2019年黄冈中学自主招生预录考试

数学模拟试题（五）

一．填空题（每题 **3** 分，共 **24** 分）

1．（3 分）$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ $\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$=____．

2．（3 分）$(x^2-x-2)^6=a_{12}x^{12}$ $a_{11}x^{11}$ $a_{10}x^{10}$ a_1x a_0，则 a_{12} a_{10} a_8 a_6 a_4 a_2=_____．

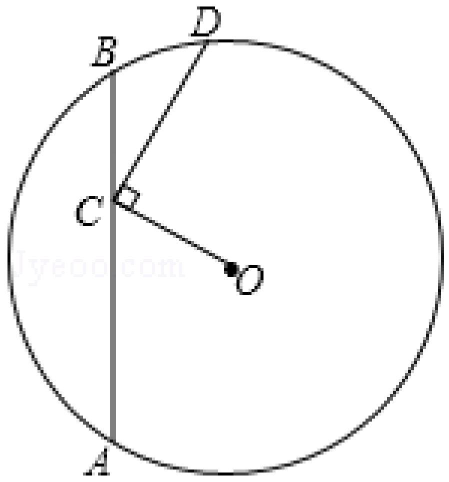
3.（3 分）如果函数 y=b 的图象与函数 $y=x^2-3$ $x-1$ $-4x-3$ 的图象恰有三个交点，则 b 的可能值是____．

4．（3 分）已知 x 为实数，则$\sqrt{8-x}+\sqrt{x-2}$的最大值是____．

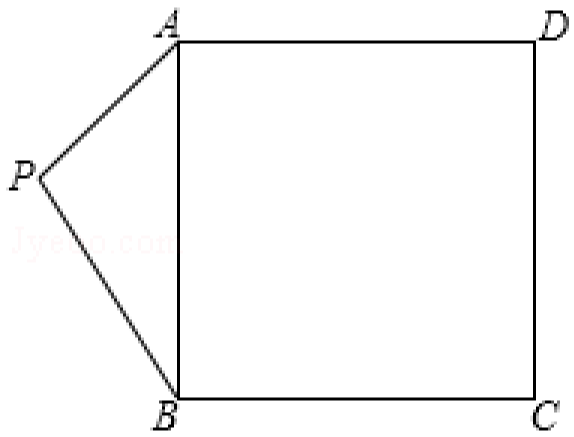
5．（3 分）关于 x 的方程$\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{6|x|}{\sqrt{x^2+1}}+2-a=0$有实根，则 a 的取值范围是____．

6．（3 分）已知 f（x）=$\sqrt{(x-3)^2+9}-\sqrt{(x-1)^2+4}$，则 f（x）的最大值是____．

7．（3 分）如图所示，动点 C 在⊙O 的弦 AB 上运动，AB=$2\sqrt{3}$，连接 OC，CD⊥OC 交⊙O 于点 D．则 CD 的最大值为____．



(第 7 题图)



(第 8 题图)

8．（3 分）如图所示，已知 P 是正方形 ABCD 外一点，且 PA=3，PB=4，则 PC 的最大值是____．

二．选择题（每小题 **3** 分，共 **24** 分）

9．（3 分）记 A=$\sum_{k=1}^{2013}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$，再记 A 表示不超过 A 的最大整数，则 A （　　）

A．2010　B．2011　C．2012　D．2013

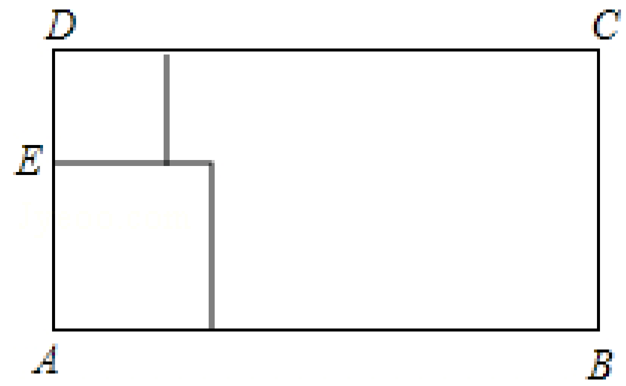
10．（3 分）已知二次函数 $y=ax^2\ bx\ c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	－3	－2	－1	0	1	2	3
y	11		1	－1	－1	1	5

