辽宁省部分重点中学协作体2024年高考模拟考试

数 学

本试卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第I卷

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

1. 已知集合$A=\left\{x|\ \ln\left(x-2\right)\le 0\right\},B=\left\{y|\ y=2^x-1,x\in A\right\}$，则$A\cup B=$（　　）

A. $\left(2,3\right]$　　B. $\left(2,7\right]$　　C. $\left(-1,7\right]$　　D. $\left(-1,+\infty\right)$

2. 已知$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(-\alpha\right)-\sin\left(\pi-\alpha\right)}=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

3. 下列函数中，既是定义域上的奇函数又存在极小值的是（　　）

A. $f\left(x\right)=x\sin x$　　B. $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$

C. $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$　　D. $f\left(x\right)=\left|x+1\right|-\left|x-1\right|$

4. 第33届夏季奥运会将于2024年7月26日至8月11日在法国巴黎举行，中国队将派甲、乙、丙、丁4名男子短跑运动员参加男子$4\times100\mathrm{m}$接力比赛，如果甲不能跑第一棒，乙不能跑第四棒，参赛方法共有（　　）种

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 18

5. 我国古代数学名著《算法统宗》中说：九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠；次第每人多十七，要将第八数来言；务要分明依次第，孝和休惹外人传.说的是，有996斤棉花要赠送给8个子女做旅费，从第1个孩子开始，以后每人依次多17斤，直到第8个孩子为止……，根据这些信息第三个孩子分得（

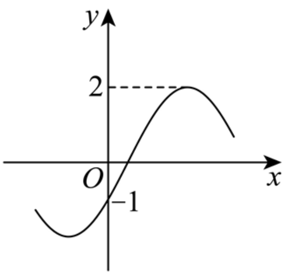
）斤棉花？

A. 99　　B. 116　　C. 133　　D. 150

6. 已知 z_1, z_2 是复数，满足 $\left|z_1+z_2\right|=4$ ，$\left|z_1\right|=3$ ，$\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{10}$ ，则 $\left|z_1 \cdot z_2\right|=$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 6

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0, \omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $f(x)$ 的振幅是 2，初相是 $\frac{\pi}{6}$

B. 若函数 $f(x)$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 后，对应函数为奇函数，则 $\omega=2$

C. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围为 $\left[2, \frac{10}{3}\right]$

D. 若函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 中心对称，则函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 的最小值为 7π

8. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点，且 $\angle F_1AF_2=60°, 3\left|AF_2\right|=5\left|BF_2\right|$ ，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分分，有选错的得 0 分

9. 甲乙两名同学参加系列知识问答节目，甲同学参加了 5 场，得分是 3，4，5，5，8，乙同学参加了 7 场，得分是 3，3，4，5，5，7，8，那么有关这两名同学得分数据下列说法正确的是（　　）

A. 得分的中位数甲比乙要小　　B. 两人的平均数相同

C. 两人得分的极差相同　　D. 得分的方差甲比乙小

10. 已知函数 $f\left(x\right)=ax-\ln x, g\left(x\right)=a\ln x+\dfrac{1}{x}, a$ 为实数，下列说法正确的是（　　）

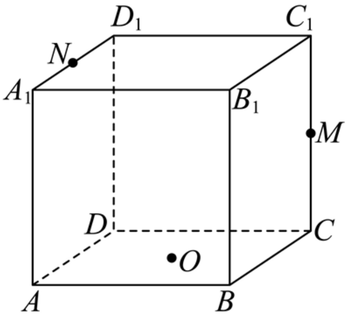
A. 当 $a=1$ 时，则 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 有相同的极值点和极值

B. 存在 $a\in \mathrm{R}$，使 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的零点同时为 2 个

C. 当 $a\in\left(0,1\right)$ 时，$f\left(x\right)-g\left(x\right)\le 1$ 对 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$ 恒成立

D. 若函数 $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ 在 $\left[1,\mathrm{e}\right]$ 上单调递减，则 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{e}\right]$

11. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M, N 分别为 CC_1, A_1D_1 的中点，O 为面 $ABCD$ 的中心，则以下命题正确的是（　　）



A. 平面 BMD_1 截正方体所得的截面面积为 $2\sqrt{6}$

B. 四面体 $BCMN$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{45\pi}{4}$

C. 四面体 OMB_1N 的体积为 $\dfrac{7}{6}$

D. 若点 P 为 AB 的中点，则存在平面 BCC_1B_1 内一点 Q，使直线 MQ 与 PN 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 若“$\exists x\in\left(0,+\infty\right)$，使 $x^2-ax+4<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围为__________.

