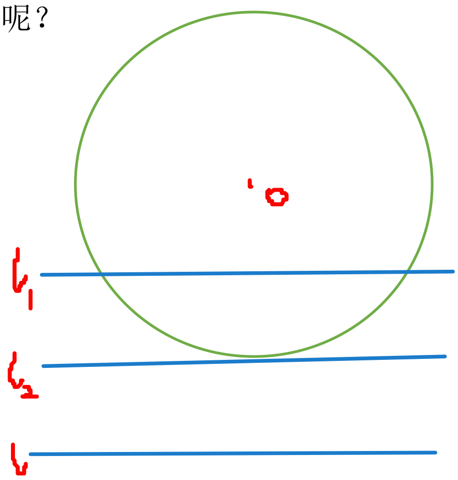
2.5 直线与圆的位置关系

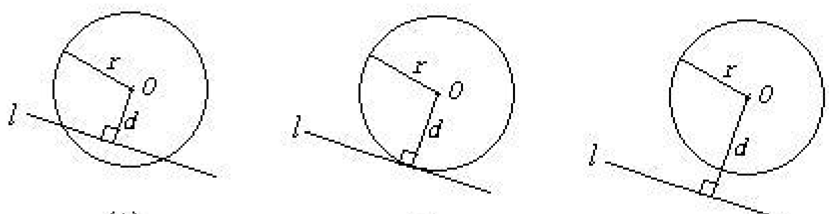
【推本溯源】



1.回顾一下点与圆的位置关系，那么直线与圆有几种关系呢？
点在圆内，点在圆上，点在圆外；
直线与圆的位置关系：

（1）相交：直线与圆有<u>两个</u>公共点时，叫做直线和圆相交. 这时直线叫做圆的<u>割线</u>(如右图 l_1)；
（2）相切：直线和圆有<u>唯一</u>公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫做圆的<u>切线</u>，唯一的公共点叫做<u>切点</u>；（如右图 l_2）.
（3）相离：直线和圆<u>没有</u>公共点时，叫做直线和圆相离。(如右图 l_3）

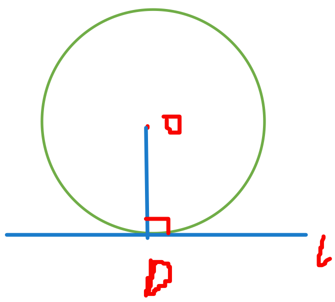
2. 点与圆的位置关系我们是用点到圆心距离与半径比较，那直线与圆的位置关系怎么表示出来？
设圆心到直线的距离为 r
当 <u>d＜r</u> 时，相交；
当 <u>d=r</u> 时，　相切；
当 <u>d＞r</u> 时，相离。



(1)　(2)　(3)

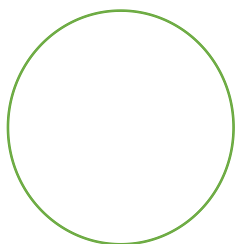
同样地，当相交时，<u>d＜r</u>；当相切时，<u>d=r</u>；当相离时，<u>d＞r</u>。

3.如右图，经过圆 O 的半径 OD 外端点 D，作直线 l⊥OD，直线 l 与圆 O 是怎样的关系？
<u>∵l⊥OD　∴OD=r　∴直线与 l 相切</u>



因此，经过半径<u>外端并且垂直与这条半径的</u>直线是圆的切线。
注：①<u>直线与圆有一个交点</u>；②<u>直线与过交点的半径垂直</u>。
几何语言：<u>∵l⊥OD ，OD 是半径　∴直线与 l 相切</u>

4.如图，直线 l 是圆 O 的切线，切点为 D，直线 l 与半径 OD 有怎样



的关系？

l⊥OD

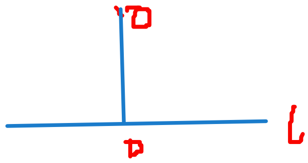
用反证法；假设 l 与 OD 不垂直，过圆心 O 作 OD′ ⊥l，垂足为 D′

∵直线 l 是圆 O 的切线

∴点 O 到直线 l 的距离等于半径

∵点 D′ 在圆上，这样切线会和圆有两个交点，与题目相切矛盾

∴l⊥OD

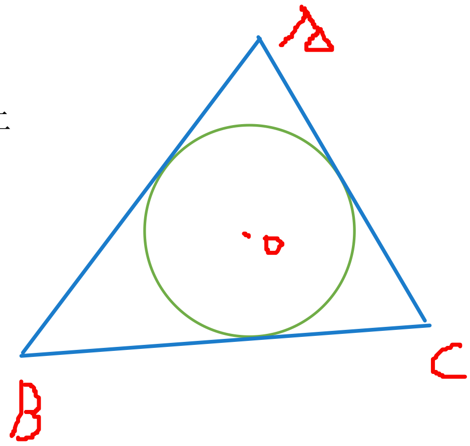


因此，圆的切线垂直于经过切点的半径。

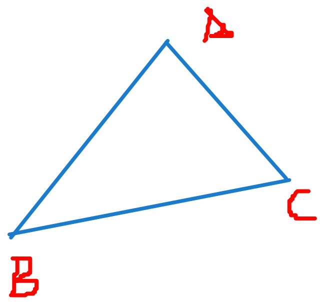
5.（1）做一个圆，使它与已知三角形的各边都相切？

根据在角得内部到角两边距离相等得点在角得平分线上

可得圆心 O 是三个内角平分线得交点。



（2）画出右图▲ABC 里面最大的圆



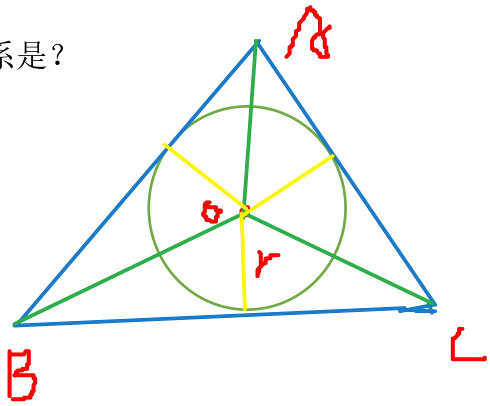
因此，与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，三角形内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的内心. 三角形的内心到三边的距离都相等.这个三角形是圆的外切三角形。