且方程 $ax^2\ bx\ c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），下面说法错误的是（　　）

A．$x=-2$，$y=5$　B．$1<x_2<2$

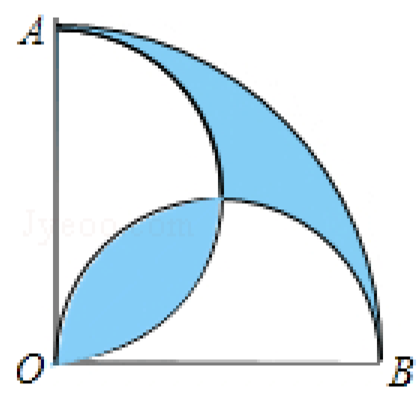
C．当 $x_1<x<x_2$ 时，$y>0$　D．当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 有最小值



11．（3 分）如图，从 1×2 的矩形 ABCD 的较短边 AD 上找一点 E，过这点剪下两个正方形，它们的边长分别是 AE、DE，当剪下的两个正方形的面积之和最小时，点 E 应选在（　　）

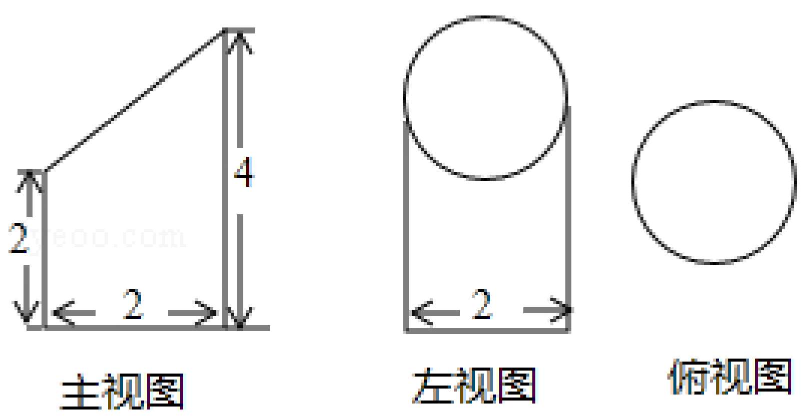
A．AD 的中点　B．AE：ED=（$\sqrt{5}-1$）：2

C．AE：ED=$\sqrt{2}$：1　D．AE：ED=（$\sqrt{2}-1$）：2



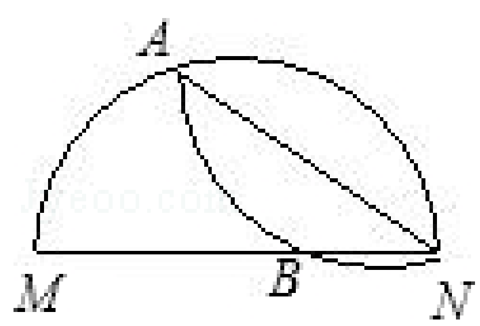
12．（3 分）如图，在圆心角为直角的扇形 OAB 中，分别以 OA、OB 为直径作两个半圆，向直角扇形 OAB 内随机取一点，则该点刚好来自阴影部分的概率是（　　）

A．$1-\frac{2}{\pi}$　B．$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　C．$\frac{2}{\pi}$　D．$\frac{1}{\pi}$



13．（3 分）已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）

A．$\frac{8\pi}{3}$B．3　C．$\frac{10\pi}{3}$　D．6



14．（3 分）如图，以半圆的一条弦 AN 为对称轴将弧 AN 折叠过来和直径 MN 交于 B 点，如果 MB：BN=2：3，且 MN=10，则弦 AN 的长为（　　）

