

全等三角形单元培优测试卷

一、八年级数学轴对称三角形填空题（难）

1. 在直角坐标系中，O 为坐标原点，已知点 A (1, 2)，点 P 是 y 轴正半轴上的一点，且 $\triangle AOP$ 为等腰三角形，则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(0, \sqrt{5})$, $(0, 4)$, $(0, \frac{5}{4})$

【解析】

【分析】

有三种情况：①以 O 为圆心，以 OA 为半径画弧交 y 轴于 D，求出 OD 即可；②以 A 为圆心，以 OA 为半径画弧交 y 轴于 P，求出 OP 即可；③作 OA 的垂直平分线交 y 轴于 C，则 $AC=OC$ ，根据勾股定理求出 OC 即可.

【详解】

有三种情况：①以 O 为圆心，以 OA 为半径画弧交 y 轴于 D，则 $OA=OD=$

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

$$\therefore D(0, \sqrt{5});$$

②以 A 为圆心，以 OA 为半径画弧交 y 轴于 P， $OP=2 \times y_A=4$,

$$\therefore P(0, 4);$$

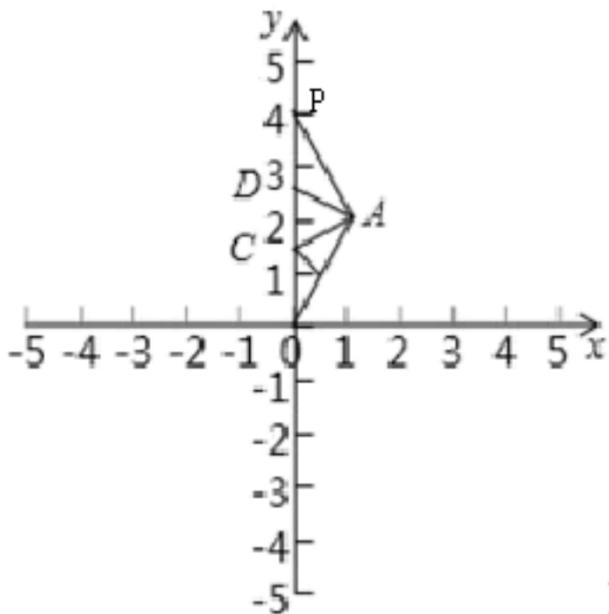
③作 OA 的垂直平分线交 y 轴于 C，则 $AC=OC$,

$$\text{由勾股定理得：} OC=AC=\sqrt{1^2 + 2^2 - OC^2},$$

$$\therefore OC = \frac{5}{4},$$

$$\therefore C(0, \frac{5}{4});$$

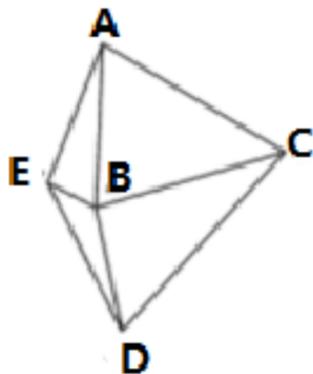
故答案为： $(0, \sqrt{5})$, $(0, 4)$, $(0, \frac{5}{4})$.



【点睛】

本题主要考查对线段的垂直平分线，等腰三角形的性质和判定，勾股定理，坐标与图形性质等知识点的理解和掌握，能求出符合条件的所有情况是解此题的关键.

2. 如图，线段 AB ， DE 的垂直平分线交于点 C ，且 $\angle ABC = \angle EDC = 72^\circ$ ， $\angle AEB = 92^\circ$ ，则 $\angle EBD$ 的度数为_____.



【答案】128

【解析】

【分析】

连接 CE ，由线段 AB ， DE 的垂直平分线交于点 C ，得 $CA=CB$ ， $CE=CD$ ， $\angle ACB = \angle ECD = 36^\circ$ ，进而得 $\angle ACE = \angle BCD$ ，易证 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ，设 $\angle AEC = \angle BDC = x$ ，得则 $\angle BDE = 72^\circ - x$ ， $\angle CEB = 92^\circ - x$ ， $\triangle BDE$ 中， $\angle EBD = 128^\circ$ ，根据三角形内角和定理，即可得到答案.

