# 【初中数学竞赛】

# 专题03 方程与恒等变换竞赛综合-50题真题专项训练

# （全国竞赛专用）

一、单选题

1.(2021全国·九年级竞赛)把三个连续的正整数a,b,c 按任意次序(次序不同视为不同组)填入□$x^2$+□x+□=0 的三个方框中，作为一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项.使所得方程至少有一个整数根的a,b,c( ).

A. 不存在 B. 有一组 C. 有两组 D. 多于两组

【答案】C

【详解】设三个连续的正整数分别为n-1, n, n+1(n 为大于1的整数).当一次项系数是n-1 或 n时，△均小于零，方程无实数根；当一次项系数是n+11 时，

$\triangle=(n+1)^2-4n(n-1)=-3(n-1)^2+4$,

因为n 为大于1的整数，所以，要使△≥0, n 只能取2.

当n=2 时，方程$x^2+3x+2=0$,$2x^2+3x+1=0$ 均有整数根，故满足要求的 (a,b,c) 只有两组：(1,3,2)、(2,3,1).

2.(2021·全国·九年级竞赛)在方程组$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^3+y^3+z^3=-36\end{cases}$中，x,y,z 是互不相等的整数，那么此方程组的解的组数为()

A.6 B.3 C. 多于6 D. 少于3

【答案】A

【详解】利用$x^2+y^3+z^2-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz)=0$,把原方程组转化为解不定方程3xyz=-36.

因为$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+2)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

=0,

所以$x^3+y^3+z^3=3xyz$, 从而得3xyz=-36,

即 xyz=-12.

因此x,y,z 中一定是两正一负，且x+y+z=0,

又12=1×1×12=1×2×6=1×3×4=2×2×3,

则上述两种组合中，只有12=1×3× 4符合条件.

所以$\begin{cases}x=1,\\y=3,\\z=-4\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=-4,\\z=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=1,\\z=-4\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=-4,\\z=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4\\y=1,\\z=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4,\\y=3,\\z=1.\end{cases}$

共有6个解。故选 A.

二、填空题

3. (2021·全国·九年级竞赛) 已知 $x=\left[\frac{1}{3-\sqrt{7}}\right]$，$y=\left\{\frac{1}{3-\sqrt{7}}\right\}$，则$x^2+(1+\sqrt{7})xy=$________

【答案】10

【详解】解因 $\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$，

由 $2=\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$ 知 $2.5<\frac{3+\sqrt{7}}{2}<3$，

所以x=2，于是 $y=\frac{1}{3-\sqrt{7}}-2=\frac{3+\sqrt{7}}{2}-2=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$，

因此，$x^2+(1+\sqrt{7})xy=2^2+(1+\sqrt{7})\times 2\times\frac{\sqrt{7}-1}{2}=4+(7-1)=10$，

故填10.

4. (2021-全国·九年级竞赛) 若$1\leqslant p\leq 20, 1\leq q\leq 10$，且方程$4x^2-px+q=0$的两根均为奇数，则此方程的根为__________.

【答案】$x_1=x_2=1$

【详解】填$x_1=x_2=1$. 理由：设$x,x_2$是方程的两个根，则

$x_1+x_2=\frac{p}{4}$，$x_1x_2=\frac{q}{4}$

因为$x,x_2$均为奇数，故$x_1+x_2$为偶数，$x_1\cdot x_2$为奇数.

又$1\leqslant p\leq 20, 1\leq q\leq 10$,

则$\frac{1}{4}\leq\frac{p}{4}\leq 5, \frac{1}{4}\leq\frac{q}{4}\leq\frac{5}{2}$.

故$\frac{q}{4}=1, q=4$.

由$\triangle=p^2-16q\geq 0$，解得$p\geq 8$.

从而 $\frac{p}{4}\geq 2$

所以，$\frac{p}{4}=2$或4，即$p=8$或$p=16$.

当p=8 时，$x_1=x_2=1$， 符合题意；

当p=16 时，$x_1$与$x_2$均为无理数，不合题意，舍去.