A．$3\sqrt{5}$B．$4\sqrt{5}$C．$4\sqrt{3}$D．$5\sqrt{3}$

15．（3 分）两列数如下：

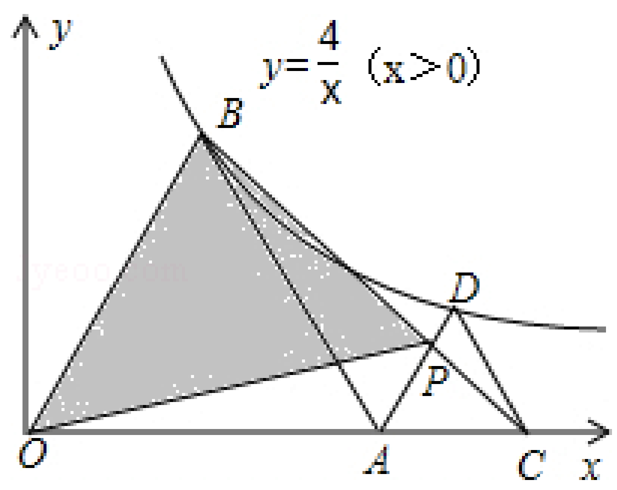
7，10，13，16，19，22，25，28，31，

7，11，15，19，23，27，31，35，39，

第 1 个相同的数是 7，第 10 个相同的数是（　　）

A．115 B．127 C．139 D．151

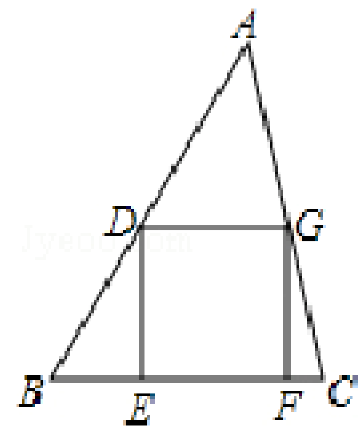
16．（3 分）如图，△AOB 和△ACD 均为正三角形，且顶点 B、D 均在双曲线$y=\frac{4}{x}$（x＞0）上，则图中 $S_{\triangle OBP}$=（　　）



A．$2\sqrt{3}$B．$3\sqrt{3}$C．$4\sqrt{3}$D．4

三.解答题

17.（12 分）如图，已知锐角△ABC 的面积为 1，正方形 DEFG 是△ABC 的一个内接正方形，DG∥BC，求正方形 DEFG 面积的最大值.



18.（14 分）在黄州服装批发市场，某种品牌的时装当季节将来临时，价格呈上升趋势，设这种时装开始时定价为 20 元，并且每周（7 天）涨价 2 元，从第 6 周开始保持 30 元的价格平稳销售；从第 12 周开始，当季节即将过去时，平均每周减价 2 元，直到第 16 周周末，该服装不再销售.

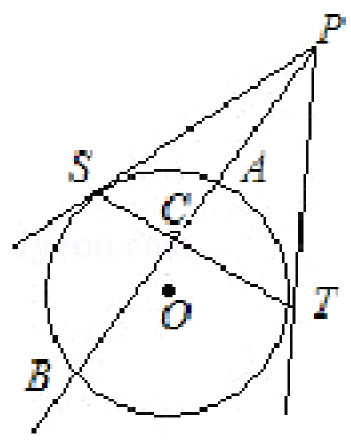
（1）试建立销售价 y 与周次 x 之间的函数关系式；

（2）若这种时装每件进价 Z 与周次 x 次之间的关系为 $Z=-0.125(x-8)^2$ 12.1≤x≤16，且 x 为整数，试问该服装第几周出售时，每件销售利润最大？最大利润为多少？

19．（14 分）已知 x_1、x_2 是关于 x 的一元二次方程 x^2 （3a﹣1）x 2a^2﹣1=0 的两个实数根，使得（$3x_1$﹣x_2）（x_1﹣$3x_2$）=﹣80 成立，求其实数 a 的可能值．

20．（16 分）如图，已知点 P 是⊙O 外一点，PS，PT 是⊙O 的两条切线，过点 P 作⊙O 的割线 PAB，交⊙O 于 A、B 两点，并交 ST 于点 C．