如图：▲ABC 的面积、周长与内切圆半径之间的关系是？

$\because S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AB\bullet \mathrm{r}，S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AC\bullet \mathrm{r}，S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}BC\bullet \mathrm{r}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}+S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\mathrm{r}(AB+AC+BC)$

$=\frac{1}{2}\mathrm{r}\bullet \mathrm{C}_{\Delta ABC}$



因此，三角形的面积等于三角形周长与内切圆半径之积的一半。

6.如图，PA、PB 是圆 O 的切线，切点分别为 A、B.PA 与 PB 相等吗？

PA=PB

∵PA、PB 是圆 O 的切线

∴PA⊥OA，PB⊥OB，

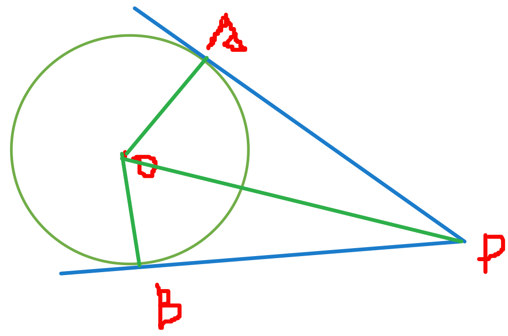
∴∠PAO=∠PBO=90°

在$Rt\Delta AOP$和$Rt\Delta BOP$中，$\angle PAO=\angle PBO=90°$

$\begin{cases} OA=OB \\ OP=OP \end{cases}$

$\therefore Rt\Delta AOP \cong Rt\Delta BOP$（HL）

∴PA=PB



在经过圆外一点作圆的切线上，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长.

因此，从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

几何语言：∵PA、PB 是圆 O 的切线 ∴PA=PB

【解惑】

例 1：已知平面内有$\odot O$与直线AB，$\odot O$的半径为3cm，点O到直线AB的距离为3cm，则直线AB与$\odot O$的位置关系是（　）

A．相切　　B．相交　　C．相离　　D．不能判断

【答案】A

【分析】根据点O到直线AB的距离与圆的半径大小作比较即可.

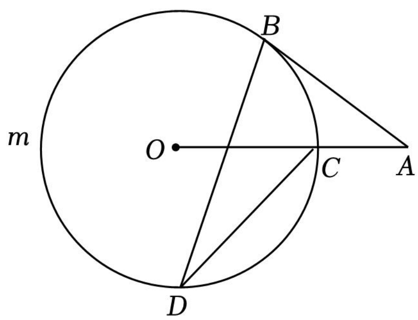
【详解】解：∵点O到直线AB的距离为3cm，且$\odot O$的半径为3cm，

$\therefore 3\text{cm}=3\text{cm}$，即直线$AB$与$\odot O$的位置关系是相切，

故选：A.

【点睛】本题考查了直线与圆的位置关系，正确的理解题意是解题的关键.

例 2：如图，AB是$\odot O$的切线，切点为B，连接AO与$\odot O$交于点C，点D为$\overset{\frown}{BmC}$上一点，连接BD，CD．若$\angle A=36°$，则$\angle BDC$的度数为（　　）

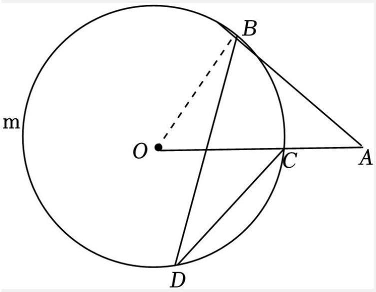


A．32°　　　　　　B．18°　　　　　　C．27°　　　　　　D．36°

【答案】C

【详解】连接OB，由切线的性质得出$\angle ABO=90^{\circ}$，由圆周角定理可得出答案.

【分析】解：连接OB，



$\because AB$为$\odot O$的切线，

$\therefore OB\perp AB$，

$\therefore \angle ABO=90^{\circ}$，

$\because \angle A=36^{\circ}$，

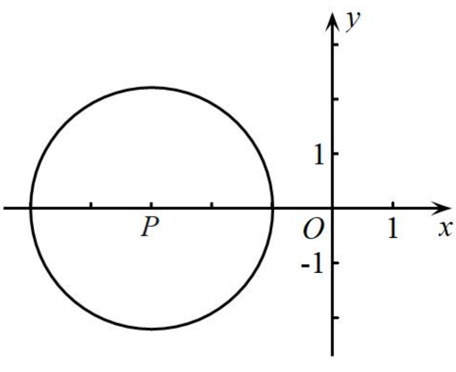
$\therefore \angle AOB=90^{\circ}-\angle A=90^{\circ}-36^{\circ}=54^{\circ}$，

$\therefore \angle BDC=\dfrac{1}{2}\angle AOB=27^{\circ}$，

故选：C.

【点睛】本题考查了圆周角定理，三角形内角和定理，切线的性质等知识点，能求出$\angle OBA=90^{\circ}$是解此题的关键.

例3：如图，在平面直角坐标系xOy中，半径为2的$\odot P$的圆心P的坐标为$\left(-3,0\right)$，将$\odot P$沿x轴正方向以0.5个单位/秒的速度平移，使$\odot P$与y轴相切，则平移的时间为__________秒.



【答案】2或10

【分析】平移分在y轴的左侧和y轴的右侧两种情况写出答案即可.

【详解】解：当$\odot P$位于y轴的左侧且与y轴相切时，平移的距离为1；

$\therefore t=\frac{1}{0.5}=2$(秒)；

当$\odot P$位于y轴的右侧且与y轴相切时，平移的距离为5.

