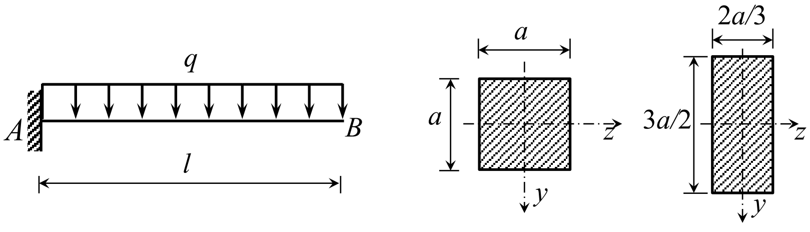
第 15 章　梁的弯曲应力　习题解答

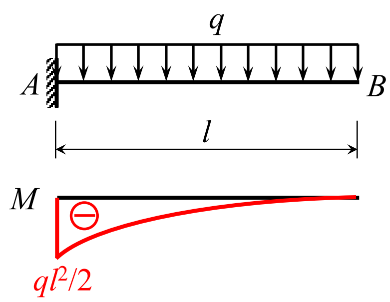
15-1 长度 $l = 1\text{m}$ 的悬臂梁受到 $q = 1\text{kN/m}$ 的均布载荷作用，梁的横截面形状有如图所示的(a)正方形和(b)矩形两种情况，已知 $a = 40\text{mm}$，试计算它们的最大弯曲正应力，并比较后能得出何结论？



题 15-1 解：

弯矩图，如图所示

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2$$



习题 15-1 解答图 弯矩图

正方形截面：

$$\sigma_{\max}^{正方形} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{2}ql^2}{\frac{1}{6}a^3} = \frac{3ql^2}{a^3}$$

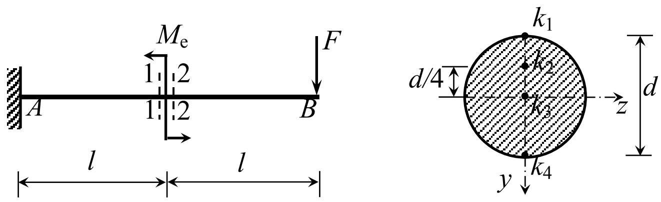
$$= \frac{3\times 1000\times 1^2}{(40\times 10^{-3})^3}\text{Pa} = 46.875\text{MPa}$$

矩形截面：

$$\sigma_{\max}^{矩形} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{2}ql^2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3ql^2}{bh^2} = \frac{3ql^2}{(\frac{2}{3}a)\cdot(\frac{3}{2}a)^2} = \frac{2ql^2}{a^3} = \frac{2\times 1000\times 1^2}{(40\times 10^{-3})^3}\text{Pa} = 31.25\text{MPa}$$

结论：横截面面积相同正方形截面和矩形截面的梁，对于弯曲的正应力强度，后者要好于前者。

15-2 直径为 d 的悬臂梁受如图所示的集中力 F 和集中力偶 M_e 作用，已知 $F = 6\text{kN}$，$M_e = 10\text{kN}$⓾m，$l = 0.5\text{m}$，$d = 80\text{mm}$，试求梁的截面 1-1 和 2-2 上 k_1、k_2、k_3、k_4 各点的弯曲正应力。



(a) (b)