故原方程的根为$x_1=x_2=1$

5. (2021全国·九年级竞赛)以下算式中，相同的汉字代表相同的数字. 已知“神舟”=25, “号”=4, 那么六位数“飞天神舟六号”=________

$$\text{六号飞天神舟}=\frac{\text{神舟}}{\text{号}}\times\text{飞天神舟六号}$$

【答案】102564.

【详解】设“飞天”=x， “六号”=y， 则题设算式可化为

4×(10000y+100x+25)=25×(10000x+2500+y),

化简得4×(400y+4x+1)=10000x+2500+y

即1599y=9984x+2496,

即533y=3328x+832.

两边约去13得41y=256x+64， 即41y=64(4x+1),64 与41互质，64整除y. 故 y=64.

“号”=4与题设符合.

代入得41=4x+1,x=10.

于是“飞天神舟六号”=102564.

6. (2021·全国·九年级竞赛)已知一个矩形的长、宽分别为正整数a,b， 其面积的数值等于它的周长的数值的2倍，则a+b=___ 或________.

【答案】 25 18

【详解】根据题意，得ab=2(2a+2b)，

即ab-4a=4b,

则$a=\frac{4b}{b-4}=4+\frac{16}{b-4}$.

因为a,b 均为正整数，且a>b， 所以b-4 一定是16的正约数.

当b-4 分别取1, 2, 4, 8, 16时，代入上式得：

b-4=1 时，b=5,a=20;

b-4=2 时，b=6,a=12;

b-4=4 时，b=8, a=8 (舍去)；

b-4=8 时，b=12, a=6 (舍去)；

b-4=16 时，b=20, a=5 (舍去).

因此a+b=25　或1 8 .

故应填25，18.

7.(2021全国·九年级竞赛)一个布袋中装有红、黄、蓝三种颜色的大小相同的木球，红球上标有数字1，黄球上标有数字2，蓝球上标有数字3，小明从布袋中摸出10个球，它们上面所标数字的和等于21，则小明摸出的球中红球的个数最多不超过__________

【答案】4

【详解】设小明摸出的10个球中有x 个红球，y 个黄球，则蓝球有(10-x-y)　个.

根据题意，得x+2y+3(10-x-y)=21,

即2x+y=9.

易知，x 的最大值是4，即小明摸出的10个球中至多有4个红球.

8.(2021·全国·九年级竞赛)篮、排、足球放在一堆共25个，其中篮球个数是足球个数的7倍，那么其中排球的个数是__________

【答案】17或9或1

【详解】设足球有x 个，排球有y 个，则7x+y+x=25,

即8x+y=25.

当x=1 时 ，y=17;　当 x=2 时 ，y=9;　当x=3 时 ，y=1.

所以排球的个数是17或9或1个.

9.(2021·全国·九年级竞赛)某一次考试共需做20个小题，做对一个得8分，做错一个扣5分，不做的得0分.某学生共得13分，那么这个学生没做的题有______个.

【答案】7

【详解】设该生做对x 个题，做错y 个题，没做的题目有z 个，则 $\begin{cases}x+y+z=20,\\8x-5y=13.\end{cases}$

所以8(x+y)=8x+8y=13+13y=13(1+y).

又8与13互质，则x+y　被13整除.

而O≤x+y≤20,　所以x+y=13,　从而z=20-(x+y)=7.

所以这个学生没做的题有7个.

10.(2021全国·九年级竞赛)两个正整数的和比积小1997，并且其中一个是完全平方数，则较大数与较小数的差是__________

【答案】663

【详解】设这两个正整数为a，b(a>b).

根据题意，可得ab-(a+b)=1997,

则 (a-1)(b-1)=1998,

即$(a-1)(b-1)=2\times3^3\times37$.

因为$a>b$，即$a-1>b-1$，且a, b 中有一个是完全平方数，故$(a-1)(b-1)=666\times3$,

所以$\begin{cases}a=667,\\ b=4.\end{cases}$

则$a-b=663$.