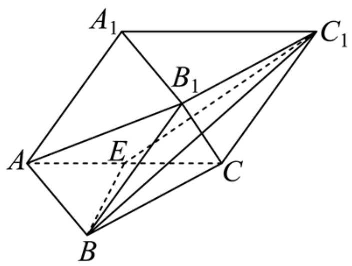
13. 已知抛物线 $C:x^2=4y$，圆 $O:x^2+y^2=1$，直线 l 与抛物线 C 和圆 O 分别切于 P、Q 两点，则点 P 的纵坐标为__________.

14. 一个书包中有标号为“$1,1,2,2,3,3,\cdots,n,n$”的 $2n$ 张卡片.一个人每次从中拿出一张卡片，并且不放回；如果他拿出一张与已拿出的卡片中有相同标号的卡片，则他将两张卡片都扔掉；如果他手中有 3

张单张卡片或者书包中卡片全部被拿走，则操作结束.记书包中卡片全部被拿走的概率为P_n，则$P_3 =$ __________. $P_7 =$ __________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$ACC_1A_1 \perp$底面$ABC, AC = AA_1 = 2$，$AB = 1, BC = \sqrt{3}$，点E为线段AC的中点.



（1）求证：$AB_1 \parallel$平面BEC_1；

（2）若$\angle A_1AC = \frac{\pi}{3}$，求二面角$A-BE-C_1$的余弦值.

16. 随着中国科技的进步，涌现了一批高科技企业，也相应产生了一批高科技产品，在城市S，生产某高科技产品X的本地企业有甲、乙两个，城市S的高科技产品X的企业市场占有率和指标T的优秀率如下表：

	市场占有率	指标T的优秀率
企业甲	50%	80%
企业乙	30%	40%
其它	20%	40%

（1）从城市S的高科技产品X的市场中随机选一件产品，求所选产品的指标T为优秀的概率；

（2）从城市S的高科技产品X的市场中随机选一件产品，若已知所选产品的指标T为优秀，求该产品是产自企业甲的概率；

（3）从城市S的高科技产品X的市场中依次取出 6 件指标T为优秀的产品，若已知 6 件产品中恰有 4 件产品产自企业甲，记离散型随机变量ξ表示这 6 件产品中产自企业乙的件数，求ξ的分布列和数学期望.

17. 已知$f(x) = (x-1)e^x + \frac{1}{2}ax^2$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，证明：函数 $f\left(x\right)$ 有且仅有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1+x_2<0$.

18. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 为椭圆 C 上的一个动点，直线 PF_1 与椭圆 C 的另一个交点为 A，直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 B，设 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1A}$，$\overrightarrow{PF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2B}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）证明：$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值；

（3）已知 $y_0>0$，用 x_0,y_0 表示 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}$，并求出 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

19. 若实数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n+a_{n+2}\geq 2a_{n+1}$，称数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“T 数列”.

（1）判断 $a_n=n^2,b_n=\ln n$ 是否为“T 数列”，并说明理由；

（2）若数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“T 数列”，证明：对于任意正整数 k,m,n，且 $k<m<n$，都有 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\geq\dfrac{a_m-a_k}{m-k}$

（3）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“T 数列”，且 $\sum\limits_{i=1}^{2024}a_i=0$.令 $M=\max\left\{\left|a_1\right|,\left|a_{2024}\right|\right\}$，其中 $\max\left\{a,b\right\}$ 表示 a,b 中的较大者.证明：$\forall k\in\left\{1,2,3,\cdots,2024\right\}$，都有 $-\dfrac{2025}{2023}M\leq a_k\leq M$.

参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|\ \ln\left(x-2\right)\leq 0\right\},B=\left\{y\middle|\ y=2^x-1,x\in A\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\left(2,3\right]$　　B. $\left(2,7\right]$　　C. $\left(-1,7\right]$　　D. $\left(-1,+\infty\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数式有意义、对数函数的单调性以及指数函数值域的解法，结合并集的定义即可求解.