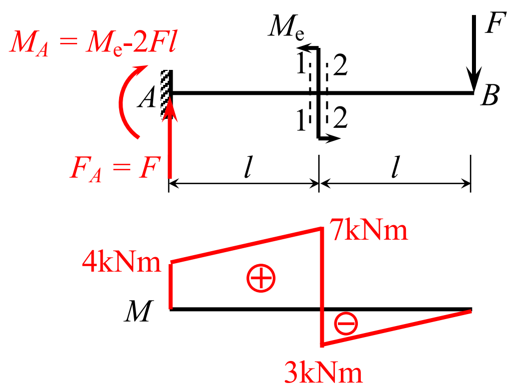
题 15-2 解：

固定端 A 处约束力：

$$F_A = F = 6\text{kN}$$

$$M_A = M_e - 2Fl = 10 - 2\times6\times0.5 = 4\text{kN}\cdot\text{m}$$

弯矩图，如图所示。



习题 15-2 解答图 弯矩图

截面 1-1 的弯矩为

$$M_{1-1} = M_e - Fl = 10 - 6\times0.5 = 7\text{kN}\cdot\text{m}$$

截面 2-2 的弯矩为

$$M_{2-2} = -Fl = -6\times0.5 = -3\text{kN}\cdot\text{m}$$

截面 1-1 上 k_1、k_2、k_3、k_4 各点的弯曲正应力分别为

$$\sigma_{1-1}^{k_1} = \frac{M_{1-1}y_{k_1}}{I_z} = \frac{M_{1-1}\cdot(-\frac{d}{2})}{\frac{\pi d^4}{64}} = -\frac{32M_{1-1}}{\pi d^3} = -\frac{32\times7000}{\pi\times(80\times10^{-3})^3}\text{Pa} = -139.2606\text{MPa}$$

$$\sigma_{1-1}^{k_2} = \frac{M_{1-1}y_{k_2}}{I_z} = \frac{M_{1-1}\cdot(-\frac{d}{4})}{\frac{\pi d^4}{64}} = -\frac{16M_{1-1}}{\pi d^3} = -\frac{16\times7000}{\pi\times(80\times10^{-3})^3}\text{Pa} = -69.6303\text{MPa}$$

$$\sigma_{1-1}^{k_3} = \frac{M_{1-1}y_{k_3}}{I_z} = \frac{M_{1-1}\cdot0}{\frac{\pi d^4}{64}} = 0$$

$$\sigma_{1-1}^{k_4}=\frac{M_{1-1}y_{k_4}}{I_z}=\frac{M_{1-1}\cdot(\frac{d}{2})}{\frac{\pi d^4}{64}}=\frac{32M_{1-1}}{\pi d^3}=\frac{32\times 7000}{\pi\times(80\times 10^{-3})^3}\text{Pa}=139.2606\text{MPa}$$

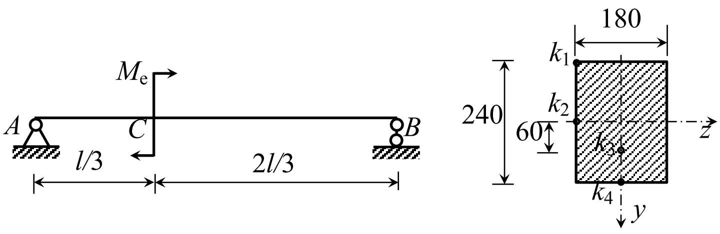
$$\sigma_{2-2}^{k_1}=\frac{M_{2-2}y_{k_1}}{I_z}=\frac{M_{2-2}\cdot(-\frac{d}{2})}{\frac{\pi d^4}{64}}=-\frac{32M_{2-2}}{\pi d^3}=-\frac{32\times(-3000)}{\pi\times(80\times 10^{-3})^3}\text{Pa}=59.6831\text{MPa}$$

$$\sigma_{2-2}^{k_2}=\frac{M_{2-2}y_{k_2}}{I_z}=\frac{M_{2-2}\cdot(-\frac{d}{4})}{\frac{\pi d^4}{64}}=-\frac{16M_{2-2}}{\pi d^3}=-\frac{16\times(-3000)}{\pi\times(80\times 10^{-3})^3}\text{Pa}=29.8416\text{MPa}$$

$$\sigma_{2-2}^{k_3}=\frac{M_{2-2}y_{k_3}}{I_z}=\frac{M_{2-2}\cdot 0}{\frac{\pi d^4}{64}}=0$$

$$\sigma_{2-2}^{k_4}=\frac{M_{2-2}y_{k_4}}{I_z}=\frac{M_{2-2}\cdot(\frac{d}{2})}{\frac{\pi d^4}{64}}=\frac{32M_{2-2}}{\pi d^3}=\frac{32\times(-3000)}{\pi\times(80\times 10^{-3})^3}\text{Pa}=-59.6831\text{MPa}$$

