

2024 年江苏高考数学真题及答案

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 则 $z =$ ()
A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$
3. 已知向量 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 若 $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$, 则 $x =$ ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ ()

C. $P(Y > 2) > 0.5$

D. $P(Y > 2) < 0.8$


10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则 ()

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$

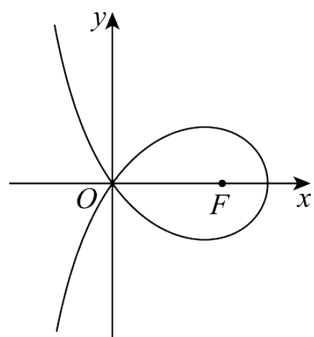
C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$

D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$

11. 造型  可以做成美丽的丝带, 将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O 且 C

上的点满足横坐标大于 -2 , 到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a < 0)$ 的距离之积为 4,

则 ()



A. $a = -2$

B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时,

$$y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为_____.

13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8, 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1

分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$,

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$$

(1) 求 B ;

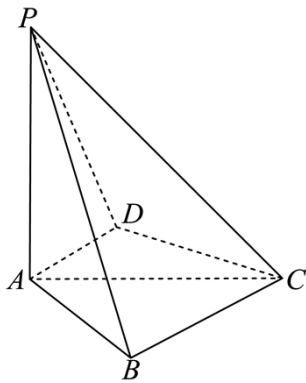
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. 已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1, AB = \sqrt{3}$.



(1) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .

18. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

(1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

19. 设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 d 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

(1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4m+2$, 使数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列;

(2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.

参考答案

本试卷共 10 页, 19 小题, 满分 150 分.

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 填空题和解答题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合 A，由交集的概念即可得解。

【详解】因为 $A = \{x | -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 且注意到 $1 < \sqrt[3]{5} < 2$,

从而 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选：A.

2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 则 $z =$ ()

- A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$

【答案】C

【解析】

【分析】由复数四则运算法则直接运算即可求解。

【详解】因为 $\frac{z}{z-1} = \frac{z-1+1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} = 1+i$, 所以 $z = 1 + \frac{1}{i} = 1-i$.

故选：C.

3. 已知向量 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 若 $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$, 则 $x =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标运算可求 x 的值.

【详解】因为 $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$, 所以 $\vec{b} \cdot (\vec{b} - 4\vec{a}) = 0$,

所以 $\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 即 $4 + x^2 - 4x = 0$, 故 $x = 2$,

故选: D.

4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ ()

- A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两角和的余弦可求 $\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta$ 的关系, 结合 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值可求前者, 故可求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

【详解】因为 $\cos(\alpha + \beta) = m$, 所以 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m$,

而 $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 所以 $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$,

故 $\cos \alpha \cos \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = m$ 即 $\cos \alpha \cos \beta = -m$,

从而 $\sin \alpha \sin \beta = -2m$, 故 $\cos(\alpha - \beta) = -3m$,

故选: A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等, 侧面积相等, 且它们的高均为 $\sqrt{3}$, 则圆锥的体积为

()

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆柱的底面半径为 r , 根据圆锥和圆柱的侧面积相等可得半径 r 的方程, 求出解后可求圆锥的体积.

【详解】设圆柱的底面半径为 r ，则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+3}$ ，

而它们的侧面积相等，所以 $2\pi r \times \sqrt{3} = \pi r \times \sqrt{3+r^2}$ 即 $2\sqrt{3} = \sqrt{3+r^2}$ ，

故 $r=3$ ，故圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$ 。

故选：B.

6. 已知函数为 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0 \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，在 \mathbf{R} 上单调递增，则 a 取值的范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D.

$[0, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组，解出即可。

【详解】因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，且 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ 单调递增，

则需满足 $\begin{cases} -\frac{-2a}{2 \times (-1)} \geq 0 \\ -a \leq e^0 + \ln 1 \end{cases}$ ，解得 $-1 \leq a \leq 0$ ，

即 a 的范围是 $[-1, 0]$ 。

故选：B.