11.（2021全国·九年级竞赛）某自然数恰好等于它的各位数字和的11倍，则这个自然数是__ __

【答案】198

【详解】所求数不可能是一位数，四位数及四位以上的数．故只考虑两位数及三位数．

（1）设所求自然数是xy，则$10x+y=11(x+y)$,

即 $x+10y=0$,

此方程无满足条件的解.

（2）设所求自然数是xyz，则$100x+10y+z=11(x+y+z)$,

即 8 $9x-y-10z=0$.

显然x 只可能是1，因此，只有一组解：$x=1,y=9,z=8$.

故所求的数是198.

12.（2021·全国·九年级竞赛）边长为整数，周长为12的三角形的面积的最大值是________

【答案】$4\sqrt{3}$

【详解】设三角形的三边长分别为a, b, c，且$a\leqslant b\leqslant c$，则$a+b+c=12$.

可得$3c\geqslant12$，即$c\geqslant4$.

又因为$a+b>c$，所以$2c<12$，即$c<6$.

故$4\leqslant c<6$，c 可取4或5.

当$c=4$时，$a\le b\le4$，$a+b=8$，所以$a=b=4$.

此时三角形面积为，$S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$

当$c=5$时，$a+b=7$．当$a=1$时，$b=6$．此时$a+c=b$，不合题意.

当$a=2$时，$b=5$．此时三角形面积为$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$；

当$a=3$时，$b=4$.

此时三角形为直角三角形，三角形面积为$S_3=\dfrac{1}{2}-3-4=6$.

显然$S_1>S_3>S_2$，所以所求最大面积为$4\sqrt{3}$.

13.(2021·全国·九年级竞赛)一个两位数除以它的反序数所得的商数恰等于余数，则这个两位数是__________.

【答案】52

【详解】设这个数为$a=10x+y$，它除以它的反序数的商数是q，则其反序数为$10y+x$.

于是$10x+y=(10y+x)q+q$，q为自然数，

即$(10-q)x-(10q-1)y=q$.

当$q=1$时，$9(x-y)=1$，此方程无整数解；

当$q=2$时，有$8x-19y=2$. 可知y是偶数.

当$y=2$时，$x=5$.

而当$y=4$或6或8时，x无整数解.

所以当$q=2$时，$a=52$.

进一步，当$q=3$时，有$7x-29y=3$，

当$y\le 2$时，x无整数解；而当$y\ge 3$时，$x>10$，即x无满足条件的解.

当$q=4$时，有$6x-39y=4$.

因为此方程右边4不被3整除，所以无解.

最后，当$q\ge 5$时，有$5x\ge(10-q)x=(10q-1)y+q\ge 49y+q\ge 54$,

所以$x\geqslant 11$，不可能有解.

综上所述，所求数等于52.

14.(2021-全国·九年级竞赛)某个两位自然数，它能被其各位数字之和整除，且除得的商恰好是7的倍数，写出符合条件的所有两位数是__________.

【答案】21，42，63，84

【详解】设所有两位数是y，则$10x+y=k(x+y)$.

其中k是正整数，且为7的倍数.

当$k=7$时，$10x+y=7(x+y)$，即$x=2y$.

当$y=1$时，$x=2;y=2$时，$x=4;y=3$时，$x=6;y=4$时，$x=8$.

当$k=14$时，$10x+y=14(x+y)$，

即$4x+13y=0$

此方程无正整数解.

当$k=21,28,\dots\dots$，方程均无正整数解.

所以满足条件的两位数是：21，42，63，84.

15. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 小孩将玻璃弹子装进两种盒子，每个大盒子装12颗，每个小盒子装5颗，若弹子共有99颗，所用大、小盒子多于10个，则大盒子数为________盒子数为_________.

【答案】 2 15

【详解】设大盒子有x 个，小盒子有y 个.