【详解】要使函数 $y=\ln(x-2)$ 有意义，则 $x-2>0$，解得 $x>2$，

显然函数 $y=\ln(x-2)$ 在区间上 $(2,+\infty)$ 上单调递增，且 $\ln 1=0$，

所以 $A=\{x\mid \ln(x-2)\le 0\}$，只需 $0<x-2\le 1$，解得 $2<x\le 3$

另函数 $y=2^x-1$ 在区间 $(2,3]$ 上单调递增，

则 $3=2^2-1<y\le 2^3-1=7$，

所以 $B=\{x\mid 3<x\le 7\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid 2<x\le 3\}\cup\{x\mid 3<x\le 7\}=\{x\mid 2<x\le 7\}$.

故选：B.

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)}=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】由三角函数的诱导公式和弦切关系化简可得.

【详解】$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$，

故选：D.

3. 下列函数中，既是定义域上的奇函数又存在极小值的是（　　）

A. $f(x)=x\sin x$　　B. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

C. $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$　　D. $f(x)=|x+1|-|x-1|$

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数的奇函数和极值点的概念，结合导数，逐项分析判断即可得解.

【详解】对 A，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，不符题意；

对 B，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=-x-\dfrac{1}{x}=-f(x)$ 为奇函数，

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=0$，得 $x=\pm1$，

当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，

故 $f(1)$ 的极小值，故 B 正确；

对 C，$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=f(x)$ 为偶函数，不符题意；

对 D，$f(x)=\begin{cases}2,x>1\\2x-2,-1\le x\le1\\-2,x<-1\end{cases}$ 无极值，不符题意，

故选：B

4. 第 33 届夏季奥运会将于 2024 年 7 月 26 日至 8 月 11 日在法国巴黎举行，中国队将派甲、乙、丙、丁 4 名男子短跑运动员参加男子 $4\times100\text{m}$ 接力比赛，如果甲不能跑第一棒，乙不能跑第四棒，参赛方法共有（　　）种

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 18

【答案】C

【解析】

【分析】先分两类，一类是甲跑第四棒，另一类是甲跑第二或第三棒，分类求解即可得到结果.

【详解】当甲跑第四棒时，参赛方法有：$\mathrm{A}_3^3=3\times2\times1=6$ 种；

当甲跑第二或第三棒时，参赛方法有：$\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2=2\times2\times2=8$ 种；

显然 $6+8=14$，参赛方法共有 14 种.

故选：C.

5. 我国古代数学名著《算法统宗》中说：九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠；次第每人多十七，要将第八数来言；务要分明依次第，孝和休惹外人传.说的是，有 996 斤棉花要赠送给 8 个子女做旅费，从第 1 个孩子开始，以后每人依次多 17 斤，直到第 8 个孩子为止……，根据这些信息第三个孩子分得（　　）斤棉花？

A. 99　　B. 116　　C. 133　　D. 150

【答案】A

【解析】

【分析】先将问题情境转化为等差数列模型解决，其中996为其前8项的和，17为其公差，再由等差数列的通项公式及其前n项和公式求解即可.

【详解】依题意得，八个子女所得棉花斤数依次构成等差数列，

设该等差数列为$\{a_n\}$，公差为d，前n项和为S_n，第一个孩子所得棉花斤数为a_1，

则由题意得：$d=17, S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}\times 17=996$，

解得：$a_1=65$，

所以$a_3=a_1+(3-1)d=65+2\times 17=99$.

故选：A

6. 已知z_1, z_2是复数，满足$|z_1+z_2|=4$，$|z_1|=3$，$|z_1-z_2|=\sqrt{10}$，则$|z_1\cdot z_2|=$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的运算法则，利用$|z|^2=z\overline{z}$和$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$进行计算即可.

【详解】因为$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot\overline{z_1+z_2}=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})$，

且$|z_1+z_2|=4$，$|z_1|=3$，

即$|z_1+z_2|^2=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=9+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=16$，

得$|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=7$；

同理因为$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\cdot\overline{z_1-z_2}=(z_1-z_2)\cdot(\overline{z_1}-\overline{z_2})$，且$|z_1-z_2|=\sqrt{10}$，

即$|z_1-z_2|^2=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=9+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=10$，

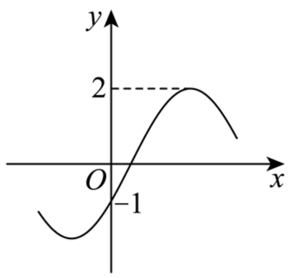
得：$|z_2|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=1$；

联立可得：$|z_2|^2=4$，$|z_2|=2$，

$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=3\times 2=6$.