15-3　如图所示矩形截面简支梁,受到集中力偶 M_e 的作用，已知 $M_e = 120$kN⓾m，$l = 1.2$m，试求梁的危险截面上 k_1、k_2、k_3、k_4 各点的弯曲正应力和弯曲切应力。



(a)　　单位: mm　(b)

题 15-3 解：

矩形截面：$b = 180$mm，$h = 240$mm

约束力：$F_A = \dfrac{M_e}{l}$（↓），$F_B = \dfrac{M_e}{l}$（↑）

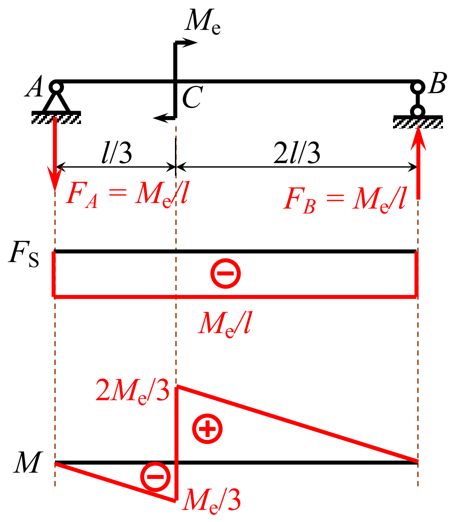
剪力图和弯矩图，如图所示。

危险截面为 C^+ 截面，

其上内力分量为

$$F_S = -\frac{M_e}{l}, \quad M_{C^+} = \frac{2}{3}M_e$$

危险截面 C^+ 上 k_1、k_2、k_3、k_4 各点的弯曲正应力和弯曲切应力分别为



习题 15-3 解答图

$$\sigma_{C^+}^{k_1} = \frac{M_{C^+} y_{k_1}}{I_z} = \frac{M_{C^+}\cdot(-\frac{h}{2})}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{6M_{C^+}}{bh^2} = -\frac{4M_e}{bh^2} = -\frac{4\times120\times10^3}{180\times240^2\times10^{-9}}\text{Pa}$$

$= -46.2963$MPa

$$\sigma_{C^+}^{k_2} = \frac{M_{C^+} y_{k_2}}{I_z} = \frac{M_{C^+}\cdot 0}{I_z} = 0$$

$$\sigma_{C^+}^{k_3} = \frac{M_{C^+} y_{k_3}}{I_z} = \frac{M_{C^+}\cdot\frac{h}{4}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3M_{C^+}}{bh^2} = \frac{2M_e}{bh^2} = \frac{2\times120\times10^3}{180\times240^2\times10^{-9}}\text{Pa}$$

$= 23.1481$MPa

$$\sigma_{C^+}^{k_4}=\frac{M_{C^+}y_{k_4}}{I_z}=\frac{M_{C^+}\cdot\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}}=\frac{6M_{C^+}}{bh^2}=\frac{4M_e}{bh^2}=\frac{4\times120\times10^3}{180\times240^2\times10^{-9}}\text{Pa}$$

$$=46.2963\text{MPa}$$

$S_{z,k_1}^*=0$， $S_{z,k_2}^*=\frac{1}{2}bh\times\frac{1}{4}h=\frac{1}{8}bh^2$， $S_{z,k_3}^*=\frac{1}{4}bh\times\frac{3}{8}h=\frac{3}{32}bh^2$， $S_{z,k_4}^*=0$