$\therefore t=\frac{5}{0.5}=10$(秒)；

故答案为：2或10

【点睛】本题考查了直线与圆的位置关系，解题的关键是了解当圆与直线相切时，点到圆心的距离等于圆的半径.

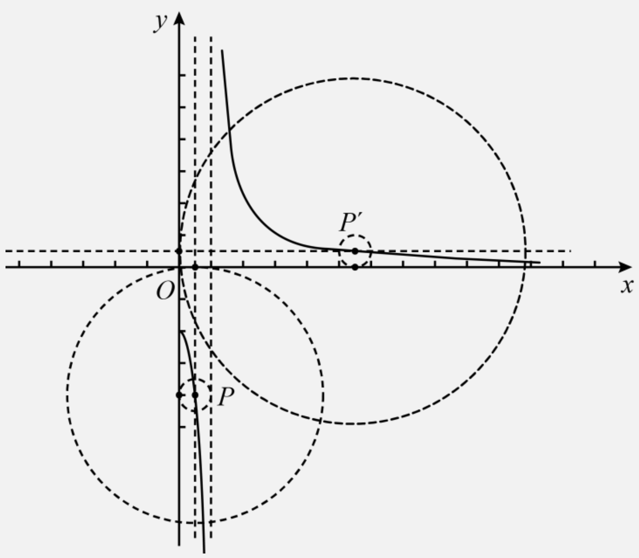
例4：已知圆P的半径是$\frac{1}{2}$，圆心P在函数$y=\frac{2}{x-1}(x>0)$的图像上运动，当圆P与坐标轴相切时，圆心P的坐标为__________.

【答案】$\left(\frac{1}{2},-4\right)$或$\left(5,\frac{1}{2}\right)$

【分析】分两种情况讨论：如图，当圆心P在函数$y=\frac{2}{x-1}(x>0)$的图像上运动，当$x=\frac{1}{2}$时，$y=-4$，当$y=\frac{1}{2}$时，则$\frac{1}{2}=\frac{2}{x-1}$，解得：$x=5$，经检验符合题意；从而可得答案.

【详解】解：如图，当圆心P在函数$y=\frac{2}{x-1}(x>0)$的图像上运动，

$\therefore$当$x=\frac{1}{2}$时，$y=-4$，



此时$P\left(\frac{1}{2},-4\right)$，

当$y=\frac{1}{2}$时，则$\frac{1}{2}=\frac{2}{x-1}$，解得：$x=5$，经检验符合题意；

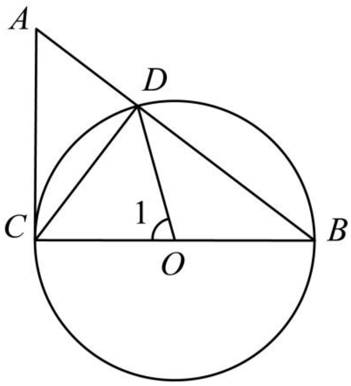
此时$P\left(5,\frac{1}{2}\right)$，

综上：$P\left(\frac{1}{2},-4\right)$或$P\left(5,\frac{1}{2}\right)$；

故答案为：$\left(\frac{1}{2},-4\right)$或$\left(5,\frac{1}{2}\right)$

【点睛】本题考查的是坐标与图形，反比例函数的图像与性质，圆的切线的性质，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

例 5：如图，以$\triangle ABC$的一边BC为直径的$\odot O$，交AB于点D，连接CD，OD，已知$\angle A+\frac{1}{2}\angle 1=90°$.



(1)求证：AC是$\odot O$的切线；

(2)若$\angle B=30°$，$AD=2$，求$\odot O$的半径.

【答案】(1)见解析

(2)$2\sqrt{3}$

【分析】（1）利用等腰三角形的性质和三角形外角性质可得$\angle 1=2\angle B$，从而可得$\angle A+\angle B=90°$，再根据三角形的内角和定理可得$\angle ACB=90°$，然后根据圆的切线的判定即可得证；

（2）先求出$\angle A=60°$，根据圆周角定理可得$\angle BDC=90°$，从而可得$\angle ACD=30°$，再根据含 30 度角的直角三角形的性质可得$AC=4, AB=2AC=8$，然后利用勾股定理可得$BC=4\sqrt{3}$，由此即可得.

【详解】（1）证明：$\because OB=OD$，

$\therefore \angle B=\angle ODB$，

$\therefore \angle 1=\angle B+\angle ODB=2\angle B$，

$\because \angle A+\frac{1}{2}\angle 1=90^{\circ}$，

$\therefore \angle A+\angle B=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore AC\perp BC$，

又$\because OC$是$\odot O$的半径，

$\therefore AC$是$\odot O$的切线.

（2）解：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\because \angle B=30^{\circ}$，

$\therefore \angle A=60^{\circ}$，

$\because BC$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle BDC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACD=30^{\circ}$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$AC=2AD=2\times 2=4$，

$\therefore AB=2AC=8$，

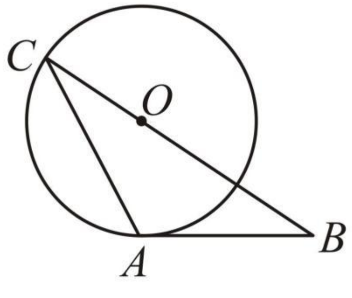
$\therefore BC=\sqrt{AB^{2}-AC^{2}}=4\sqrt{3}$，

则$\odot O$的半径为$\frac{1}{2}BC=2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了圆的切线的判定、圆周角定理、含30度角的直角三角形的性质、勾股定理等知识点，熟练掌握圆的切线的判定是解题关键.