故选：D.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $f\left(x\right)$ 的振幅是 2，初相是 $\dfrac{\pi}{6}$

B. 若函数 $f\left(x\right)$ 的图象上的所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 后，对应函数为奇函数，则 $\omega=2$

C. 若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围为 $\left[2,\dfrac{10}{3}\right]$

D. 若函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $\left(\dfrac{7\pi}{12},0\right)$ 中心对称，则函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 T 的最小值为 7π

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数图象得到 A，由 $f\left(0\right)=-1$ 求出 φ，即可得到 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，再根据正弦函数的性质一一判断即可.

【详解】由图可知 $A=2$，且 $f\left(0\right)=2\sin\varphi=-1$，即 $\sin\varphi=-\dfrac{1}{2}$，

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

故函数 $f\left(x\right)$ 的振幅是 2，初相是 $-\dfrac{\pi}{6}$，故 A 错误；

将 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象上的所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 得到

$y=2\sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{12}\omega-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

依题意 $\dfrac{\pi}{12}\omega-\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathrm{N}$，解得 $\omega=2+12k,k\in\mathrm{N}$，故 B 错误；

若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 $\frac{T}{2}\geq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $T\geq\frac{\pi}{3}$，则 $\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega}\geq\frac{\pi}{3}\\ \omega>0\end{cases}$，解得 $0<\omega\leq6$，

又 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\leq\frac{11\pi}{6}$，所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $2\leq\omega\leq\frac{10}{3}$，

即函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围为 $\left[2,\frac{10}{3}\right]$，故 C 正确；

若函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 中心对称，则 $\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

解得 $\omega=\frac{2}{7}+\frac{12}{7}k,k\in\mathrm{Z}$，

又 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2}{7}+\frac{12}{7}k,k\in\mathrm{N}$，又函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，显然 T 没有最小值，故 D 错误.

故选：C

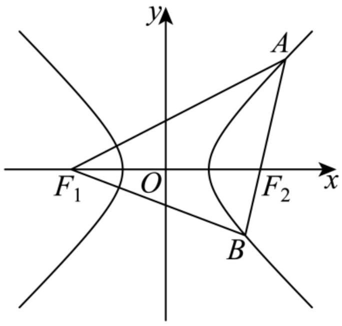
8. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点，且 $\angle F_1AF_2=60°,3\left|AF_2\right|=5\left|BF_2\right|$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，由双曲线的定义分别表示出 $\left|AF_1\right|,\left|BF_1\right|$，再结合余弦定理代入计算，由双曲线的离心率公式代入计算，即可得到结果.

【详解】

设$\left|AF_2\right|=5m\left(m>0\right)$，则$\left|BF_2\right|=3m$，

由双曲线的定义可得$\left|AF_1\right|=\left|AF_2\right|+2a=5m+2a$，

$\left|BF_1\right|=\left|BF_2\right|+2a=3m+2a$，

在$\triangle F_1AF_2$中，由余弦定理可得$\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{\left(5m+2a\right)^2+\left(5m\right)^2-\left(2c\right)^2}{2\left(5m+2a\right)\times 5m}$，

化简可得$25m^2+10ma=4c^2-4a^2$①，

在$\triangle BF_1A$中，由余弦定理可得$\cos\angle F_1AB=\dfrac{\left(5m+2a\right)^2+\left(8m\right)^2-\left(3m+2a\right)^2}{2\left(5m+2a\right)\times 8m}$，

化简可得$5m^2=ma$，即$a=5m$②，

联立①②可得$\begin{cases}a=5m\\ c=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}m\end{cases}$，则双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\frac{5\sqrt{7}}{2}m}{5m}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：B

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分

9. 甲乙两名同学参加系列知识问答节目，甲同学参加了 5 场，得分是 3，4，5，5，8，乙同学参加了 7 场，得分是 3，3，4，5，5，7，8，那么有关这两名同学得分数据下列说法正确的是（　　）

A. 得分的中位数甲比乙要小　　B. 两人的平均数相同

C. 两人得分的极差相同　　D. 得分的方差甲比乙小

【答案】BCD

【解析】

【分析】由中位数，极差的概念即可判断 AC，由平均数、方差计算公式可分别判断 BD.

