=x\left[1+\frac{e^{x+b}}{x}+b(1+x-\ln x)\right]$

所以函数 $f\left(x\right)=x+e^{x+b}+b\left(x+x^2-x\ln x\right)$ 有零点，有零点，则方程 $x\left[1+\frac{e^{x+b}}{x}+b(1+x-\ln x)\right]=0$ 有解，即方程 $\frac{e^{x+b}}{x}+1=b(\ln x-x-1)$ 有解

即函数 $g(x)=\frac{e^{x+b}}{x}+1$ 与 $h(x)=b(\ln x-x-1)$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有交点

$g'(x)=\frac{(x-1)e^{x+b}}{x^2}$，易知 $x>1$ 时 $g'(x)>0$，$0<x<1$ 时 $g'(x)<0$，故 $g(x)_{\min}=g(1)=e^{1+b}+1$，

$h'(x)=\frac{b(1-x)}{x}$，当 $b>0$ 时，易知 $x>1$ 时 $h(x)<0$，$0<x<1$ 时 $h(x)>0$，故 $h(x)_{\max}=h(1)=-2b$，因为 $e^{1+b}+1>-2b$ 恒成立，所以此时无交点；

当 $b<0$ 时，易知 $x>1$ 时 $h(x)>0$，$0<x<1$ 时 $h(x)<0$，故 $h(x)_{\min}=h(1)=-2b$，

易知，当 $x\to+\infty$ 时，必有 $g(x)>h(x)$，所以当 $e^{1+b}+1\le-2b$ 时，两函数图象一定有交点.

令 $u(b)=e^{1+b}+2b+1$，因为 $u'(b)=e^{1+b}+2>0$，故函数 $u(b)$ 单调递增，且 $u(-1)=e^0-2+1=0$，所以，当 $b\le-1$ 时，$e^{1+b}+2b+1\le0$，即 $e^{1+b}+1\le-2b$ 成立.

当 $-1<b<0$，$0<x<1$ 时，$|h'(x)|-|g'(x)|=\frac{(x-1)e^{x+b}}{x^2}-\frac{b(1-x)}{x}=\frac{(x-1)(e^{x+b}+bx)}{x^2}$

当 $x\to0$ 时，$|h'(x)|-|g'(x)|\to-\infty$，此时 $e^{1+b}+1>-2b$，故两函数图象在 $(0,1)$ 上有交点.

综上，b 的取值范围为 $(-\infty,0)$ 故选：C

3. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-4ax+4,x\le0\\ \ln x+2ax,x>0\end{cases}$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2e},0\right)$　　B．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-\frac{1}{e},0\right)$

C．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-\frac{1}{2e},0\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{2e},0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【答案】C

【分析】分类讨论，当 $a\ge0$ 时利用函数的单调性可得函数 $f\left(x\right)$ 至多有一个零点；当 $a<0$ 时，分别讨论函数 $f\left(x\right)=\ln x+2ax$，$x\in(0,+\infty)$，$f\left(x\right)=x^2-4ax+4$，$x\in(-\infty,0]$，的零点情况，进而可得 $\begin{cases}a<-\frac{1}{2e}\\ a<-1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2e}\\ a=-1\end{cases}$，或 $\begin{cases}-\frac{1}{2e}<a<0\\ -1<a<0\end{cases}$，即求.

【详解】当 $a\ge0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-4ax+4$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，又 $f\left(0\right)=4$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,0]$ 上没有零点，

$f\left(x\right)=\ln x+2ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，

故当 $a\ge0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上至多有一个零点，不合题意；

当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)=\ln x+2ax$，$x\in(0,+\infty)$

$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+2a=\frac{2ax+1}{x}$，令 $f'\left(x\right)=0$，得 $x=-\frac{1}{2a}$，

$\therefore x\in(0,-\frac{1}{2a})$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；$x\in(-\frac{1}{2a},\infty)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

$\therefore x=-\frac{1}{2a}$时，函数$f(x)$有最大值，$f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1$，

$\therefore$当$f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1<0$，即$a<-\frac{1}{2\mathrm{e}}$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点，

当$f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1=0$，即$a=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有一个零点，

当$f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1>0$，即$-\frac{1}{2e}<a<0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点；

对于$f(x)=x^2-4ax+4$，$x\in(-\infty,0]$，对称轴为$x=2a$，函数$f(x)=x^2-4ax+4$在$(-\infty,0]$上最小值为$f(2a)=(2a)^2-4a\cdot 2a+4=4-4a^2$，又$f(0)=4$，

$\therefore$当$f(2a)>0$，即$-1<a<0$，函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上没有零点，

当$f(2a)=0$，即$a=-1$，函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上有一个零点，

当$f(2a)<0$，即$a<-1$，函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上有两个零点；

所以要使函数$f(x)$恰有两个零点则$\begin{cases}a<-\frac{1}{2\mathrm{e}}\\a<-1\end{cases}$，或$\begin{cases}a=-\frac{1}{2\mathrm{e}}\\a=-1\end{cases}$，或$\begin{cases}-\frac{1}{2\mathrm{e}}<a<0\\-1<a<0\end{cases}$，

解得$a<-1$或$-\frac{1}{2e}<a<0$；

综上，实数a的取值范围是$a<-1$或$-\frac{1}{2e}<a<0$.故选：C.