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 ()

A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】C

【解析】

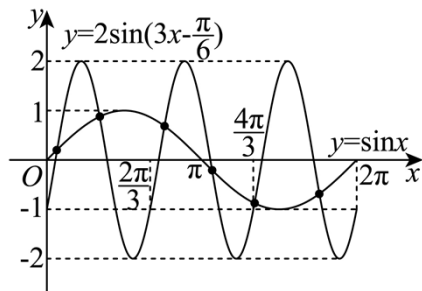
【分析】画出两函数在 $[0, 2\pi]$ 上的图象，根据图象即可求解

【详解】因为函数 $y = \sin x$ 的最小正周期为 $T = 2\pi$ ，

函数 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{3}$,

所以在 $x \in [0, 2\pi]$ 上函数 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象,

在坐标系中结合五点法画出两函数图象, 如图所示:



由图可知, 两函数图象有 6 个交点.

故选: C

8. 已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时 $f(x) = x$, 则

下列结论中一定正确的是 ()

- A. $f(10) > 100$
- B. $f(20) > 1000$
- C. $f(10) < 1000$
- D. $f(20) < 10000$

【答案】 B

【解析】

【分析】 代入得到 $f(1) = 1, f(2) = 2$, 再利用函数性质和不等式的性质, 逐渐递推即可判断.

【详解】 因为当 $x < 3$ 时 $f(x) = x$, 所以 $f(1) = 1, f(2) = 2$,

又因为 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$,

则 $f(3) > f(2) + f(1) = 3, f(4) > f(3) + f(2) > 5$,

$f(5) > f(4) + f(3) > 8, f(6) > f(5) + f(4) > 13, f(7) > f(6) + f(5) > 21$,

$f(8) > f(7) + f(6) > 34, f(9) > f(8) + f(7) > 55, f(10) > f(9) + f(8) > 89$,

$$f(11) > f(10) + f(9) > 144, f(12) > f(11) + f(10) > 233, f(13) > f(12) + f(11) > 377$$

$$f(14) > f(13) + f(12) > 610, f(15) > f(14) + f(13) > 987,$$

$$f(16) > f(15) + f(14) > 1597 > 1000, \text{ 则依次下去可知 } f(20) > 1000, \text{ 则 B 正确;}$$

且无证据表明 ACD 一定正确.

故选: B.

【点睛】 关键点点睛: 本题的关键是利用 $f(1)=1, f(2)=2$, 再利用题目所给的函数性质 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 代入函数值再结合不等式同向可加性, 不断递推即可.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 为了解推动出口后的亩收入 (单位: 万元) 情况, 从该种植区抽取样本, 得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$, 样本方差 $s^2 = 0.01$, 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$, 假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$, 则 () (若随机变量 Z 服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$, $P(Z < u + \sigma) \approx 0.8413$)

A. $P(X > 2) > 0.2$

B. $P(X > 2) < 0.5$

C. $P(Y > 2) > 0.5$

D. $P(Y > 2) < 0.8$

【答案】 BC

【解析】

【分析】 根据正态分布的 3σ 原则以及正态分布的对称性即可解出.

【详解】 依题可知, $\bar{x} = 2.1, s^2 = 0.01$, 所以 $Y: N(2.1, 0.1)$,

故 $P(Y > 2) = P(Y > 2.1 - 0.1) = P(Y < 2.1 + 0.1) \approx 0.8413 > 0.5$, C 正确, D 错误;

因为 $X: N(1.8, 0.1)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1)$,

因为 $P(X < 1.8 + 0.1) \approx 0.8413$ ，所以 $P(X > 1.8 + 0.1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$ ，

而 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1) < P(X > 1.8 + 0.1) < 0.2$ ，B 正确，A 错误，

故选：BC.

10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$ ，则 ()

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < f(x^2)$

C. 当 $1 < x < 2$ 时， $-4 < f(2x-1) < 0$

D. 当 $-1 < x < 0$ 时， $f(2-x) > f(x)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出函数 $f(x)$ 的导数，得到极值点，即可判断 A；利用函数的单调性可判断 B；

根据函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上的值域即可判断 C；直接作差可判断 D.