【详解】对于 A，甲的得分中位数是 5，乙的得分中位数是 5，故 A 错误；

对于 B，甲的得分平均数是$\frac{3+4+5+5+8}{5}=\frac{25}{5}=5$，乙的得分平均数是$\frac{3+3+4+5+5+7+8}{7}=5$，故 B 正确；

对于 C，甲的得分极差是$8-3=5$，乙的得极差是$8-3=5$，故 C 正确；

对于 D，甲的得分方差是$\frac{1}{5}\times\left[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(8-5)^2\right]=\frac{14}{5}$，

乙的得方差是

$\frac{1}{7}\times\left[(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2\right]=\frac{22}{7}>3>\frac{14}{5}$，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 已知函数$f(x)=ax-\ln x, g(x)=a\ln x+\frac{1}{x}, a$为实数，下列说法正确的是（　　）

A. 当$a=1$时，则$f(x)$与$g(x)$有相同的极值点和极值

B. 存在$a\in\mathrm{R}$，使$f(x)$与$g(x)$的零点同时为 2 个

C. 当$a\in(0,1)$时，$f(x)-g(x)\leq 1$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立

D. 若函数$f(x)-g(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上单调递减，则a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$

【答案】AC

【解析】

【分析】对于 A，分别各自求导，结合导数与函数极值的关系即可判断；对于 B，分别求出$f(x)$与$g(x)$的零点为 2 个时a的范围，看它们的交集是否为空集即可判断；对于 C，构造函数$F(x)=f(x)-g(x)=ax-\ln x-a\ln x-\frac{1}{x}, x\in[1,\mathrm{e}], a\in(0,1)$，求导，对$a$分类讨论，只需判断$F(x)_{\max}\leq 1$是否成立即可；对于 D，原问题等价于$F'(x)=\frac{(x-1)(ax-1)}{x^2}\leq 0$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，从而即可进一步求解.

【详解】对于 A，当$a=1$时，

$f(x)=x-\ln x, g(x)=\ln x+\frac{1}{x},(x>0), f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}, g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当$0<x<1$时，有$f'(x)<0, g'(x)<0$，此时$f(x), g(x)$均单调递减，

当$x>1$时，有$f'(x)>0, g'(x)>0$，此时$f(x), g(x)$均单调递增，

所以当$x=1$时，$f\left(x\right),g\left(x\right)$均各自取到相应的极值，且$f\left(1\right)=g\left(1\right)=1$，

所以当$a=1$时，则$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$有相同的极值点和极值，故A正确；

$f\left(x\right)=ax-\ln x=0\Leftrightarrow a=\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right),g\left(x\right)=a\ln x+\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{x\ln x}\left(x>0,x\neq 1\right)$，

令$u\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right),v\left(x\right)=-\dfrac{1}{x\ln x}\left(x>0,x\neq 1\right)$，

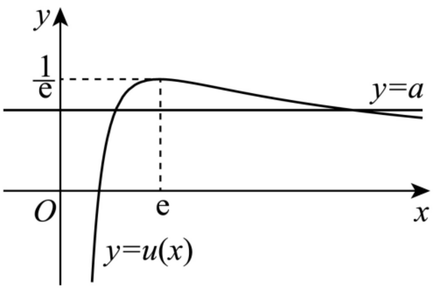
$u'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$v'\left(x\right)=\dfrac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}$，

当$0<x<\mathrm{e}$时，$u'\left(x\right)>0$，$u\left(x\right)$单调递增，当$x>\mathrm{e}$时，$u'\left(x\right)<0$，$u\left(x\right)$单调递减，

当$x\to 0$时，$u\left(x\right)\to -\infty$，当$x\to +\infty$，$u\left(x\right)\to 0$，

当$x=\mathrm{e}$时，$u\left(x\right)$有极大值，$u\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

在同一平面直角坐标系中，画出直线$y=a$的图象与函数$u\left(x\right)$的图象，如图所示，



所以方程$a=\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right)$有两个根当且仅当$0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

当$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$v'\left(x\right)<0$，$v\left(x\right)$单调递减，当$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<1$时，$v'\left(x\right)>0$，$v\left(x\right)$单调递增，

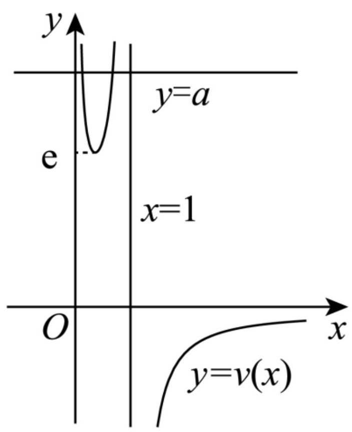
当x从1的左边趋于1时，$v\left(x\right)$趋于正无穷，当x从1的右边趋于1时，$v\left(x\right)$趋于负无穷，