【题型四】求参4：构造函数型

【典例分析】

对于任意x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，当$x_2>x_1$时，恒有$a\ln\frac{x_2}{x_1}<2(x_2-x_1)$成立；则实数$a$的取值范围是（　）

A. $(-\infty,0]$　　**B.** $(-\infty,1]$　　**C.** $(-\infty,2]$　　**D.** $(-\infty,3]$

【答案】C

【分析】

对于任意x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，当$x_2>x_1$时，恒有$a\ln\frac{x_2}{x_1}<2(x_2-x_1)$成立，可得$a\ln x_2-2x_2<a\ln x_1-2x_1$成立，令$f(x)=a\ln x-2x$，可知函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，求导，令$f'(x)\le 0$恒成立，即可求出$a$的取值范围.

【详解】对于任意x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，当$x_2>x_1$时，恒有$a\ln\frac{x_2}{x_1}<2(x_2-x_1)$成立，

即$a\ln x_2-2x_2<a\ln x_1-2x_1$成立，

令$f(x)=a\ln x-2x$，$\therefore f(x_2)<f(x_1)$，

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f'(x)=\frac{a}{x}-2\le 0$在$[1,+\infty)$恒成立，$\therefore a\le 2x$在$[1,+\infty)$恒成立，

$\because$当$x\ge 1$，$2x\ge 2$，$\therefore$实数a的取值范围为$(-\infty,2]$，故选C.

【提分秘籍】

基本规律

一些复杂结构，需要先构造合理的函数形式再求导研究，以达到“化繁为简”的目的

【变式演练】

1.对于任意 x_1， $x_2\in[1,+\infty)$，当 $x_2>x_1$ 时，恒有 $a\ln\frac{x_2}{x_1}<2(x_2-x_1)$ 成立；则实数 a 的取值范围是（　）

A． $(-\infty,0]$　　**B．** $(-\infty,1]$　　**C．** $(-\infty,2]$　　**D．** $(-\infty,3]$

【答案】C

【分析】

对于任意 x_1， $x_2\in\left[1,+\infty\right)$，当 $x_2>x_1$ 时，恒有 $a\ln\frac{x_2}{x_1}<2\left(x_2-x_1\right)$ 成立，可得 $a\ln x_2-2x_2<a\ln x_1-2x_1$ 成立，令 $f\left(x\right)=a\ln x-2x$，可知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，求导，令 $f'\left(x\right)\le 0$ 恒成立，即可求出 a 的取值范围.

【详解】

对于任意 x_1， $x_2\in\left[1,+\infty\right)$，当 $x_2>x_1$ 时，恒有 $a\ln\frac{x_2}{x_1}<2\left(x_2-x_1\right)$ 成立，

即 $a\ln x_2-2x_2<a\ln x_1-2x_1$ 成立，

令 $f\left(x\right)=a\ln x-2x$，$\therefore f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore f'\left(x\right)=\frac{a}{x}-2\le 0$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 恒成立，$\therefore a\le 2x$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 恒成立，

$\because$当 $x\ge 1$， $2x\ge 2$，$\therefore$实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,2\right]$，故选 C.

2.已知变量 $x_1,x_2\in\left(0,m\right)$ (m>0)，且 $x_1<x_2$，若 $x_1^{x_2}<x_2^{x_1}$ 恒成立，则 m 的最大值________.

【答案】e

【详解】不等式两边同时取对数得 $\ln x_1^{x_2}<\ln x_2^{x_1}$，即 $x_2lnx_1<x_1lnx_2$，又 $x_1,x_2\in\left(0,m\right)$ 即 $\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{\ln x_2}{x_2}$ 成立，

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,m)$，$\because x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 在（0，m）上为增函数，

函数的导数 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由 $f'(x)>0$ 得 $1-lnx>0$ 得 $lnx<1$，得 $0<x<e$，

即函数 $f(x)$ 的最大增区间为（0，e），则 m 的最大值为 e 故答案为：e

3.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-2ax$， $g\left(x\right)=\frac{4ax^2}{\ln x}-2x$，若方程 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ 恰有三个不相等的实根，则 a 的取值范围为（　　）

A． $\left(0,e\right]$　**B．** $\left(0,\frac{1}{2e}\right]$　**C．** $\left(e,+\infty\right)$　**D．** $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

【答案】B

【详解】由题意知方程 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ 上恰有三个不相等的实根，即

$\ln x-2ax=\frac{4ax^2}{\ln x}-2x$，①.