【摩拳擦掌】

1.（2023·陕西商洛·校考三模）如图，AB为$\odot O$的切线，A为切点，BO的延长线交$\odot O$于点C，若$\angle B$的度数是36°，则$\angle C$的度数是（　　）



A．18°　　B．24°　　C．25°　　D．27°

【答案】D

【分析】连接OA，则$OA \perp AB$，由切线的性质及三角形内角和可求得$\angle AOB$的度数，再由等腰三角形的性质及三角形外角的性质即可求得结果．

【详解】解：连接OA，如图，

$\because AB$为$\odot O$的切线，A为切点，

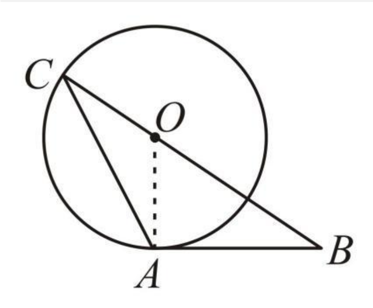
$\therefore OA \perp AB$，

$\therefore \angle AOB = 90° - \angle B = 54°$，

$\because OA = OC$，

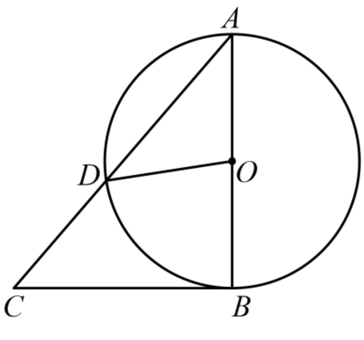
$\therefore \angle OAC = \angle C = \frac{1}{2}\angle AOB = 27°$，

故选：D．



【点睛】本题考查了切线的性质，等腰三角形的性质，三角形外角的性质等知识，作连接切点与圆心的半径是解题的关键．

2．（2023·黑龙江哈尔滨·统考三模）如图，AB是$\odot O$的直径，BC是$\odot O$的切线，点B是切点，AC交$\odot O$于点D，$\angle C = 50°$，则$\angle DOB$的度数为（　　）



A．40°　　　　B．60°　　　　C．80°　　　　D．100°

【答案】C

【分析】BC是$\odot O$的切线，可得$\angle ABC = 90°$，又由$\angle C = 50°$，圆周角定理即可得到答案．

【详解】解：$\because BC$是$\odot O$的切线，点B是切点，

$\therefore \angle ABC = 90°$．

又$\because \angle C = 50°$，

∴$\angle BAC = 90° - 50° = 40°$，

∴$\angle BOD = 2 \times 40° = 80°$．

故答案为C．

【点睛】本题考查了圆的切线的性质、圆周角定理，其中解题关键是运用圆的切线垂直于半径的性质．

3．（2023·浙江杭州·统考二模）已知$\odot O$的直径为4，圆心O到直线l的距离为2，则直线l与$\odot O$（　　）

A．相交　　B．相切　　C．相离　　D．无法确定

【答案】B

【分析】根据$\odot O$的半径和圆心O到直线l的距离的大小，相交：$d<r$；相切：$d=r$；相离：$d>r$；即可选出答案．

【详解】解：∵$\odot O$的直径为4，

∴$\odot O$的半径为2，

∵圆心O到直线l的距离为2，

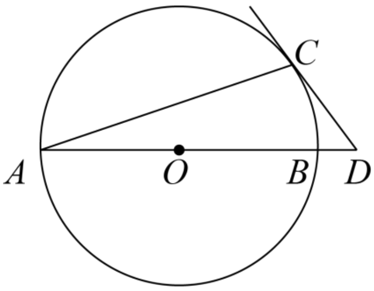
∴$d=r$，

∴直线l与$\odot O$的位置关系是相切，故B正确．

故选：B．

【点睛】本题主要考查对直线与圆的位置关系的性质的理解和掌握，能熟练地运用性质进行判断是解此题的关键．

4．（2023·江苏·九年级假期作业）如图，AB是$\odot O$的直径，AC是$\odot O$的弦，过点C的切线交AB的延长线于点D．若$\angle D = 54°$，则$\angle A$的度数为（　　）



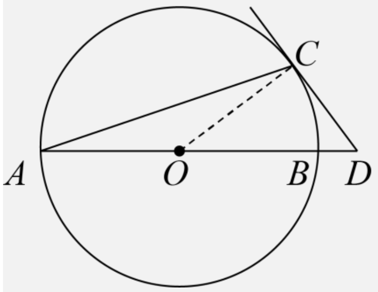
A．$18°$　　B．$20°$　　C．$23°$　　D．$27°$

【答案】A

【分析】连接OC，由切线的性质得$\angle OCD = 90°$，则$\angle COD = 90° - \angle D = 36°$，由圆周角定

理得$\angle A=\frac{1}{2}\angle COD=18^{\circ}$，于是得到问题的答案.

【详解】解：连接OC，



$\because CD$是$\odot O$的切线，

$\therefore CD\perp OC$，

$\therefore \angle OCD=90^{\circ}$，

$\because \angle D=54^{\circ}$，

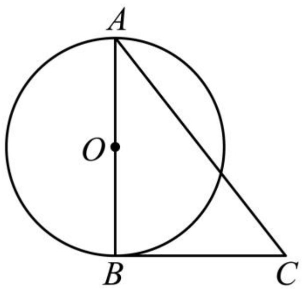
$\therefore \angle COD=90^{\circ}-\angle D=90^{\circ}-54^{\circ}=36^{\circ}$，

$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 36^{\circ}=18^{\circ}$，

故选：A.

【点睛】此题重点考查切线的性质、直角三角形的两个锐角互余、圆周角定理等知识，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键

5.（2023·广东广州·广州四十七中校考三模）如图，AB是$\odot O$的直径，BC是$\odot O$的切线，若$\angle BAC=38^{\circ}$，则$\angle ACB=$_______$^{\circ}$.



【答案】52

【分析】由切线性质可得$\angle ABC=90^{\circ}$，根据$\angle ACB=180^{\circ}-\angle ABC-\angle BAC$，计算求解即可.