当$x>1$时，$v'\left(x\right)>0$，$v\left(x\right)$单调递增，

令$x=\mathrm{e}^t,t\to -\infty$，则$x\to 0$，$v\left(x\right)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\to -\infty$，当$x\to +\infty$时，$u\left(x\right)\to 0$，

当$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$v\left(x\right)$有极小值，$v\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}$，

在同一平面直角坐标系中，画出直线$y=a$的图象与函数$v\left(x\right)$的图象，如图所示，



方程$a=-\dfrac{1}{x\ln x}\left(x>0,x\neq 1\right)$有两个根当且仅当$a>\mathrm{e}$，

综上所述，不存在$a\in\mathrm{R}$，使$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$的零点同时为 2 个，故 B 错误；

设$F\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=ax-\ln x-a\ln x-\dfrac{1}{x},x\in\left[1,\mathrm{e}\right],a\in\left(0,1\right)$，

$F\left(1\right)=a-1<0<1,F\left(\mathrm{e}\right)=a\mathrm{e}-\ln\mathrm{e}-a\ln\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=a\left(\mathrm{e}-1\right)-1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}-1-1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，

$F'\left(x\right)=a-\dfrac{a+1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax^2-\left(a+1\right)x+1}{x^2}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(ax-1\right)}{x^2}$，

当$x\in\left[1,\mathrm{e}\right],a\in\left(0,1\right)$时，显然$\dfrac{1}{a}>1$，

若$1<\dfrac{1}{a}<\mathrm{e}$，即$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，在此情况下：

当$1<x<\dfrac{1}{a}$时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减，当$\dfrac{1}{a}<x<\mathrm{e}$时，$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$单调递增，

$F\left(\dfrac{1}{a}\right)=a\cdot\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}-a\ln\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}=1+\left(a+1\right)\ln a-a\leq F\left(x\right)\leq\max\left\{F\left(1\right),F\left(\mathrm{e}\right)\right\}<1$，

即在$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$的情况下，$f\left(x\right)-g\left(x\right)\leq 1$对$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$恒成立，

若$\dfrac{1}{a}\geq\mathrm{e}$，即$0<a\leq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，在此情况下：

当$1<x<\mathrm{e}$时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减，

所以$F\left(x\right)<F\left(1\right)<0<1$，

所以在$0<a\leq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$的情况下，$f\left(x\right)-g\left(x\right)\leq 1$对$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$恒成立，

综上所述，当$a\in(0,1)$时，$f(x)-g(x)\le 1$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，故C正确；

对于D，若函数$f(x)-g(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上单调递减，

这意味着$F'(x)=\dfrac{(x-1)(ax-1)}{x^2}\le 0$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，

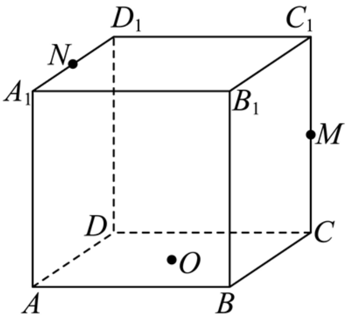
也就是说$ax-1\le 0$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，即$a\le\dfrac{1}{x}$对$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，

注意到$y=\dfrac{1}{x}$在$[1,\mathrm{e}]$上单调递减，

所以$a\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，也就是说$a$的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$，故D错误.

故选：AC.

11. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M,N分别为CC_1,A_1D_1的中点，O为面$ABCD$的中心，则以下命题正确的是（　　）



A. 平面BMD_1截正方体所得的截面面积为$2\sqrt{6}$

B. 四面体$BCMN$的外接球的表面积为$\dfrac{45\pi}{4}$

C. 四面体OMB_1N的体积为$\dfrac{7}{6}$

D. 若点P为AB的中点，则存在平面BCC_1B_1内一点Q，使直线MQ与PN所成角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】选项A，取AA_1中点H，连接D_1H,BH，利用正方体的性质，得出平面BMD_1截正方体所得的截面为菱形BMD_1H，即可求解；选项B，建立空间直角坐标系，直接求出球心坐标，从而求出半径，即可求解；选项C，取BC中点E，BE中点H连接DE,OH，根据条件证得$OH//$面MB_1N，从而有