因为$x>0$，①式两边同除以x，得$\frac{\ln x}{x}-2a=\frac{4ax}{\ln x}-2$.所以方程$\frac{\ln x}{x}-2a-\frac{4ax}{\ln x}+2=0$有三个不等的正实根.

记$t(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则上述方程转化为$t(x)-2a-\frac{4a}{t(x)}+2=0$.

即$[t(x)+2][t(x)-2a]=0$，所以$t(x)=-2$或$t(x)=2a$.因为$t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$x\in(0,1)\cup(1,e)$时，$t'(x)>0$，所以$t(x)$在$(0,1)$，$(1,e)$上单调递增，且$x\to 0$时，$t(x)\to-\infty$.当$x\in(e,+\infty)$时，$t'(x)<0$，$t(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减，且$x\to+\infty$时，$t(x)\to 0$.所以当$x=e$时，$t(x)$取最大值$\frac{1}{e}$，当$t(x)=-2$，有一根.

所以$t(x)=2a$恰有两个不相等的实根，所以$0<a<\frac{1}{2e}$.故选：B.

【题型五】求参5："分函最值"基础型

【典例分析】

已知$f(x)=xe^x+\frac{1}{e}+e^2$，$g(x)=-(x+1)^2+a\ln(x+1)$，若存在$x_1\in R$，$x_2\in(-1,+\infty)$，使得$f(x_1)\le g(x_2)$成立，则实数$a$的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,0)\cup(2e^2,+\infty)$

【分析】根据存在$x_1\in R$，$x_2\in(-1,+\infty)$，使得$f(x_1)\le g(x_2)$成立，只需$f(x)_{\min}\le g(x)_{\max}$，先利用导数法求得$f(x)_{\min}=f(-1)=e^2$，再令$t=x+1(t>0)$，将求$g(x)$的最大值转化为$h(t)=-t^2+a\ln t$在$t\in(0,+\infty)$中的最大值，求导$h'(t)=-2t+\frac{a}{t}$，然后分$a<0$，$a=0$和$a>0$三种情况讨论求解.

【详解】因为存在$x_1\in R$，$x_2\in(-1,+\infty)$，使得$f(x_1)\le g(x_2)$成立，所以只需$f(x)_{\min}\le g(x)_{\max}$，

因为$f'(x)=(x+1)e^x$，当$x<-1$时，$f'(x)<0$当$x>-1$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$中单调递减，在$(-1,+\infty)$中单调递增，所以$f(x)_{\min}=f(-1)=e^2$，

令$t=x+1(t>0)$，则$g(x)$在$(-1,+\infty)$中的最大值，也就是$h(t)=-t^2+a\ln t$在$t\in(0,+\infty)$中的最大值.

因为$h'(t)=-2t+\frac{a}{t}$

（1）当$a<0$时，$h'(t)<0$，$y=h(t)$在$t\in(0,+\infty)$中递减，且t趋近于0时，$h(t)$趋近于$+\infty$，满足题意；

（2）当$a=0$时，$h(t)=-t^2$，$h(t)_{\max}<0<e^2$，不合题意舍去；

（3）当$a>0$时，由$h'(t)>0$可得$0<t<\sqrt{\frac{a}{2}}$，$h'(t)<0$可得$t>\sqrt{\frac{a}{2}}$，

$\therefore h(t)$在$\left(0,\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$中单调递增，在$\left(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty\right)$中单调递减，$\therefore h(t)_{\max}=h\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{\frac{a}{2}}$，

$\therefore$只需$-\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{\frac{a}{2}}>e^2$，即$-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}>e^2$，令$\lambda=\frac{a}{2}$，则$\lambda\ln\lambda-\lambda>e^2$.

由$\mu(x)=x\ln x-x$可知$\mu(e^2)=e^2$，$\mu'(x)=\ln x$，$\therefore\mu(x)$在$(0,1)$中单调递减，在$(1,+\infty)$中单调递增，

又$x\in(0,1)$时，$\mu(x)<0$，$\therefore\mu(x)>e^2$的解为$x>e^2$，即$-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}>e^2$的解为$a>2e^2$.

综上所述，所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(2e^2,+\infty)$.故答案为：$(-\infty,0)\cup(2e^2,+\infty)$

【提分秘籍】

基本规律

此类函数，多采用两函数“取最值法”。一般地，已知函数 $y=f(x),x\in[a,b]$，$y=g(x),x\in[c,d]$

（1）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\forall x_2\in[c,d]$，总有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max}<g(x_2)_{\min}$；

（2）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max}<g(x_2)_{\max}$；

（3）若 $\exists x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\min}<g(x_2)_{\min}$；

（4）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集.