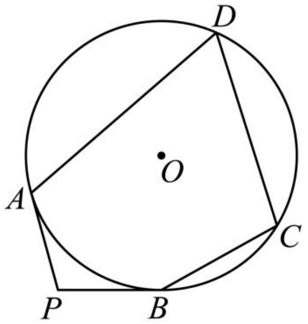
【详解】解：由切线性质可得$\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB=180^{\circ}-\angle ABC-\angle BAC=52^{\circ}$，

故答案为：52.

【点睛】本题考查了切线的性质，三角形内角和定理．解题的关键在于明确角度之间的数量关系.

6．（2023·江苏南京·南师附中树人学校校考三模）如图，PA、PB是$\odot O$的切线，A、B为切点，点C、D在$\odot O$上．若$\angle A+\angle C=220^{\circ}$，则$\angle P$的度数是________．

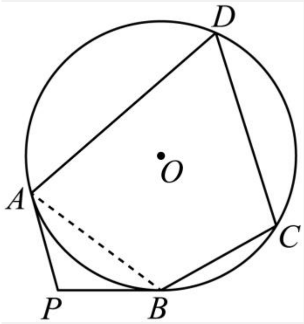


【答案】100°/100度

【分析】连接AB，根据圆内接四边形得出$\angle C+\angle DAB=180^{\circ}$，根据$\angle DAP+\angle C=220^{\circ}$，得出$\angle DAP-\angle DAB=40^{\circ}$，即$\angle BAP=40^{\circ}$，根据切线长定理得出$PA=PB$，根据等腰三角形性质得出$\angle ABP=\angle BAP=40^{\circ}$，根据三角形内角和定理得出

$\angle P=180^{\circ}-\angle BAP-\angle ABP=100^{\circ}$．

【详解】解：连接AB，如图所示：



∵四边形$ABCD$为圆内接四边形，

∴$\angle C+\angle DAB=180^{\circ}$，

∵$\angle DAP+\angle C=220^{\circ}$，

∴$\angle DAP-\angle DAB=40^{\circ}$，

即$\angle BAP=40^{\circ}$，

∵PA、PB是$\odot O$的切线，A、B为切点，

∴$PA=PB$，

∴$\angle ABP=\angle BAP=40^{\circ}$，

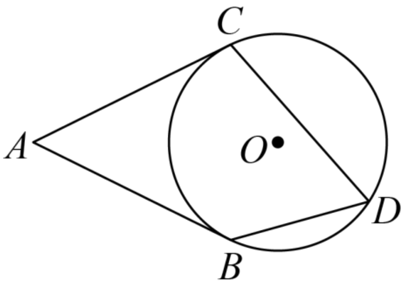
∴$\angle P=180^{\circ}-\angle BAP-\angle ABP=100^{\circ}$．

故答案为：100°．

【点睛】本题主要考查了圆内接四边形的性质，等腰三角形的判定和性质，切线长定理，三

角形内角和定理，解题的关键是熟练掌握圆内接四边形的性质，结合已知条件求出

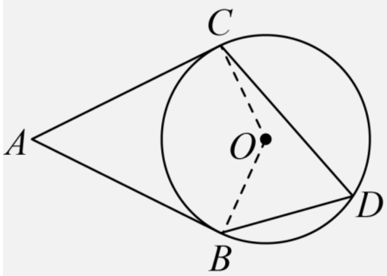
7．（2023·浙江嘉兴·统考中考真题）如图，点A是$\odot O$外一点，AB，AC分别与$\odot O$相切于点B，C，点D在$\overset{\frown}{BDC}$上，已知$\angle A=50°$，则$\angle D$的度数是____________.



【答案】65°/65度

【分析】连接CO,BO，根据切线的性质得出$\angle ACO=\angle ABO=90°$，根据四边形内角和得出$\angle COB=130°$，根据圆周角定理即可求解.

【详解】解：如图CO,BO，



∵AB，AC分别与$\odot O$相切于点B，C，

∴$\angle ACO=\angle ABO=90°$，

∵$\angle A=50°$，

∴$\angle COB=360°-90°-90°-50°=130°$，

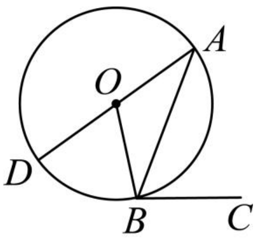
∵$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}$，

∴$\angle D=\frac{1}{2}\angle BOC=65°$，

故答案为：65°.

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，求得$\angle COB=130°$是解题的关键.

8．（2023·湖南·统考中考真题）如图，AD是$\odot O$的直径，AB是$\odot O$的弦，BC与$\odot O$相切于点B，连接OB，若$\angle ABC=65°$，则$\angle BOD$的大小为____________.



【答案】50°

【分析】证明$\angle OBC=90^{\circ}$，可得$\angle OBD=90^{\circ}-65^{\circ}=25^{\circ}$，结合$OB=OA$，证明$\angle A=\angle OBA=25^{\circ}$，再利用三角形的外角的性质可得答案.

【详解】解：$\because BC$与$\odot O$相切于点B，

$\therefore \angle OBC=90^{\circ}$，

$\because \angle ABC=65^{\circ}$，

$\therefore \angle OBD=90^{\circ}-65^{\circ}=25^{\circ}$，

$\because OB=OA$，

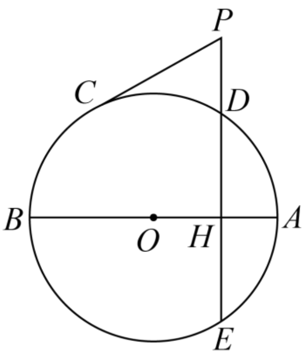
$\therefore \angle A=\angle OBA=25^{\circ}$，

$\therefore \angle BOD=2\times 25^{\circ}=50^{\circ}$，

故答案为：50°

【点睛】本题考查的是圆的切线的性质，等腰三角形的性质，三角形的外角的性质，熟记基本图形的性质是解本题的关键.