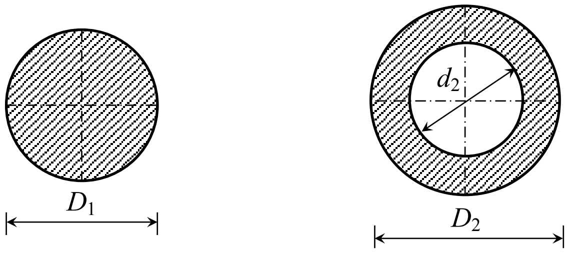
$$\tau_{C^+}^{k_1}=\frac{F_S S_{z,k_1}^*}{I_z b}=\frac{F_S\times0}{I_z b}=0$$

$$\tau_{C^+}^{k_2}=\frac{F_S S_{z,k_2}^*}{I_z b}=\frac{-\frac{M_e}{l}\cdot\frac{1}{8}bh^2}{\frac{1}{12}bh^3\cdot b}=-\frac{3M_e}{2bhl}=-\frac{3\times120\times10^3}{2\times180\times240\times10^{-6}\times1.2}\text{Pa}=-3.4722\text{MPa}$$

$$\tau_{C^+}^{k_3}=\frac{F_S S_{z,k_3}^*}{I_z b}=\frac{-\frac{M_e}{l}\cdot\frac{3}{32}bh^2}{\frac{1}{12}bh^3\cdot b}=-\frac{9M_e}{8bhl}=-\frac{9\times120\times10^3}{8\times180\times240\times10^{-6}\times1.2}\text{Pa}=-2.6042\text{MPa}$$

$$\tau_{C^+}^{k_4}=\frac{F_S S_{z,k_4}^*}{I_z b}=\frac{F_S\times0}{I_z b}=0$$

15-4　承受弯曲的梁横截面初始设计为直径 $D_1 = 50\text{mm}$ 的实心圆，某人建议，不改变梁的其他条件，仅将横截面改为内、外径之比 $\frac{d_2}{D_2}=0.6$ 的空心圆，且横截面积不变，可降低梁中应力，提高承载能力。你能通过计算，给出这两种截面的最大弯曲正应力之比 $\frac{\sigma_{2\max}}{\sigma_{1\max}}$，用数据支持某人的建议吗？



题 15-4 解：

实心圆横截面的面积　$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$

空心圆横截面的面积　$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4}(1-\alpha^2)$，其中 $\alpha = \frac{d_2}{D_2} = 0.6$

由于　$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4}(1-\alpha^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{D_1}{D_2} = (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$

$\sigma_{1\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z1}} = \frac{32M_{\max}}{\pi D_1^3}$，　$\sigma_{2\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z2}} = \frac{32M_{\max}}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}$

则　$\frac{\sigma_{2\max}}{\sigma_{1\max}} = \frac{\frac{32M_{\max}}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}}{\frac{32M_{\max}}{\pi D_1^3}} = \frac{D_1^3}{D_2^3(1-\alpha^4)} = \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{1-\alpha^4} = \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{1+\alpha^2} = \frac{(1-0.6^2)^{\frac{1}{2}}}{1+0.6^2} = \frac{0.8}{1.36}$

$= \frac{10}{17}$

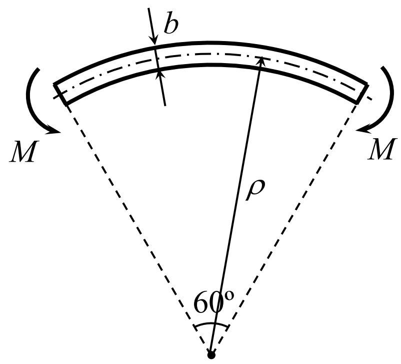
结论：横截面为空心圆的弯曲梁要好于实心圆，提高了承载能力。

15-5 长度为 $l=250\text{mm}$，截面尺寸 $b\times h=0.8\text{mm}\times 25\text{mm}$ 的钢板尺由两端外力偶作用弯成 60°的圆弧，已知钢的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，试求钢板尺横截面上的最大正应力。

题 15-5 解：

1. 求弯曲后的曲率：

$$\rho\theta=l \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\rho}=\frac{\theta}{l}=\frac{\pi}{3l}$$



习题 15-5 解答图

2. 求弯矩：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \quad\Rightarrow\quad M=\frac{EI_z}{\rho}=\frac{\pi EI_z}{3l}$$

