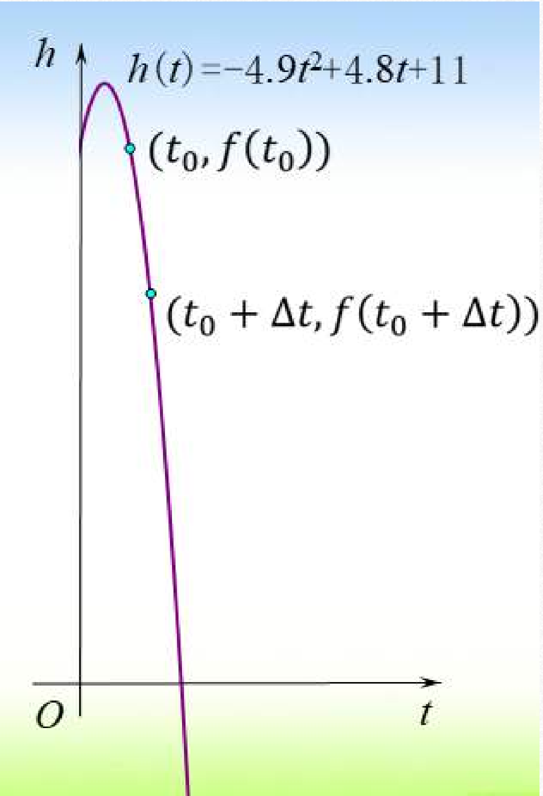
# 第五章　§5.1.2　导数的概念及其几何意义

## 复习引入

前面我们研究了两类变化率：

1.物理学：平均速度和瞬时速度

设高台跳水运动员起跳高度$h$与时间$t$的函数为 $s=h(t)$，




则$t_0$到$t$的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t},$$

而在$t_0$时刻的瞬时速度为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}.$$

2.几何学：割线斜率和切线斜率

设抛物线解析式为$y=f(x)$，

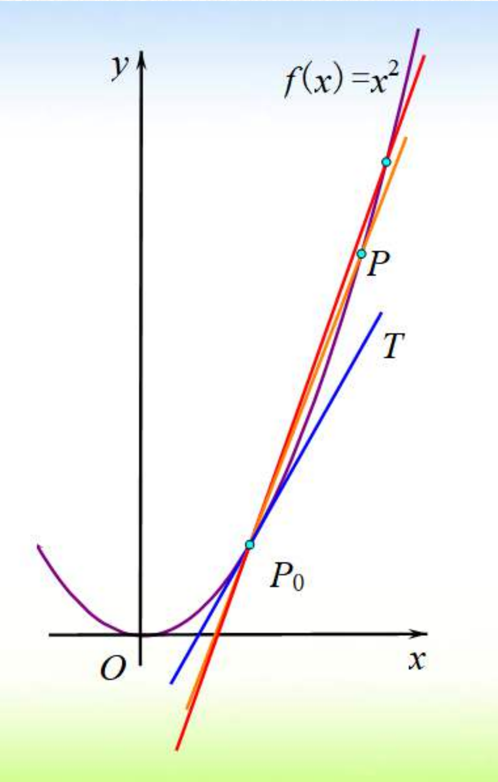
$P_0(x_0, f(x_0))$，$P(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，

则割线$P_0P$的斜率为

$$k=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

而在$P_0(x_0, f(x_0))$处切线的斜率为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



## 复习引入

★ 解决这两类问题思想方法具有一致性吗？

物理学

无限逼近（极限）

★ 答案表示形式具有一致性吗？

平均变化率的极限

瞬时变化率

几何学

共同点：都采用了由“平均变化率”无限逼近“瞬时变化率”的思想方法。

今天我们继续研究更一般的问题.

**知识建构**

## 1.平均变化率

对于函数$y=f(x)$，设自变量$x$从$x_0$变化到$x_0+\Delta x$，相应地，函数值$y$就从$f(x_0)$变化到$f(x_0+\Delta x)$．这时，$x$的变化量为$\Delta x$，$y$的变化量为$\Delta y$ $=$ $\underline{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$,我们把比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ $\underline{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$叫做函数$y=f(x)$从$x_0$到$x_0+\Delta x$的**平均变化率**.

知识建构

2.导数

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于一个确定的值，即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$有极限，则称 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处<u>可导</u>，并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$在<u>$x=x_0$</u>处的<u>导数</u>(也称为瞬时变化率)，记作<u>$f'(x_0)$</u>或<u>$y'|_{x=x_0}$</u>，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$<u>$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$</u>.