9.（2023·全国·九年级假期作业）如图，$\odot O$的直径$AB=10$，弦$DE\perp AB$于点H，$AH=2$.



(1)求DE的长；

(2)延长ED到P，过P作$\odot O$的切线，切点为C，若$PC=2\sqrt{5}$，求PD的长.

【答案】(1) $DE=8$；

(2) $PD=2$.

【分析】（1）根据垂径定理和相交弦定理求解；

（2）根据切割线定理进行计算.

【详解】（1）解：∵直径 $AB=10$，弦 $DE\perp AB$ 于点 H，

∴ $DH=EH$，

∴ $DH\times EH=AH\times BH=16$，

∴ $DH=4$，

∴ $DE=8$；

（2）解：∵ PC 切 $\odot O$ 于点 C，

∴ $PC^2=PD\times PE$，

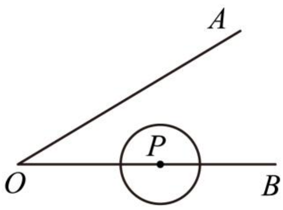
∵ $PC=2\sqrt{5}$，

∴ $PD=2$，或 $PD=-10$（舍去），

∴ $PD=2$.

【点睛】此题主要考查相交弦定理和切割线定理的运用．掌握这两个定理的内容是解题的关键.

10.（2022秋·九年级单元测试）如图，$\angle AOB=30^\circ$，$OP=8$，当 $\odot P$ 的半径 r 为何值时，$\odot P$ 与直线 OA 相离？相切？相交？



【答案】见解析

【分析】作 $PN\perp OA$ 于 N，根据含 30° 角的直角三角形的性质得出 $PN=\frac{1}{2}OP=4$，然后根据直线与圆的位置关系的判定方法即可得出结论.

【详解】解：作 $PN\perp OA$ 于 N，如图所示：

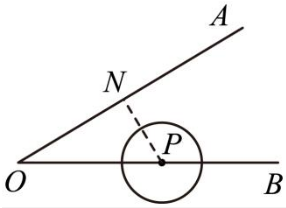
$\because \angle AOB=30^\circ$，

$\therefore PN=\frac{1}{2}OP=4$，

当 $0<r<4$ 时，$\odot P$ 和直线 OA 相离；

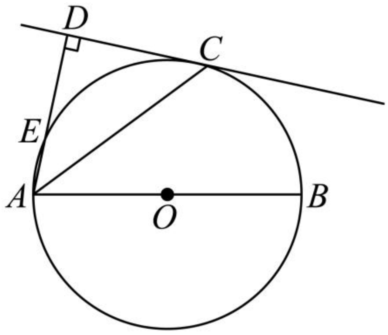
当 $r=4$ 时，$\odot P$ 和直线 OA 相切；

当 $r>4$ 时，$\odot P$ 和直线 OA 相交.



【点睛】本题考查了直线和圆的位置关系、含30°角的直角三角形的性质；设$\odot O$的半径为r，圆心O到直线l的距离为d．若直线l和$\odot O$相交$\Leftrightarrow d<r$；直线l和$\odot O$相切$\Leftrightarrow d=r$；直线l和$\odot O$相离$\Leftrightarrow d>r$．

11．（2023·山东聊城·统考二模）如图，AB是$\odot O$的直径，点C是$\odot O$上一点，AD和过点C的直线互相垂直，垂足为D，AD交$\odot O$于点E，且AC平分$\angle DAB$．



(1)求证：直线CD是$\odot O$的切线；

(2)连接BC，若$BC=3$，$AC=4$，求AE的长．

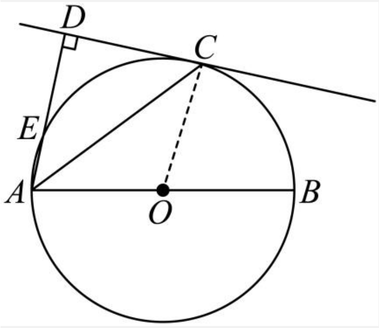
【答案】(1)见解析

(2) $AE=\frac{7}{5}$

【分析】（1）如图所示，连接OC，根据角平分线的定义和等边对等角证明$\angle OCA=\angle CAD$，则$AD \parallel OC$，由$AD\perp CD$，可证$OC\perp CD$，即可证明直线CD是$\odot O$的切线；

（2）先求出$CE=BC=3$，利用勾股定理求出$AB=5$，证明$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$求出$CD=\frac{12}{5}$，利用勾股定理求出$DE=\frac{9}{5}$，$AD=\frac{16}{5}$，则$AE=AD-DE=\frac{7}{5}$．

【详解】（1）证明：如图所示，连接OC，



∵ AC 平分 $\angle DAB$，

∴ $\angle CAD=\angle CAB$，

∵ $OA=OC$，

∴ $\angle OAC=\angle OCA$，

∴ $\angle OCA=\angle CAD$，

∴ $AD\parallel OC$，

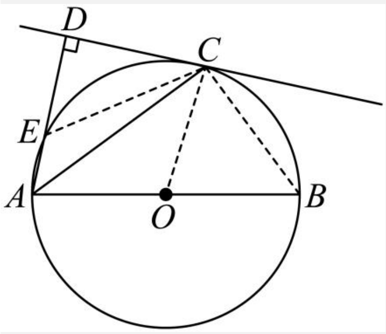
∵ $AD\perp CD$，

∴ $OC\perp CD$，

又∵点 C 在 $\odot O$ 上，

∴直线 CD 是 $\odot O$ 的切线；

（2）解：如图所示，连接 CE，由（1）得 $\angle CAD=\angle CAB$，



∴ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BC}$，

∴ $CE=BC=3$，

∵ AB 是直径，

∴ $\angle ACB=90^\circ$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，$\angle ACB=\angle ADC=90^\circ$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$，

∴ $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{AC}{AB}$，即 $\dfrac{CD}{3}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore CD=\frac{12}{5}$，

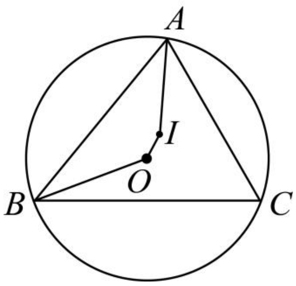
$\therefore DE=\sqrt{CE^2-CD^2}=\frac{9}{5}$， $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{16}{5}$，

$\therefore AE=AD-DE=\frac{7}{5}$.