【详解】对 A，因为函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，而

$$f'(x) = 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x-3),$$

易知当 $x \in (1,3)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (-\infty, 1)$ 或 $x \in (3, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3, +\infty)$ 上单调递增，故 $x=3$

是函数 $f(x)$ 的极小值点，正确；

对 B，当 $0 < x < 1$ 时， $x - x^2 = x(1-x) > 0$ ，所以 $1 > x > x^2 > 0$ ，

而由上可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x) > f(x^2)$ ，错误；

对 C，当 $1 < x < 2$ 时， $1 < 2x-1 < 3$ ，而由上可知，函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f(1) > f(2x-1) > f(3)$ ，即 $-4 < f(2x-1) < 0$ ，正确；

对 D，当 $-1 < x < 0$ 时，

$$f(2-x) - f(x) = (1-x)^2(-2-x) - (x-1)^2(x-4) = (x-1)^2(2-2x) > 0,$$

所以 $f(2-x) > f(x)$ ，正确；

故 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在曲线上, 故 B 正确.

对于 C: 由曲线的方程可得 $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2$, 取 $x = \frac{3}{2}$,

则 $y^2 = \frac{64}{49} - \frac{1}{4}$, 而 $\frac{64}{49} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{64}{49} - \frac{5}{4} = \frac{256-245}{49 \times 4} > 0$, 故此时 $y^2 > 1$,

故 C 在第一象限内点的纵坐标的最大值大于 1, 故 C 错误.

对于 D: 当点 (x_0, y_0) 在曲线上时, 由 C 的分析可得 $y_0^2 = \frac{16}{(x_0+2)^2} - (x_0-2)^2 \leq \frac{16}{(x_0+2)^2}$,

故 $-\frac{4}{x_0+2} \leq y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$, 故 D 正确.

故选: ABD.

【点睛】思路点睛: 根据曲线方程讨论曲线的性质, 一般需要将曲线方程变形化简后结合不等式的性质等来处理.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】由题意画出双曲线大致图象, 求出 $|AF_2|$, 结合双曲线第一定义求出 $|AF_1|$, 即可得到 a, b, c 的值, 从而求出离心率.

【详解】由题可知 A, B, F_2 三点横坐标相等, 设 A 在第一象限, 将 $x = c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

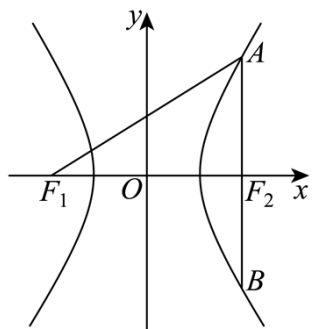
得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 即 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, 故 $|AB| = \frac{2b^2}{a} = 10$, $|AF_2| = \frac{b^2}{a} = 5$,

又 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 得 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 2a + 5 = 13$, 解得 $a = 4$, 代入 $\frac{b^2}{a} = 5$ 得

$$b^2 = 20,$$

$$\text{故 } c^2 = a^2 + b^2 = 36, \text{ 即 } c = 6, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$



13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则

$$a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\ln 2$

【解析】

【分析】 先求出曲线 $y = e^x + x$ 在 $(0,1)$ 的切线方程, 再设曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切点为 $(x_0, \ln(x_0+1) + a)$, 求出 y' , 利用公切线斜率相等求出 x_0 , 表示出切线方程, 结合两切线方程相同即可求解.

【详解】 由 $y = e^x + x$ 得 $y' = e^x + 1$, $y'|_{x=0} = e^0 + 1 = 2$,

故曲线 $y = e^x + x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$;

由 $y = \ln(x+1) + a$ 得 $y' = \frac{1}{x+1}$,

设切线与曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 相切的切点为 $(x_0, \ln(x_0+1) + a)$,

由两曲线有公切线得 $y' = \frac{1}{x_0+1} = 2$, 解得 $x_0 = -\frac{1}{2}$, 则切点为 $\left(-\frac{1}{2}, a + \ln \frac{1}{2}\right)$,

切线方程为 $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + a + \ln \frac{1}{2} = 2x + 1 + a - \ln 2$,

根据两切线重合, 所以 $a - \ln 2 = 0$, 解得 $a = \ln 2$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/477133032112006120>