## 知识建构

例：问题1中运动员在$t=1$时的瞬时速度为$v(1)$就是函数$h(t)$在$t=1$处的导数$h'(1)$，

$$v(1)=h'(1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-5.$$

问题2中抛物线$f(x)=x^2$在点$P_0(1,1)$处的切线$P_0T$的斜率$k_0$就是函数$f(x)=x^2$在$x=1$处的导数$f'(1)$，即

$$k_0=f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2.$$

**知识建构**

3.导数的几何意义

容易发现，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$表示的是割线 $P_0P$ 的斜率，

当 $P$ 点沿着曲线无限趋近于 $P_0$ 点时，割线 $P_0P$ 无限趋近于一个确定的位置，

这个确定的位置的直线 $P_0T$ 称为曲线 $y=f(x)$在点 $P_0$ 处的切线，

因此函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是切线 $P_0T$ 的斜率 $k_0$，

即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，这就是导数的几何意义.

**注意点：**

(1)曲线在点$(x_0，f(x_0))$处切线的斜率即函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数；

(2)瞬时变化率、曲线在该点切线的斜率、函数在该点的导数，三者等价.

## 知识建构

注：1. 当$\Delta x \neq 0$时，比值的极限存在，则$f(x)$在$x=x_0$处可导；

若$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限不存在，则$f(x)$在$x=x_0$处不可导或无导数.

2. $f'(x_0)$与$x_0$的值有关，不同的$x_0$其导数值一般也不相同；

学有所用

# 用导数定义求函数在某一点处的导数

**例1** 求函数$y=\frac{1}{x}$在$x=1$处的导数$f'(1)$.

解：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$

$=-\frac{1}{1+\Delta x}$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\frac{1}{1+\Delta x})=-1$.

从而 $f'(1)=-1$.

**小结：**

求 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的一般步骤：

1、求平均变化率，先写出

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,并化简；

2、求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

## 学有所用

练习： 求曲线$y=-2x^2+1$在点(1,-1)处的切线方程.

解：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{[-2(1+\Delta x)^2+1]-(-1)}{\Delta x}$

$$=\frac{-4\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4-2\Delta x$$

$$\therefore k=f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-4-2\Delta x)=-4$$

$\therefore$ 曲线$y=-2x^2+1$在点$(1,-1)$处的切线方程为

$y+1=-4(x-1)$ 即：$4x+y-3=0$

## 解惑提高

**(1)如何求曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程?**

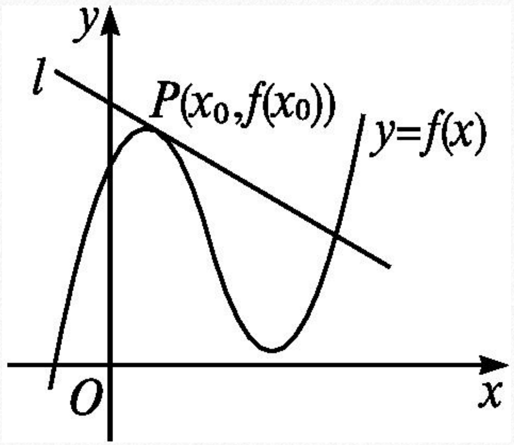
**提示:**根据导数的几何意义,求出函数$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的导数,即曲线在该点处的切线的斜率,再由直线方程的点斜式求出切线方程.

**(2)曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与曲线过点$(x_0,y_0)$的切线有什么不同?**

**提示:**曲线$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线,点$(x_0,f(x_0))$一定是切点,只要求出$k=f'(x_0)$,利用点斜式写出切线方程即可;而曲线$f(x)$过某点$(x_0,y_0)$的切线,给出的点$(x_0,y_0)$不一定在曲线上,即使在曲线上也不一定是切点.

**(3)曲线在某点处的切线是否与曲线只有一个交点?**

**提示:**不一定.曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线$l$与曲线$y=f(x)$的交点个数不一定只有一个,如图所示.



**练习** 已知抛物线$y=x^2+x+1$,则过原点的切线方程为______.

**思考:过原点的切线，原点一定是切点吗？** **不一定**

**解析：** 设切点坐标为$(x_0, y_0)$，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)+1-(x_0^2+x_0+1)}{\Delta x}$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+1+\Delta x)=2x_0+1$，则斜率$k=2x_0+1$,

故所求的切线方程为$y-y_0=(2x_0+1)(x-x_0)$,

将(0,0)及$y_0=x_0^2+x_0+1$代入上式得:$-(x_0^2+x_0+1)=-x_0(2x_0+1)$,

解得$x_0=1$或$x_0=-1$,

所以$k=3$或$k=-1$,

所以切线方程为$y=3x$或$y=-x$,

即$3x-y=0$或$x+y=0$.

**答案：** $3x-y=0$或$x+y=0$

**小结**：过曲线外的点$P(x_1，y_1)$求曲线的切线方程的步骤

↓

求出$y=f(x)$在点$x_0$处的导数$f'(x_0)$.

↓

利用$Q$在曲线上和$f'(x_0)=k_{PQ}$，解出$x_0$，$y_0$及$f'(x_0)$.

↓

点斜式切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，化为一般式.

练习：若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$等于( B　)

A．$f'(x_0)$　　B．$2f'(x_0)$　　C．$-2f'(x_0)$　　D．0