求证：$\frac{1}{PC}=\frac{1}{2}(\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB})$．

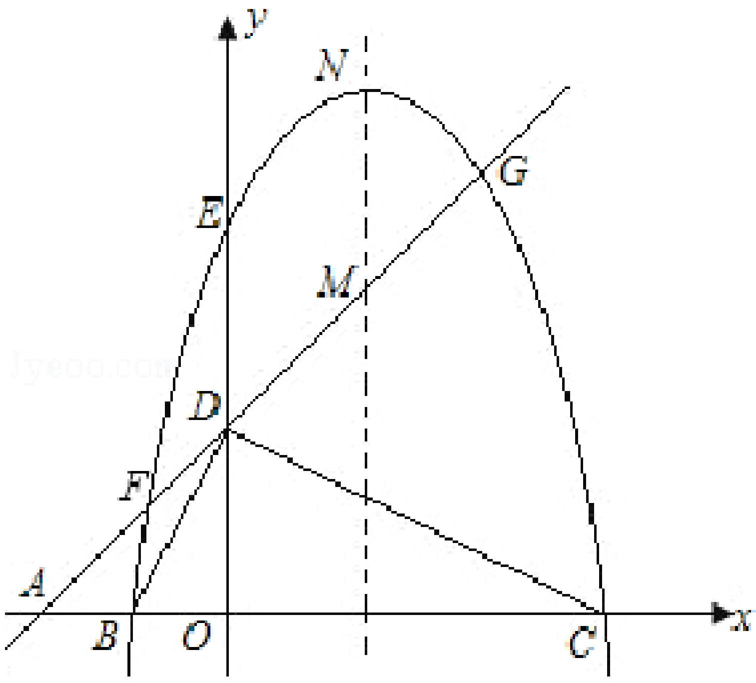


21．（16 分）如图，平面直角坐标系中，点 A、B、C 在 x 轴上，点 D、E 在 y 轴上，OA=OD=2，OC=OE=4，DB⊥DC，直线 AD 与经过 B、E、C 三点的抛物线交于 F、G 两点，与其对称轴交于 M．点 P 为线段 FG 上一个动点（与 F、G 不重合），PQ∥y 轴与抛物线交于点 Q.

（1）求经过 B、E、C 三点的抛物线的解析式；

（2）是否存在点 P，使得以 P、Q、M 为顶点的三角形与△AOD 相似？若存在，求出满足条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若抛物线的顶点为 N，连接 QN，探究四边形 PMNQ 的形状：①能否成为菱形；②能否成为等腰梯形？若能，请直接写出点 P 的坐标；若不能，请说明理由．



2019 年黄冈中学自主招生预录考试

数学模拟试题（五）参考答案与试题解析

一．填空题（每题 **3** 分，共 **24** 分）

1．（3 分）（201　黄冈校级自主招生）$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\ \ \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$= $\underline{\ \ 2-\sqrt{2}\ \ }$．

【分析】先根据二次根式的性质开方，再分母有理化，即可得出答案．

【解答】解：原式=$\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\ \ \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}\ \ 2-\sqrt{3}$

$=2-\sqrt{2}$，

故答案为：$2-\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了分母有理化和二次根式的性质的应用，注意：$n\sqrt{a}\ \ m\sqrt{b}$的有理化因式是 $n\sqrt{a}-m\sqrt{b}$.

2．（3 分）（201　黄冈校级自主招生）$(x^2-x-2)^6=a_{12}x^{12}\ \ a_{11}x^{11}\ \ a_{10}x^{10}\quad\ \ a_1x\ \ a_0$，则 $a_{12}\ \ a_{10}\ \ a_8\ \ a_6\ \ a_4\ \ a_2=$ $\underline{\ -32\ \ \ \ }$．

【分析】先把 x=0 代入等式可计算出 $a_0=64$，再分别把 x=1 和 －1 代入等式可得到 $a_{12}\ \ a_{11}\ \ a_{10}\quad\ \ a_2\ \ a_1\ \ a_0=64$，$a_{12}-a_{11}\ \ a_{10}\quad\ \ a_2-a_1\ \ a_0=0$，然后把两式相加即可得到 $2a_{12}\ \ 2a_{10}\ \ 2a_8\ \ 2a_6\ \ 2a_4\ \ 2a_2\ \ 2a_0=64$，再把 $a_0=64$ 代入计算即可．