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+2,x<0\\-x+3,\ x\geq 0\end{cases}$，$g(x)=kx+5-2k(k>0)$，若对任意的 $x_1\in[-1，1]$，总存在 $x_2\in[-1，1]$ 使得 $f(x_1)\leq g(x_2)$ 成立，则实数 k 的取值范围为（　　）

A．$(0,2]$　　B．$(0,\frac{2}{3}]$　　C．$(0,3]$　　D．$(1,2]$

【答案】A

【解析】计算得到 $f(x)_{\max}=f(-1)=f(0)=3$，$g(x)_{\max}=g(1)=5-k$ 根据题意得到 $5-k\geq 3$，解得答案.

【详解】$f(x)=\begin{cases}-x^3+2,x<0\\-x+3,\ x\geq 0\end{cases}$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=f(0)=3$

$g(x)=kx+5-2k(k>0)$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$g(x)_{\max}=g(1)=5-k$

根据题意知：$5-k\geq 3\therefore k\leq 2$，故 $k\in(0,2]$

故选：A

2.已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$g(x)=1-x$，若对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，总存在 $x_2\in[m,n]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，以下对 m、n 的取值范围判断正确的是（　　）.

A．$m\geq 2$　　B．$m>2$　　C．$n\geq 2$　　D．$n>2$

【答案】C

【解析】由题意，对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，总存在 $x_2\in[m,n]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，可转化为 $f(x)$ 的最小值大于 $x\in[m,n]$ 时 $g(x)$ 的最小值，求出 $x\in[m,n]$ 时，$g(x)_{\min}=1-n$，利用 $f(x)$ 的单调性解得 $f(x)>-1$，计算即可求出答案.

【详解】由题意，对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，总存在 $x_2\in[m,n]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，

可转化为 $f(x)$ 的最小值大于 $x\in[m,n]$ 时 $g(x)$ 的最小值，

当 $x\in[m,n]$ 时，易知 $g(x)_{\min}=1-n$，$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$，

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增，$f(x)>1-\dfrac{2}{0+1}=-1$，所以 $-1\geq 1-n$，解得 $n\geq 2$.故选：C

3.已知 $f(x)=\ln x-\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}$，$g(x)=-x^2-2ax+4$，若对任意的 $x_1\in(0,2]$，存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，则 a 的取值范围是(　　)

A. $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right]$　　D. $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right]$

【答案】B

【解析】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}=\frac{-x^2+4x-3}{4x^2}=-\frac{(x-1)(x-3)}{4x^2}$，

易知当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $[1,2]$ 上递增，

故 $f(x)_{min}=f(1)=\frac{1}{2}$.

对于二次函数 $g(x)=)=-x^2-2ax+4$，该函数开口向下，所以其在区间 $[1,2]$ 上的最小值在端点处取得，

所以要使对 $\forall x_1\in(0,2]$，$\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，只需 $f(x_1)_{min}\geq g(x_2)_{min}$，即 $\frac{1}{2}\geq g(1)$ 或

$\frac{1}{2}\geq g(2)$ ，所以

$\frac{1}{2}\geq -1-2a+4$ 或 $\frac{1}{2}\geq -4-4a+4$.

解得 $a\geq -\frac{1}{8}$. 故选 B.

【题型六】求参 6：“分函值域子集”型

【典例分析】

已知函数 $f(x)=x^2-2x$，$g(x)=ax+2(a>0)$，若对任意 $x_1\in[-1,2]$，总存在 $x_2\in[-1,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},3\right]$

C. $(0,3]$　　D. $[3,+\infty)$

【答案】D

【分析】根据二次函数的性质求出 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 时的值域为 $[-1,3]$，再根据一次 $g(x)=ax+2(a>0)$ 为增函数，求出 $g(x_2)\in[2-a,2a+2]$，由题意得 $f(x)$ 值域是 $g(x)$ 值域的子集，从而得到实数 a 的取值范围.

【详解】解：$\because$ 函数 $f(x)=x^2-2x$ 的图象是开口向上的抛物线，且关于直线 $x=1$ 对称

$\therefore x_1\in[-1,2]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-1$，最大值为 $f(-1)=3$，

可得 $f(x_1)$ 值域为 $[-1,3]$

又 $\because g(x)=ax+2(a>0)$，$x_2\in[-1,2]$，

$\therefore g(x)$ 为单调增函数，$g(x_2)$ 值域为 $[g(-1),g(2)]$

即 $g(x_2)\in[2-a,2a+2]$

$\because \forall x_1\in[-1,2]$，$\exists x_2\in[-1,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，

$\therefore \begin{cases}2-a\leq -1\\ 2a+2\geq 3\end{cases}\Rightarrow a\geq 3$

故选：D.

【提分秘籍】

基本规律

解题的关键是将问题转化为值域的包含关系问题

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{4},x<1\\ \log_2(x+3),x\geq 1\end{cases}$，$g(x)=ax^2+2x+a-1$，若对任意的 $x_1\in R$，总存在实数 $x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left[0,\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[0,\frac{5}{4}\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$

【答案】A

【分析】探讨函数 $f(x)$ 的性质并求出其值域，再把问题转化为 $f(x)$ 的值域包含于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域，然后分类讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域即可得解.