根据题意，得12x+5y=99， 从而 $y=\dfrac{99-12x}{5}=19-2x+\dfrac{4-2x}{5}$

因为x,y 都为整数，所以x 可取2或7 .

当x=7 时， y=2; 当x=2 时， y=15.

因为x+y≥11， 所以x=2,y=15.

16. (2021全国 • 九年级竞赛) 设平方数$y^2$ 是11个相继整数的平方和，则y 的最小值是

___________

【答案】-11

【详解】理由：设11个相继整数为n-5,n-4,…,n,…,n+4,n+5， 则

$(n-5)^2+(n-4)^2+\dots+n^2+\dots+(n+4)^2+(n+5)^2=y^2$,

即$11(n^2+10)=y^2$.

显然，y 最小时，只能是$n^2=1$.

所以y 取最小值-11.

17. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 一个三位数，它等于它的各位数码之和的12倍. 试写出所有这样的三位数__________

【答案】108

【详解】设这样的三位数为abc， 则

100a+10b+c=12(a+b+c),

即 $c=8a-\dfrac{2}{11}b$ .

因为a,b,c 均为整数，且b≤9， 所以b=0， 得c=8a.

又因为1≤a≤9,0≤c ≤9，所以只能a=1, c=8.

18. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 一个四位数与它的四个数字之和等于1991, 这个四位数是_____________

【答案】1972

【详解】设这个四位数为abcd， 根据题意，得

1000a+100b+10c+d+a+b+c+d=1991,

即1001a+101b+11c+2d=1991.

(1)若a≥2，　则1001a>2000，　所以a=1.　从而101b+11c+2d=990.

(2)因为11c+2d 的最大值为99+18 =117，所以101b≥990-117=873，　即 b=9，　从而11c+2d=81.

(3)由于0≤2d≤18，　则81-18=63≤11c≤81.

所以c=6 或 7.

当c=6 时，66+2d=81，　得 $d=\frac{15}{2}$（舍去）；

当c=7 时，77+2d=81，　得 d=2.

故这个四位数是1972.

19.(2021·全国·九年级竞赛)n 是一个非立方的四位数，且它仅有4个正约数，除了它本身之外其他三个约数的和等于1000，那么这个四位数n 是________

【答案】1994

【详解】由题意，n=p·q，　且 p,q　均为质数，则1+p+q=1000，　即 p+q=999.

以 p，q　中必有一个为偶质数2，另一个为997.

从而有n=2×997=1994.

20.(2021·全国·九年级竞赛)方程3x+2y=11　在正整数范围内的解是________

【答案】 $\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

【详解】由3x<11，　得 $x<\frac{11}{3}$，所以x 只能取1，2，3.

当x=1 时，　y=4；　当x=2 时，y无正整数解；当x=3 时，y=1.

所以所求方程的解为$\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

21.(2021·全国·九年级竞赛)方程 $\frac{x}{3}+\frac{14}{y}=3$ 有________组正整数解.

【答案】5

【详解】理由：因为 $\frac{x}{3}\geq\frac{1}{3}$，

所以 $\frac{14}{y}=3-\frac{x}{3}\leq3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$，

则 $y\geq\frac{14\times3}{8}=\frac{21}{4}$，

即 y≥6，

原方程可化为xy+42=9y，

则42=(9-x)y

所以42能被y 整除.

所以y 可取6, 7, 14, 21, 42. 相应地得到五组解;

$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=6,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=7,\end{cases}\begin{cases}x_3=6,\\y_3=14,\end{cases}\begin{cases}x_4=7,\\y_4=21,\end{cases}\begin{cases}x_5=8,\\y_5=42.\end{cases}$

22.(2021·全国·九年级竞赛)已知三角形的三个角的度数都是小于120的质数，则这个三角形三个角的度数分别是___________

【答案】2°, 89°, 89°

【详解】设三角形的三个角的度数分别是x, y, z, 且 x≤y≤z, 则 x+y+z=180.

所以x, y, z 中必有一个偶质数2, 得x=2, y, z 必为奇数.