【解答】解：把 x=0 代入得 $a_0=(-2)^6=64$，

把 x=1 代入得 $a_{12}\ \ a_{11}\ \ a_{10}\quad\ \ a_2\ \ a_1\ \ a_0=(1-1-2)^2=64$，

把 x=－1 代入得 $a_{12}-a_{11}\ \ a_{10}\quad\ \ a_2-a_1\ \ a_0=(1\ \ 1-2)^2=0$，

所以 $2a_{12}\ \ 2a_{10}\ \ 2a_8\ \ 2a_6\ \ 2a_4\ \ 2a_2\ \ 2a_0=64$，

所以 $a_{12}\ \ a_{10}\ \ a_8\ \ a_6\ \ a_4\ \ a_2=\frac{1}{2}(64-2\times64)=-32$．

故答案为－32．

【点评】本题考查了代数式求值：先把代数式根据已知条件进行变形，然后利用整体思想进行计算．

3．（3 分）（201　黄冈校级自主招生）如果函数 y=b 的图象与函数 $y=x^2-3\ \ x-1\ \ -4x-3$ 的图象恰有三个交点，则 b 的可能值是 $\underline{\ \ -6、-\frac{25}{4}\ \ }$．

【分析】按 x≥1 和 x＜1 分别去绝对值，得到分段函数，确定两函数图象的交点坐标，顶点坐标，结合

分段函数的自变量取值范围求出符合条件的 b 的值.

【解答】解：当 $x\geqslant1$ 时，函数 $y=x^2-3\ \ x-1\ \ -4x-3=x^2-7x$，

图象的一个端点为（1，－6），顶点坐标为（$\frac{7}{2}$，－$\frac{49}{4}$），

当 $x<1$ 时，函数 $y=x^2-3\ \ x-1\ \ -4x-3=x^2-x-6$，

顶点坐标为（$\frac{1}{2}$，－$\frac{25}{4}$），

∴当 $b=-6$ 或 $b=-\frac{25}{4}$时，两图象恰有三个交点.

故本题答案为：－6，－$\frac{25}{4}$.

【点评】本题考查了分段的两个二次函数的性质，根据绝对值里式子的符号分类，得到两个二次函数是解题的关键.

4.（3 分）（2015 黄冈校级自主招生）已知 x 为实数，则$\sqrt{8-x}+\sqrt{x-2}$的最大值是__$2\sqrt{3}$__.

【分析】设 $y=\sqrt{8-x}\ \sqrt{x-2}$，然后把等式两边平方，再根据二次函数的最值问题求出 y^2 的最大值，开方即可得解.

【解答】解：设 $y=\sqrt{8-x}\ \sqrt{x-2}$，

则 $y^2=8-x\ \ 2\sqrt{(8-x)(x-2)}\ \ x-2=2\sqrt{-(x-5)^2+9}\ \ 6$，

∴当 $x=5$ 时，y^2 有最大值，为 12，

∴y 的最大值是$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

即$\sqrt{8-x}\ \sqrt{x-2}$的最大值是 $2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了二次函数的最值问题，利用二次函数的最值问题求出所求代数式的平方的最大值是解题的关键.

5.（3 分）（2015 黄冈校级自主招生）关于 x 的方程$\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{6|x|}{\sqrt{x^2+1}}+2-a=0$有实根，则 a 的取值范围是__$-3<a\leqslant2$__.

【分析】设 $y=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$，方程变形后，根据方程有实根，得到根的判别式大于等于 0，列出关于 a 的不等式，求出不等式的解集即可得到 a 的范围.

【解答】解：设 $y=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$，方程变形为 $y^2-6y\ \ 2-a=0$，抛物线对称轴为 $y=3$，开口向上.