【详解】依题意，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{4}$ 是减函数，$\forall x<1$，$f(x)>f(1)=\frac{1}{4}$，

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)=\log_2(x+3)$ 是增函数，$\forall x\geq 1$，$f(x)\geq f(1)=\log_2 4=2$，于是得 $f(x)$ 的值域是 $(\frac{1}{4},+\infty)$，

"对任意的 $x_1\in R$，总存在实数 $x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立"等价于"函数 $f(x)$ 的值域是函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上值域的子集"，

①当 $a=0$ 时，$g(x)=2x-1$，此时 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上值域为 $(-1,+\infty)$，有 $(\frac{1}{4},+\infty)\subseteq(-1,+\infty)$，则 $a=0$，

②当 $a<0$ 时，$g(x)=ax^2+2x+a-1$ 图象对称轴 $x=-\frac{1}{a}$，在 $x>0$ 时，当 $x=-\frac{1}{a}$ 时，$g(x)_{\max}=-\frac{1}{a}+a-1$，即 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,-\frac{1}{a}+a-1]$，

显然 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 不可能包含于 $(-\infty,-\frac{1}{a}+a-1]$，无解，

③当 $a>0$ 时，函数 $g(x)=ax^2+2x+a-1$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $(a-1,+\infty)$，则 $(\frac{1}{4},+\infty)\subseteq(a-1,+\infty)$，于是得 $a-1\leq\frac{1}{4}$，解得 $a\leq\frac{5}{4}$，即 $0<a\leq\frac{5}{4}$，

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[0,\frac{5}{4}\right]$.故选：A

2.已知幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $g(x)=2^x-t$，任意 $x_1\in[1,6)$ 时，总存在 $x_2\in[1,6)$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 t 的取值范围是（　　）

A．$1<t<28$　　B．$1\leq t\leq 28$　　C．$t>28$ 或 $t<1$　　D．$t\geq 28$ 或 $t\leq 1$

【答案】B

【解析】先根据幂函数定义解得 m，再根据单调性进行取舍，根据任意存在性将问题转化为对应函数值域包含问题，最后根据函数单调性确定对应函数值域，根据值域包含关系列不等式解得结果.

【详解】由题意 $\begin{cases}(m-1)^2=1\\ m^2-4m+2>0\end{cases}$，则 $m=0$，即 $f(x)=x^2$，

当 $x_1\in[1,6)$ 时，$f(x_1)\in[1,36)$，

又当 $x_2\in[1,6)$ 时，$g(x_2)\in[2-t,64-t)$，

$\therefore\begin{cases}2-t\leq 1\\ 64-t\geq 36\end{cases}$，解得 $1\leq t\leq 28$，

故选：B.

3 已知函数 $f(x)=2^{x-2}$，$g(x)=\begin{cases}a\sin x+2,x\geq 0\\ x^2+2a,\quad x<0\end{cases}(a\in R)$，若对任意 $x_1\in[1,+\infty)$，总存在 $x_2\in\mathrm{R}$，使

$f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{2},2\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup[1,2]$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{4},2\right]$

【答案】B

【解析】求出两个函数的值域，结合对任意 $x_1\in[1,+\infty)$，总存在 $x_2\in R$，使 $f(x_1)=g(x_2)$，等价为 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集，分别研究两个函数的值域即可.

【详解】对任意 $x\in[1,+\infty)$，则 $f(x)=2^{x-2}\geq 2^{-1}=\frac{1}{2}$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$，

若对任意的 $x_1\in[1,+\infty)$，总存在 $x_2\in R$，使 $f(x_1)=g(x_2)$，设函数 $g(x)$ 的值域为A，则满足 $[\frac{1}{2},+\infty)\subseteq A$，即可，

当 $x<0$ 时，函数 $g(x)=x^2+2a$ 为减函数，则此时 $g(x)>2a$，

当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=a\sin x+2\in[2-|a|,2+|a|]$，

（1）当 $2a<\frac{1}{2}$，即 $a<\frac{1}{4}$ 时，满足条件 $[\frac{1}{2},+\infty)\subseteq A$ 成立；

（2）当 $a\geq\frac{1}{4}$ 时，此时 $2a\geq\frac{1}{2}$，要使 $[\frac{1}{2},+\infty)\subseteq A$ 成立，则此时当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=a\sin x+2\in[2-a,2+a]$，

所以 $\begin{cases}2-a\leq\frac{1}{2},\\2a\leq 2+a,\end{cases}$ 解得：$\frac{3}{2}\leq a\leq 2$，

综上所述：$a<\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\leq a\leq 2$.故选：B.