若y≠z, 则 z-y≥2, 与 z-y<x 矛盾.

所以y=z, 得 y=z=89.

因此，三角形三个角的度数分别是2, 89°, 89°.

23.(2021·全国·九年级竞赛)若质数m,n 满足5m+7n=129, 则m+n 的值为___________

【答案】19或25

【详解】因为m, n 为质数，且5 m+7n =129, 所以m, n 中必有一个是偶质数.

若m=2, 则n=17; 若 n=2, 则m=23.

所以m+n 的值为19或25.

三、解答题

24.(2021·全国·九年级竞赛)(1)设x 是实数，证明: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$,

(2)求 $M=\left[\frac{2010}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2010}{2^2}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{1}{2}\right]$之值

【答案】(1)见解析; (2)2010

【详解】解(1)设[x]=n,{x}=x-[x]=α, 则0≤a<1.

若$0\le\alpha<\frac{1}{2}$, 则$0\le\alpha+\frac{1}{2}<1, 0\le2\alpha\le1$, 于是

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+\left[n+\alpha+\frac{1}{2}\right]=n+n=2n, 2x]=[2n+2\alpha]=2n$,

所以$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

若$\frac{1}{2}\le\alpha<1$, 则$1\le\alpha+\frac{1}{2}<1\frac{1}{2}, 1\le2\alpha<2$, 于是

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+\left[n+\alpha+\frac{1}{2}\right]=n+(n+1)=2n+1, [2x]=[2n+2\alpha]=2n+1$, ,

所 $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

综上所述，对任何实数x， $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ 成立.

（2）由（1）知 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$

令 $x=\overline{\frac{2010}{2}\ \frac{2010}{2^2}}$ . $\frac{\ }{.2}$ 再将各式相加得

$M=([2010]-\left[\frac{2010}{2}\right])+(\left[\frac{2010}{2}\right]-\left[\frac{2010}{2^2}\right])+(\left[\frac{2010}{2^2}\right]-\left[\frac{2010}{2^3}\right])+\cdots+$

$\left[(\frac{2010}{2^{2009}}\right]-\left[\frac{2010}{2^{2010}}\right])=[2010]-\left[\frac{2010}{2^{2010}}\right]=2010-0=2010$ .

注：从以上各例看出，求解有关[x]及{x}的问题的关键是： [x]及{x}的定义和基本不等式x-1<[x]≤x,O≤{x}<1. 只要将[x]及{x}的定义与不等式结合起来进行计算和讨论，就能找到解决问题的途径.

25.（2021·全国·九年级竞赛）3设a,b,c 是正数，且abc=1， 证明：

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leq 1$ .

【答案】见解析

【详解】证明注意到abc=1， 设 $(a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z}\ c=\frac{z}{x}$ (x,y,z 为正实数)，则

原不等式 $\Leftrightarrow(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y})(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z})(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x})\leq 1$

⇔(x+x-y)(y+x-z)(z+y-x)≤xyz.①

设u=x+z-y,v=y+x-z,w=z+y-x, 则

$x=\frac{u+v}{2}>0,y=\frac{v+w}{2}>0,z=\frac{w+u}{2}>0$ .

于是① $\Leftrightarrow uvw\leq(\frac{u+v}{2})(\frac{v+w}{2})(\frac{\omega+u}{2})$ . ②

不妨设x≥y≥z， 则u≥ 0，v≥0. 如果w≤0， 那么

$uvw\leq 0<(\frac{u+v}{2})(\frac{v+w}{2})(\frac{\omega+v}{2})$ ,，不等式②成立；

如果w>0， 又u>0,v>0， 那么

$(\frac{u+v}{2})(\frac{v+w}{2})(\frac{w+u}{2})\geq(\sqrt{uv})(\sqrt{v\omega})(\sqrt{wu})=uvw$ 即②成立.

26.（2021-全国·九年级竞赛）若a>0,b>0,c>0, 证明： $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ . 等号成立当且仅当a =b=c

【答案】见解析.