∵方程有实根，∴$\triangle=b^2-4ac=36-4(2-a)=28\ \ 4a\geqslant0$，

解得：a≥﹣7，

又 $y=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$的取值范围为 0≤y＜1

即方程在 0≤y＜1.

所以有 f（0）=2﹣a≥0，f（1）=﹣3﹣a＜0，

解得﹣3＜a≤2

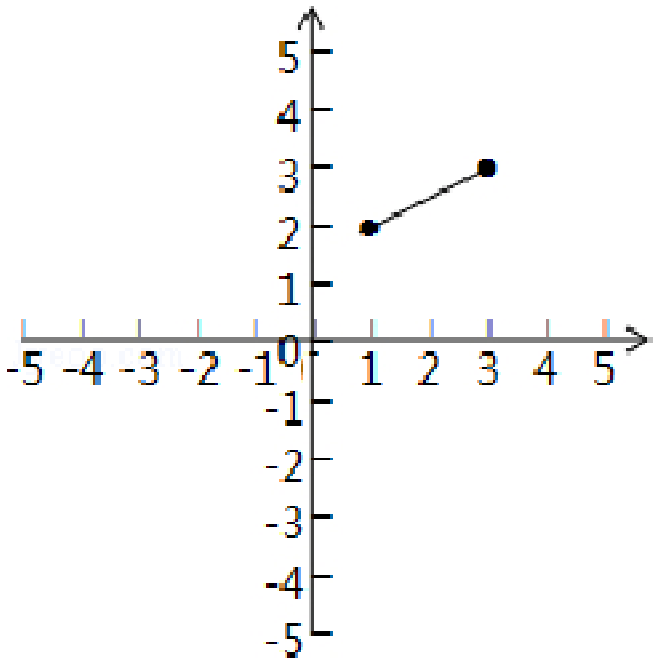
故答案为：﹣3＜a≤2

【点评】此题考查了分式方程的解，以及根与系数的关系，利用了整体代换的思想，是一道基本题型.

6.（3 分）（201　黄冈校级自主招生）已知 $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+9}-\sqrt{(x-1)^2+4}$，则 f(x)的最大值是__$\underline{\sqrt{5}}$__.

【分析】f（x）的最大值可以看作 x 轴上的点到点（3，3），（1，2）的最大距离，即两点之间的距离.

【解答】解：如图：

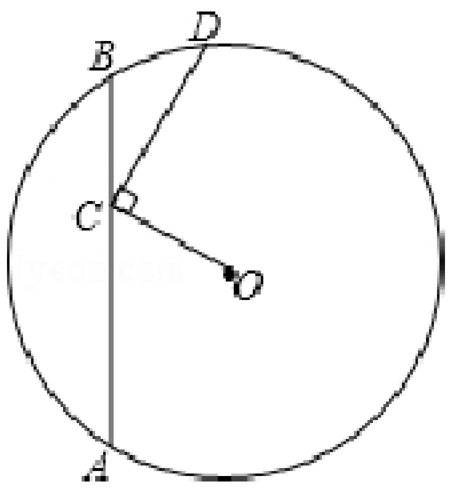


f（x）$=\sqrt{(x-3)^2+9}-\sqrt{(x-1)^2+4}$，可以看作 x 轴上的点到点（3，3），（1，2）的最大距离，最大距离为两点之间的距离，即：$\sqrt{(3-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

【点评】本题主要考查了无理函数的最值，解题的关键是运用数形结合的思想.

7.（3 分）（201　黄冈校级自主招生）如图所示，动点 C 在⊙O 的弦 AB 上运动，$AB=2\sqrt{3}$，连接 OC，CD⊥OC 交⊙O 于点 D．则 CD 的最大值为__$\underline{\sqrt{3}}$__.



【分析】作 OH⊥AB，延长 DC 交⊙O 于 E，如图，根据垂径定理得到 AH=BH=$\frac{1}{2}$AB=$\sqrt{3}$，CD=CE，再利用相交弦定理得 CD　CE=BC　AC易得 CD=$\sqrt{3-CH^2}$，当 CH 最小时，CD 最大，C 点运动到 H 点时，CH 最小，所以 CD 的最大值为$\sqrt{3}$.