【题型七】求参 7：保值函数

【典例分析】

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若满足条件：存在 $[m,n]\subseteq D$，使 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[km,kn]$（$k\in\mathbf{R}$ 且 $k>0$），则称 $f(x)$ 为“k 倍函数”，若函数 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 为“3 倍函数”，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(1,e^{\frac{3}{e}}\right)$　　B. $(1,e^3)$　　C. $\left(e^{\frac{2}{e}},e\right)$　　D. (e,e^3)

【答案】A

【分析】由函数与方程的关系得：函数 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 为“3 倍函数”，即函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3x$ 有两个不同的交点，设 $g(x)=a^x-3x$，再利用导数可得求出 $g(x)$ 的单调区间，只需 $g(\log_a\frac{3}{\ln a})<0$，即可求出 $1<a<e^{\frac{3}{e}}$

【详解】因为函数 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 为增函数，由函数 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 为“3 倍函数”，即函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3x$ 有两个不同的交点，

设 $g(x)=a^x-3x$，则 $g'(x)=a^x\ln a-3$，又 $a>1$，所以 $\ln a>0$，则当 $x<\log_a\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)<0$，

当 $x>\log_a\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,\log_a\frac{3}{\ln a})$ 为减函数，在 $(\log_a\frac{3}{\ln a},+\infty)$ 为增函数，

要使 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3x$ 有两个不同的交点，

则需 $g(\log_a\frac{3}{\ln a})<0$，即 $a^{\log_a\frac{3}{\ln a}}-3\log_a\frac{3}{\ln a}<0$ 所以 $\frac{1}{\ln a}<\log_a\frac{3}{\ln a}$，所以 $\log_a\left(\frac{3}{\ln a}\right)^{\ln a}>1$ 所以

$$\left(\frac{3}{\ln a}\right)^{\ln a} > a$$

所以 $\ln\frac{3}{\ln a} > 1$ 所以 $\frac{3}{\ln a} > e$ 即 $a < e^{\frac{3}{e}}$ 又 $a > 1$，所以 $1 < a < e^{\frac{3}{e}}$ 故选 A

【提分秘籍】

基本规律

1.保值函数，包括“倍增函数”，“倍缩函数”，“K 倍函数”，等等新定义

2.应用函数思想和方程思想。

【变式演练】

1.设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，若存在 $[a,b]\subseteq I$，使得 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[ka,kb](k\in N^*)$，则称 $f(x)$ 为“k 倍函数”.已知函数 $f(x)=\log_3(3^x-m)$ 为“3 倍函数”，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$　　B. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9},0\right)$　　C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

【答案】A

【分析】

问题转化为 $3^{3x}-3^x+m=0$ 有两个不等的实数根，设 $t=3^x$，换元 $t^3-t=-m$ 有两个不等的正实数根，记 $g(t)=t^3-t(t>0)$，求导则 $g'(t)=3\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(t>0)$，结合图象得出结论.

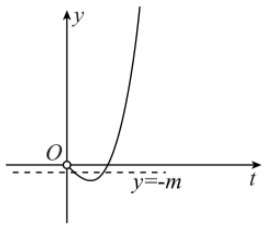
【详解】

解：由函数 $f(x)=\log_3(3^x-m)$ 为“3 倍函数”，且函数 $f(x)=\log_3(3^x-m)$ 单调递增，得 $\begin{cases}\log_3(3^a-m)=3a\\ \log_3(3^b-m)=3b\end{cases}$，即 $\begin{cases}3^a-m=3^{3a}\\ 3^b-m=3^{3b}\end{cases}$，$\therefore 3^{3x}-3^x+m=0$ 有两个不等的实数根，设 $t=3^x$，则问题转化为关于 t 的方程 $t^3-t=-m$ 有两个不等的正实数根.记 $g(t)=t^3-t(t>0)$，则

$g'(t)=3\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(t>0)$，

令 $g'(t)<0$，得 $0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ 当 $t>0$ 时，$g(t)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$，

故可画出函数 $y=g(t)$ 与 $y=-m$ 的草图，如下图所示：



由图可知，$-m\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9},0\right)$，$\therefore m\in\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ 时，有两个交点，

即 $3^{3x}-3^x+m=0$ 有两个不等的实数根.故选：A.

2.若存在实数 K，对任意 $x\in I, g(x)\geq Kf(x)$ 成立，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的“K 倍函数”.已知函数

$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x-4,x\leqslant 0\\ \ln x+\frac{1}{2},x>0\end{cases}$ 和 $g(x)=x$，若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 R 上的 K 倍函数，则 K 的取值范围是__________.

【答案】$\left[\frac{1}{2},\sqrt{e}\right]$

【分析】由题意分析可得 $x\in R,g(x)\geq Kf(x)$ 恒成立即为，当 $x<0$ 时，$\frac{1}{K}\leq\frac{f(x)}{g(x)}$ 恒成立，当 $x>0$ 时，$\frac{1}{K}\geq\frac{f(x)}{g(x)}$ 恒成立，构造函数求最值即可得出结果.