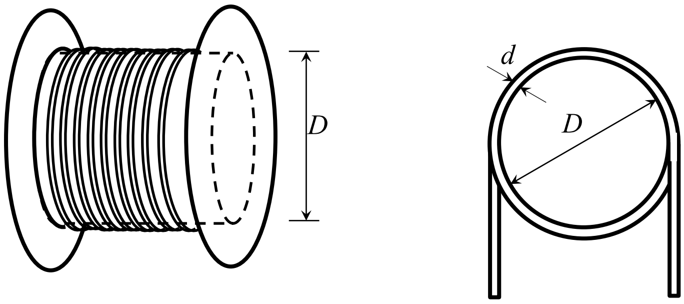
3. 求弯曲后横截面上的最大正应力：

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{\pi EI_z}{3lW_z}=\frac{\pi E\cdot\dfrac{hb^3}{12}}{3l\cdot\dfrac{hb^2}{6}}=\frac{\pi Eb}{6l}=\frac{\pi\times 200\times 10^3\times 0.8}{6\times 250}\text{MPa}=335.1032\text{MPa}$$

或者

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{\pi EI_z}{3lW_z}=\frac{\pi E\cdot\dfrac{bh^3}{12}}{3l\cdot\dfrac{bh^2}{6}}=\frac{\pi Eh}{6l}=\frac{\pi\times 200\times 10^3\times 25}{6\times 250}\text{MPa}=10471.9755\text{MPa}$$

15-6　在直径 $D=2.5\text{m}$ 的刚性圆轮上绕有直径 $d=3\text{mm}$ 的钢缆，已知钢缆的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，屈服极限 $\sigma_{\text{S}}=275\text{MPa}$，试求钢缆中的最大弯曲正应力，并确定能使盘绕在圆轮上的钢缆不发生塑性变形的最小圆轮直径 $D_{\min}$。



题 15-6 解：

钢缆弯曲后的曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{2}D$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \quad\Rightarrow\quad M=\frac{EI_z}{\rho}=\frac{2EI_z}{D}$$

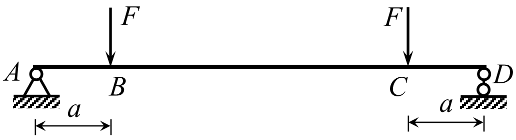
$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{2EI_z}{DW_z}=\frac{2E\cdot\dfrac{\pi d^4}{64}}{D\cdot\dfrac{\pi d^3}{32}}=\frac{Ed}{D}=\frac{210\times10^3\times3}{2.5\times10^3}\text{MPa}=252\text{MPa}$$

钢缆不发生塑性变形的条件为 $\sigma_{\max}=\dfrac{Ed}{D}\le\sigma_{\text{s}} \quad\Rightarrow$

$$D\ge\frac{Ed}{\sigma_{\text{s}}}=\frac{210\times10^3\times3}{275}\text{mm}=2.2909\text{m}$$

所以钢缆不发生塑性变形的最小圆轮直径为 $D_{\min}=2.2909\text{m}$

15-7　直径 $d=30\text{mm}$ 的圆截面简支梁，受如图所示的两个相同的集中力 F 作用，现需要使梁中间的 BC 段轴线弯曲成为曲率半径 ρ=40m 的圆弧，已知材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，$a=0.5\text{m}$，试求施加的两个集中力 F 的大小。此时梁中的最大弯曲正应力为多少？



题 15-7 解：

BC 段为纯弯曲，其弯矩为 $M=Fa$

因为 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad M=\dfrac{EI_z}{\rho}=Fa \quad \Rightarrow$

$$F=\frac{EI_z}{\rho a}=\frac{E\cdot\frac{\pi d^4}{64}}{\rho a}=\frac{E\cdot\pi d^4}{64\rho a}=\frac{200\times10^9\times\pi\times(30\times10^{-3})^4}{64\times40\times0.5}\text{N}=397.6078\text{N}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{EI_z}{\rho W_z}=\frac{E\cdot\frac{\pi d^4}{64}}{\rho\cdot\frac{\pi d^3}{32}}=\frac{Ed}{2\rho}=\frac{200\times10^3\times30}{2\times40\times10^3}\text{MPa}=75\text{MPa}$$