【解答】解：作 OH⊥AB，延长 DC 交⊙O 于 E，如图，

∴AH=BH=$\frac{1}{2}$AB=$\sqrt{3}$,

∵CD⊥OC，

∴CD=CE，

∵CD　CE=BC　AC

∴CD^2=（BH﹣CH）（AH　CH）=（$\sqrt{3}$﹣CH）（$\sqrt{3}$　CH）=3﹣CH^2，

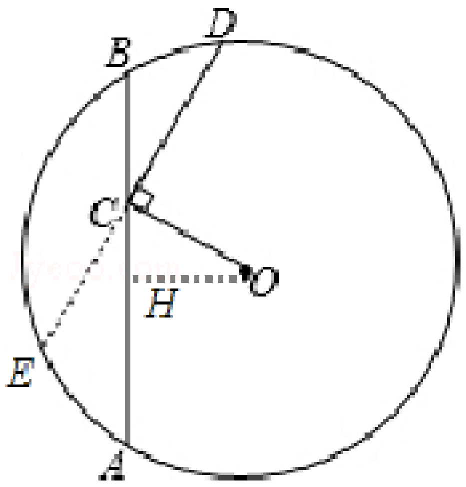
∴CD=$\sqrt{3-CH^2}$，

∴当 CH 最小时，CD 最大，

而 C 点运动到 H 点时，CH 最小，

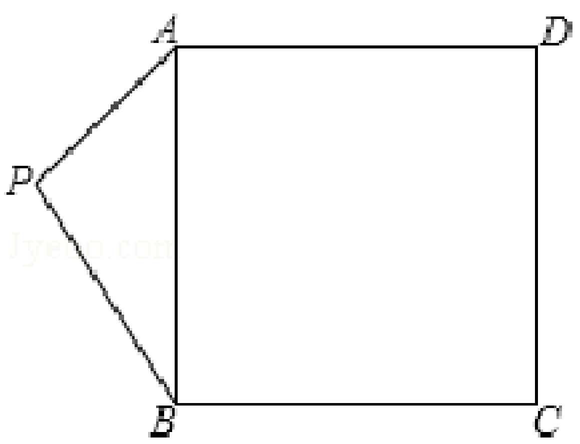
此时 CD=$\sqrt{3}$，即 CD 的最大值为$\sqrt{3}$.

故答案为$\sqrt{3}$.



【点评】本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，且平分弦所对的弧．也考查了勾股定理．

8.（3 分）（2　　黄冈校级自主招生）如图所示，已知 P 是正方形 ABCD 外一点，且 PA=3，PB=4，则 PC 的最大值是＿3 4$\sqrt{2}$＿.



【分析】过点 B 作 BE⊥BP 使点 E 在正方形 ABCD 的外部，且 BE=PB，连接 AE、PE、PC，然后求出 PE=$\sqrt{2}$PB，再求出∠ABE=∠CBP，然后利用 边角边 证明△ABE 和△CBP 全等，根据全等三角形对应边相等可得 AE=PC，再根据两点之间线段最短可知点 A、P、E 三点共线时 AE 最大，也就是 PC 最大．

【解答】解：如图，过点 B 作 BE⊥BP，且 BE=PB，连接 AE、PE、PC，

则 PE=$\sqrt{2}$PB=4$\sqrt{2}$,

∵∠ABE=∠ABP 90°，∠CBP=∠ABP 90°，

∴∠ABE=∠CBP，

在△ABE 和△CBP 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle CBP, \\ BE=PB \end{cases}$$