【详解】

由题意可知 $\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-x-2-\frac{4}{x},x\leq 0\\ \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x},x>0\end{cases}$，若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 R 上的 K 倍函数，即 $g(x)\geq Kf(x)$，

当 $x<0$ 时，$g(x)=x<0$，$f(x)=-x^2-2x-4=-(x+1)^2-3<0$，则 $K>0$，

$g(x)\geq Kf(x)\Leftrightarrow\frac{1}{K}g(x)\geq f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{K}\leq\frac{f(x)}{g(x)}$，

$\frac{f(x)}{g(x)}=-2-x-\frac{4}{x}\geq-2+2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)}=2$，当且仅当 $x=-2$ 时等号成立.$\therefore\frac{1}{K}\leq 2,K\geq\frac{1}{2}$;

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，$g(x)\geq Kf(x)\Leftrightarrow\frac{1}{K}\geq\frac{f(x)}{g(x)}$，

设 $T(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{x}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$，则 $T'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(-\ln x+\frac{1}{2}\right)$，

当 $x=\sqrt{e}$ 时，$T(x)$ 取最大值，此时，$\frac{f(x)}{g(x)}=T(x)_{\max}=T(e)=\frac{1}{\sqrt{e}}.\therefore\frac{1}{K}\geq\frac{1}{\sqrt{e}},K\leq\sqrt{e}$.

综上所述：$K\in\left[\frac{1}{2},\sqrt{e}\right]$.故答案为：$\left[\frac{1}{2},\sqrt{e}\right]$.

3.对于函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时的值域为 $[ka,kb](k>0)$，则称 $y=f(x)$ 为 k 倍值函数.若 $f(x)=e^x+2x$ 是 k 倍值函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(e+1,+\infty)$　　**B.** $(e+2,+\infty)$　　**C.** $\left(e+\frac{1}{e},+\infty\right)$　　**D.** $\left(e+\frac{2}{e},+\infty\right)$

【答案】B

【分析】可看出 $y=f(x)$ 在定义域 R 内单调递增，可得出 a,b 是方程 $e^x+2x=kx$ 的两个不同根，从而得出 $k=\frac{e^x}{x}+2$，通过求导，求出 $\frac{e^x}{x}+2$ 的值域，进而可得到 k 的范围.

解：$y=f(x)$ 在定义域 R 内单调递增，$\therefore f(a)=ka,f(b)=kb$，即 $e^a+2a=ka,e^b+2b=kb$，

即 a,b 是方程 $e^x+2x=kx$ 的两个不同根，$\therefore k=\frac{e^x}{x}+2$，设 $g(x)=\frac{e^x}{x}+2,g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

$\therefore 0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；$x>1$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点，

$\therefore g(x)$ 的极小值为：$g(1)=e+2$，又 x 趋向 0 时，$g(x)$ 趋向 $+\infty$；x 趋向 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋向 $+\infty$，

$\therefore k>e+2$ 时，$y=k$ 和 $y=g(x)$ 的图象有两个交点，方程 $k=\frac{e^x}{x}+2$ 有两个解，

$\therefore$实数 k 的取值范围是 $(e+2,+\infty)$．故选 B.

【题型八】求参 8：分离参数之“洛必达法”与放缩型

【典例分析】

已知函数 $f(x)=e^{|x|}\sin x$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数　　B．$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上为增函数

C．$f(x)$ 在 $(-10\pi,10\pi)$ 内有 21 个极值点　　D．$f(x) \geqslant ax$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立的充要条件是 $a \leqslant 1$

【答案】BD

【分析】

根据周期函数的定义判定选项 A 错误；根据导航的符号判断选项 B 正确；根据导函数零点判定选项 C 错误；根据恒成立以及对应函数最值确定选项 D 正确.

【详解】$\because$ $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)=e^{|-x|}\sin(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数，

但是 $f(x+2\pi)=e^{|x+2\pi|}\sin(x+2\pi)=e^{|x+2\pi|}\sin x\neq f(x)$，$\therefore f(x)$ 不是周期为 2π 的函数，故选项 A 错误

当 $x\in(-\frac{\pi}{4},0)$ 时，$f(x)=e^{-x}\sin x$，$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,\frac{3\pi}{4})$ 时，$f(x)=e^{x}\sin x$，$f'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

且 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 连续，故 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 单调递增，故选项 B 正确；

当 $x\in[0,10\pi)$ 时，$f(x)=e^{x}\sin x$，$f'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)$，

令 $f'(x)=0$ 得，$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$，

当 $x\in(-10\pi,0)$ 时，$f(x)=e^{-x}\sin x$，$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$，

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k=-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10)$，