【点睛】本题主要考查了切线的判定，相似三角形的性质与判定，圆周角定理，等腰三角形的性质与判定，勾股定理等知识，正确作出辅助线是解题的关键.

【知不足】

1.（2023·山东聊城·统考中考真题）如图，点O是$\triangle ABC$外接圆的圆心，点I是$\triangle ABC$的内心，连接OB，IA．若$\angle CAI=35°$，则$\angle OBC$的度数为（　）



A．$15°$　　B．$17.5°$　　C．$20°$　　D．$25°$

【答案】C

【分析】根据三角形内心的定义可得$\angle BAC$的度数，然后由圆周角定理求出$\angle BOC$，再根据三角形内角和定理以及等腰三角形的性质得出答案.

【详解】解：连接OC，

$\because$点I是$\triangle ABC$的内心，$\angle CAI=35°$，

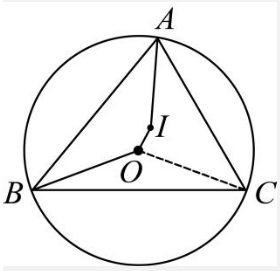
$\therefore \angle BAC=2\angle CAI=70°$，

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=140°$，

$\because OB=OC$，

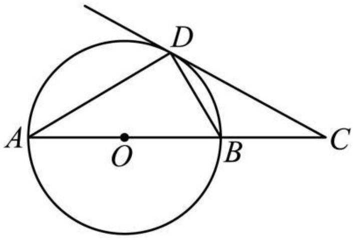
$\therefore \angle OBC=\angle OCB=\frac{180°-\angle BOC}{2}=\frac{180°-140°}{2}=20°$，

故选：C.



【点睛】本题主要考查了三角形内心的定义和圆周角定理，熟知三角形的内心是三角形三个内角平分线的交点是解题的关键.

2.（2023·黑龙江哈尔滨·哈尔滨市第六十九中学校校考模拟预测）如图所示，AB是$\odot O$的直径，点C在AB的延长线上，CD与$\odot O$相切，切点为D，如果$\angle A=35°$，那么$\angle C$等于（　）.

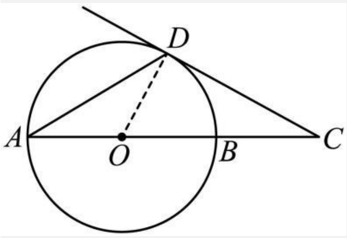


A．15°　　B．20°　　C．35°　　D．55°

【答案】B

【分析】如图：连接OD，由圆周角定理可得$\angle COD=2\angle A=70°$，根据切线的性质定理可得$\angle ODC=90°$，最后根据直角三角形的性质即可解答.

【详解】解：如图，连接OD，则$\angle COD=2\angle A=70°$



∵CD是$\odot O$的切线，

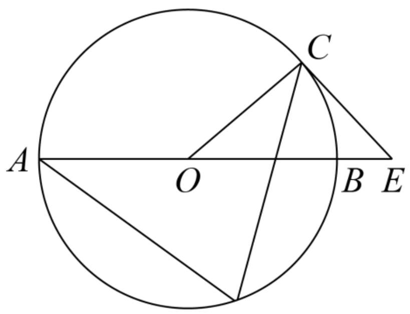
∴$OD\perp CD$，即$\angle ODC=90°$，

∴$\angle C=90°-70°=20°$.

故选B.

【点睛】本题主要考查了圆周角定理、切线的性质定理、直角三角形的性质等知识点，熟练运用相关知识是解题的关键.

3.（2023·江苏·九年级假期作业）如图，已知AB是$\odot O$的直径，点C、D分别在两个半圆上，若过点C的切线与AB 的延长线交于点E，则$\angle D$与$\angle E$的数量关系是（　　）



A．$\angle D+\angle E=90^{\circ}$　　B．$\angle D+2\angle E=180^{\circ}$

C．$2\angle D-\angle E=90^{\circ}$　　D．$2\angle D+\angle E=180^{\circ}$

【答案】C

【分析】连接BC，OC，AC，根据圆周角定理得到$\angle ACB=90^{\circ}$，得到$\angle D=90^{\circ}-\angle BAC=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle COE$，根据切线的性质得到$\angle OCE=90^{\circ}$，求得$\angle COE=90^{\circ}-\angle E$，于是得到结论.

【详解】解：连接BC，OC，AC，

∵AB是$\odot O$的直径，

∴$\angle ACB=90^{\circ}$，

∴$\angle ABC=\angle D=90^{\circ}-\angle BAC$，

∵$OA=OC$，$\angle COE=\angle BAC+\angle ACO$，

∴$\angle BAC=\angle ACO=\frac{1}{2}\angle COE$，

∴$\angle D=90^{\circ}-\angle BAC=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle COE$，

∵CE 是$\odot O$ 的切线，

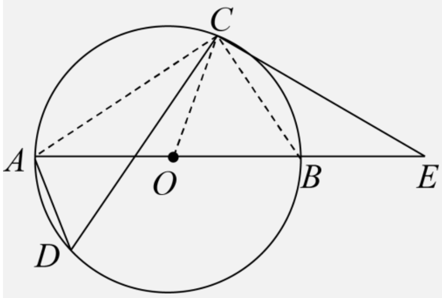
∴$\angle OCE=90^{\circ}$，

∴$\angle COE=90^{\circ}-\angle E$，

∴$\angle D=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle COE=90^{\circ}-\frac{1}{2}\times(90^{\circ}-\angle E)$，

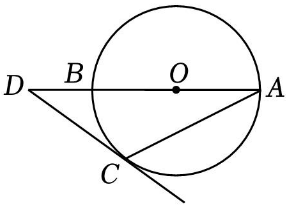
∴$2\angle D-\angle E=90^{\circ}$.