∴△ABE≌△CBP（SAS），

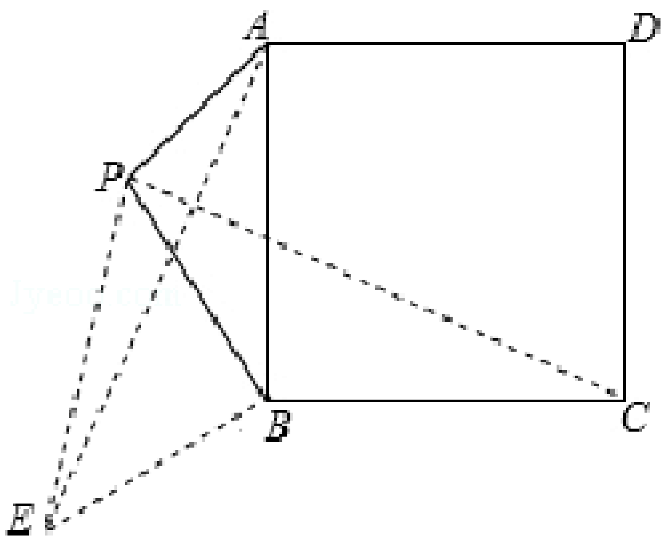
∴AE=PC，

由两点之间线段最短可知，点 A、P、E 三点共线时 AE 最大，

此时 AE=AP PE=3 4$\sqrt{2}$,

所以，PC 的最大值是 3 4$\sqrt{2}$.

故答案为：3 4$\sqrt{2}$.



【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质，正方形的性质，解题的关键是能巧妙利用三角形全等的知识，构造全等三角形，把求 PC 的长转化成求 AE 的长.

二．选择题（每小题 **3** 分，共 **24** 分）

9．（3 分）（201 黄冈校级自主招生）记 A=$\sum\limits_{k=1}^{2013}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$，再记 A 表示不超过 A 的最大整数，则 A （ ）

A．2010 B．2011 C．2012 D．2013

【分析】先通分得到 1 $\frac{1}{k^2}$ $\frac{1}{(k+1)^2}$=$\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$，再把分子变形得到完全平方公式，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$=$\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$，变形得：1 $\frac{1}{k}$ - $\frac{1}{k+1}$，

则 A=1 $\frac{1}{1}$ - $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ 1 $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ 1 $\frac{1}{2013}$ - $\frac{1}{2014}$，计算得到 2013$\frac{2013}{2014}$，然后根据 x 表示不超过 x 的最大整数求解.

【解答】解：∵$1\ \frac{1}{k^2}\ \frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$=\frac{[k(k+1)]^2+k^2+2k+1+k^2}{[k(k+1)]^2}$

$=\frac{[k(k+1)]^2+2k(k+1)+1}{[k(k+1)]^2}$

$=\frac{[k(k+1)+1]^2}{[k(k+1)]^2}$,

∴$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$,

∴$A=1\ \frac{1}{1}-\frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ 1\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad 1\ \frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=2013\frac{2013}{2014}$,

∴ $A = 2013\frac{2013}{2014}\ =2013$.

故选：D．

【点评】此题主要考查了取整计算，利用完全平方公式以及分式的加减运算法则将原式变形得出$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$是解题关键．

10．（3 分）（2015 黄冈校级自主招生）已知二次函数 $y=ax^2\ bx\ c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	﹣3	﹣2	﹣1	0	1	2	3
y	11		1	﹣1	﹣1	1	5

且方程 $ax^2\ bx\ c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），下面说法错误的是（　　）

A．$x=-2$，$y=5$　B．$1<x_2<2$

C．当 $x_1<x<x_2$ 时，$y>0$　　D．当 $x=\frac{1}{2}$时，y 有最小值

【分析】分别结合图表中数据得出二次函数对称轴以及图象与 x 轴的交点范围和自变量 x 与 y 的对应情况，进而得出答案．

【解答】解：A、利用图表中 x=0，1 时对应 y 的值相等，x=﹣1，2 时对应 y 的值相等，

∴x=﹣2，5 时对应 y 的值相等，

∴x=﹣2，y=5，故此选项正确，不合题意；

B、∵方程 $ax^2\ bx\ c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），且 x=1 时 y=﹣1，x=2 时，y=1，

∴$1<x_2<2$，故此选项正确，不合题意；

C、由题意，结合点的坐标，如图所示，可得出二次函数图象向上，∴当 $x_1<x<x_2$ 时，$y<0$，故此选项错误，符合题意；