因此，$f(x)$ 在 $(-10\pi,10\pi)$ 内有 20 个极值点，故选项 C 错误；

当 $x=0$ 时，$f(x)=0\geq 0=ax$，则 $a\in R$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$f(x)\geq ax\Leftrightarrow a\leq\frac{e^{x}\sin x}{x}$，设 $g(x)=\frac{e^{x}\sin x}{x}$，$\therefore g'(x)=\frac{e^{x}(x\sin x+x\cos x-\sin x)}{x^{2}}$，

令 $h(x)=x\sin x+x\cos x-\sin x$，$x\in(0,\frac{\pi}{4}]$ $\therefore h'(x)=\sin x+x(\cos x-\sin x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，$\therefore g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4}]$ 单调递增，又由洛必达法则知：

当 $x\to 0$ 时，$g(x)=\frac{e^{x}\sin x}{x}\to\frac{e^{x}(\sin x+\cos x)}{1}\Big|_{x=0}=1\ \therefore a\leq 1$，故答案 D 正确.

故选：BD.

【提分秘籍】

基本规律

如果最值恰好在“断点处”，则可以通过洛必达法则求出“最值”。

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=x^2\ln x-a(x^2-1)$ (a∈R),若 $f(x)\ge 0$ 在 x∈(0,1] 时恒成立,则实数 a 的取值范围是

A. $[\frac{\sqrt{2}}{4},+\infty)$ **B.** $[\frac{1}{2},+\infty)$ **C.** [2,+∞) **D.** [1,+∞)

【答案】B

【分析】

首先将式子化简，将参数 a 化为关于 x 的函数，之后将问题转化为求最值问题来解决，之后应用导数研究函数的单调性，从而求得函数的最值，在求解的过程中，注意对函数进行简化，最后用洛必达法则，通过极限求得结果.

【详解】

根据题意，有 $x^2\ln x-a(x^2-1)\ge 0,(x\in(0,1])$ 恒成立，当 $a\ne 1$ 时，将其变形为 $a\ge\frac{x^2\ln x}{x^2-1}$ 恒成立，即 $a\ge(\frac{x^2\ln x}{x^2-1})_{\max}$，令 $g(x)=\frac{x^2\ln x}{x^2-1}$，利用求得法则及求导公式可求得 $g'(x)=\frac{x^3-x-2x\ln x}{(x^2-1)^2}$，令 $h(x)=x^3-x-2x\ln x$，可得 $h'(x)=3x^2-1-2\ln x-2=3x^2-2\ln x-3$，可得 $h''(x)=6x-\frac{2}{x}=\frac{6x^2-2}{x}=\frac{6(x+\frac{\sqrt{3}}{3})(x-\frac{\sqrt{3}}{3})}{x}$，因为 $x\in(0,1]$，所以 $x\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$h''(x)<0$，$x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 时，$h''(x)>0$，所以函数 $h'(x)$ 在 $x\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时单调减，在 $x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 时单调增，即 $h'(x)\ge h(\frac{\sqrt{3}}{3})=1-3-2\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=\ln 3-2$，而 $h'(1)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 上是减函数，且 $h(1)=0$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 上满足 $h(x)\ge 0$ 恒成立，同理也可以确定 $h(x)\ge 0$ 在 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ 上也成立，即 $g'(x)\ge 0$ 在 $x\in(0,1]$ 上恒成立，即 $g(x)=\frac{x^2\ln x}{x^2-1}$ 在 $x\in(0,1]$ 上单调增，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x\ln x+x}{2x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\ln x+1}{2}=\frac{1}{2}$，故所求的实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$，故选 B.

2.若对任意 $x\in(0,\pi)$，不等式 $e^x-e^{-x}>a\sin x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A. $[-2,2]$ **B.** $(-\infty,e]$ **C.** $(-\infty,2]$ **D.** $(-\infty,1]$

【答案】C

【详解】

将 $e^x-e^{-x}>a\sin x$ 等价转化为 $a<\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立，令 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$，则 $f'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}$，令 $g(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\sin x+\cos x)$，则 $g'(x)=2(e^x-e^{-x})\sin x>g'(0)=0$，即 $g(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\sin x+\cos x)$ 在 $(0,\pi)$ 上为增函数，则 $g(x)>g(0)=0$，所以在 $(0,\pi)$ 恒成立，则 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ 在 $(0,\pi)$ 单调递增，则 $f(x)>f(0)$，由洛必达法则，得 $\frac{\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e^{-x})'}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)'}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x})}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=2$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$；故选 C.

3.若 $\frac{1}{2}(a-1)x^2+1<e^x-x$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,2]$ **B.** $(-\infty,2)$ **C.** $(-\infty,1]$ **D.** $(-\infty,3]$

【答案】A

【分析】

将条件 $\frac{1}{2}(a-1)x^2+1<e^x-x$ 对 $\forall x>0$ 恒成立转化为对 $\forall x>0$ 有 $\frac{1}{2}(a-1)<\frac{e^x-x-1}{x^2}$ 恒成立，令