故选：C.



【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，等腰三角形的性质，熟练掌握切线的性质是解题的关键.

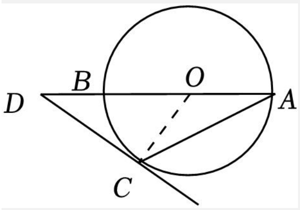
4．（2023·江苏·九年级假期作业）如图，AB 是⊙O 的直径，点 D 在 AB 的延长线上，DC 切⊙O 于点 C，若 $\angle D = 36°$，则 $\angle A$ 的度数为 ＿＿＿＿＿＿.



【答案】27°/27 度

【分析】连接 OC，利用切线的性质得到 $\angle OCD = 90°$，根据三角形内角和定理得到 $\angle DOC = 54°$，即可利用圆周角定理求出 $\angle A$ 的度数.

【详解】解：如图所示，连接 OC，



∵ DC 是⊙O 的切线，

∴ $\angle OCD = 90°$，

∵ $\angle D = 36°$，

∴ $\angle DOC = 180° - \angle D - \angle OCD = 54°$，

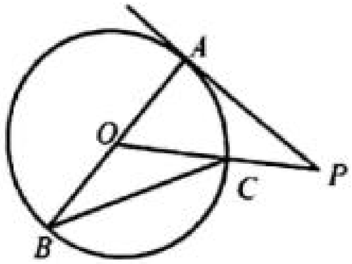
∴ $\angle A = \frac{1}{2}\angle DOC = 27^{\circ}$，

故答案为：27°.

【点睛】本题主要考查了切线的性质，圆周角定理，三角形内角和定理，熟知切线的性质与圆周角定理是解题的关键.

5．（2023·黑龙江·统考中考真题）如图，AB 是⊙O 的直径，PA 切⊙O 于点 A，PO 交⊙O 于

点C，连接BC，若$\angle B=28^\circ$，则$\angle P=$__________°.



【答案】34

【分析】首先根据等边对等角得到$\angle B=\angle OCB=28^\circ$，然后利用外角的性质得到$\angle AOC=\angle B+\angle OCB=56^\circ$，利用切线的性质得到$\angle OAP=90^\circ$，最后利用三角形内角和定理求解即可.

【详解】解：$\because \angle B=28^\circ$，$OB=OC$，

$\therefore \angle B=\angle OCB=28^\circ$，

$\therefore \angle AOC=\angle B+\angle OCB=56^\circ$，

$\because PA$切$\odot O$于点A，

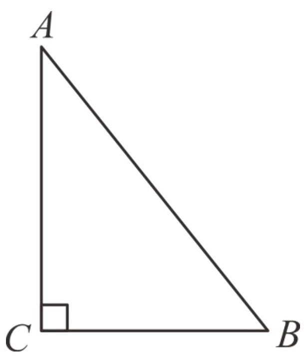
$\therefore \angle OAP=90^\circ$，

$\therefore \angle P=180^\circ-\angle OAP-\angle AOP=34^\circ$.

故答案为：34.

【点睛】此题考查了切线的性质和三角形的外角的性质，三角形内角和定理等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

6.（2023·湖南·统考中考真题）如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ, AC=8, BC=6$．以点$C$为圆心，$r$为半径作圆，当所作的圆与斜边$AB$所在的直线相切时，$r$的值为________.



【答案】$\dfrac{24}{5}$

【分析】根据勾股定理，得$AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$，根据切线的性质，得到圆的半径等于AB边

上的高，根据直角三角形的面积不变性计算即可.

【详解】∵ $\angle ACB = 90°, AC = 8, BC = 6$，

∴ $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$，

根据切线的性质，得到圆的半径等于 AB 边上的高，

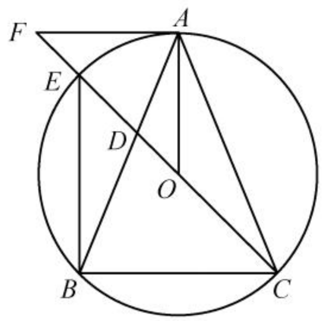
∴ $\frac{1}{2}AB \times r = \frac{1}{2}AC \times BC$，

∴ $r = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5}$，

故答案为：$\frac{24}{5}$.

【点睛】本题考查了勾股定理，切线的性质，熟练掌握勾股定理，切线的性质是解题的关键.

7．（2023·福建·统考中考真题）如图，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O, CO$ 的延长线交 AB 于点 D，交 $\odot O$ 于点 E，交 $\odot O$ 的切线 AF 于点 F，且 $AF \parallel BC$.



(1)求证：$AO \parallel BE$；

(2)求证：AO 平分 $\angle BAC$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】（1）由切线的性质可得 $\angle OAF = 90°$，由圆周角定理可得 $\angle CBE = 90°$，即 $\angle OAF = \angle CBE = 90°$，再根据平行线的性质可得 $\angle BAF = \angle ABC$，则根据角的和差可得 $\angle OAB = \angle ABE$，最后根据平行线的判定定理即可解答；

（2）由圆周角定理可得 $\angle ABE = \angle ACE$，再由等腰三角形的性质可得 $\angle ACE = \angle OAC$，进而得到 $\angle ABE = \angle OAC$，再结合 $\angle OAB = \angle ABE$ 得到 $\angle OAB = \angle OAC$ 即可证明结论.

【详解】（1）证明∵ AF 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $AF \perp OA$，即 $\angle OAF = 90°$.

∵ CE 是 $\odot O$ 的直径，