【详解】

连接 CE ，

\because 线段 AB ， DE 的垂直平分线交于点 C ，

$\therefore CA=CB$ ， $CE=CD$ ，

$\because \angle ABC = \angle EDC = 72^\circ = \angle DEC$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle ECD = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle BCD$ ，

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BCD$ 中，

$CA = CB$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$ ，

$CE = CD$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS)，

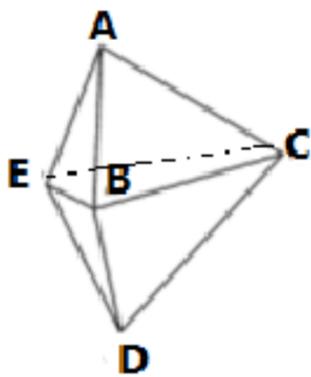
$\therefore \angle AEC = \angle BDC$ ，

设 $\angle AEC = \angle BDC = x$ ，则 $\angle BDE = 72^\circ - x$ ， $\angle CEB = 92^\circ - x$ ，

$\therefore \angle BED = \angle DEC - \angle CEB = 72^\circ - (92^\circ - x) = x - 20^\circ$ ，

\therefore 在 $\triangle BDE$ 中， $\angle EBD = 180^\circ - (72^\circ - x) - (x - 20^\circ) = 128^\circ$.

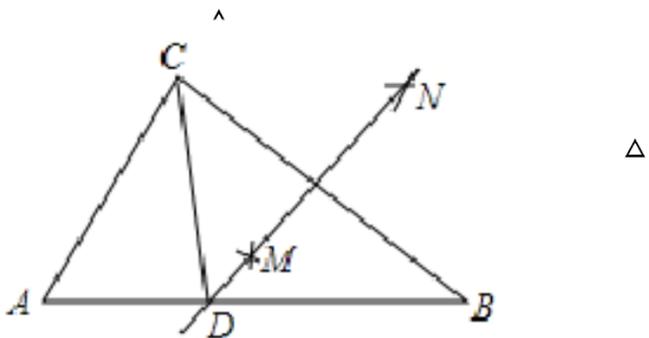
故答案是：128 .



【点睛】

本题主要考查中垂线的性质，三角形全等的判定和性质定理以及三角形内角和定理，添加辅助线，构造全等三角形，是解题的关键.

3. 如图，在 ABC 中， $AB > AC$ ，按以下步骤作图：分别以点 B 和点 C 为圆心，大于 BC 一半长为半径作画弧，两弧相交于点 M 和点 N ，过点 M 、 N 作直线交 AB 于点 D ，连接 CD ，若 $AB=10$ ， $AC=6$ ，则 ADC 的周长为_____.



【答案】 16

【解析】

【分析】

利用基本作图可以判定 MN 垂直平分 BC ，则 $DC=DB$ ，然后利用等线段代换得到 $\triangle ACD$ 的周长 $= AB+AC$ ，再把 $AB=10$ ， $AC=6$ 代入计算即可.

【详解】

解：由作法得 MN 垂直平分 BC ，则 $DC=DB$ ，

$$C_{\triangle ACD} = CD + AC + AD = DB + AD + AC = AB + AC = 10 + 6 = 16$$

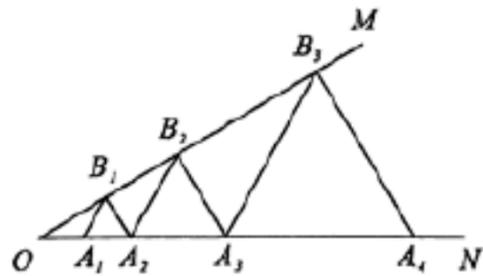
故答案为：16.

【点睛】

本题考查了基本作图和线段垂直平分线的性质，熟练掌握基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）是本题的关键.

4.

如图， $\angle MON=30^\circ$ ，点 A_1, A_2, A_3, \dots 在射线 ON 上，点 B_1, B_2, B_3, \dots 在射线 OM 上， $\triangle A_1B_1A_2, \triangle A_2B_2A_3, \triangle A_3B_3A_4, \dots$ 均为等边三角形，从左起第 1 个等边三角形的边长记 a_1 ，第 2 个等边三角形的边长记为 a_2 ，以此类推，若 $OA_1=3$ ，则 $a_2 = \frac{3}{2}$ ， $a_{2019} = \frac{3}{2^{2018}}$ 。



【答案】 $\frac{3}{2}$; 3×2^{2018} .

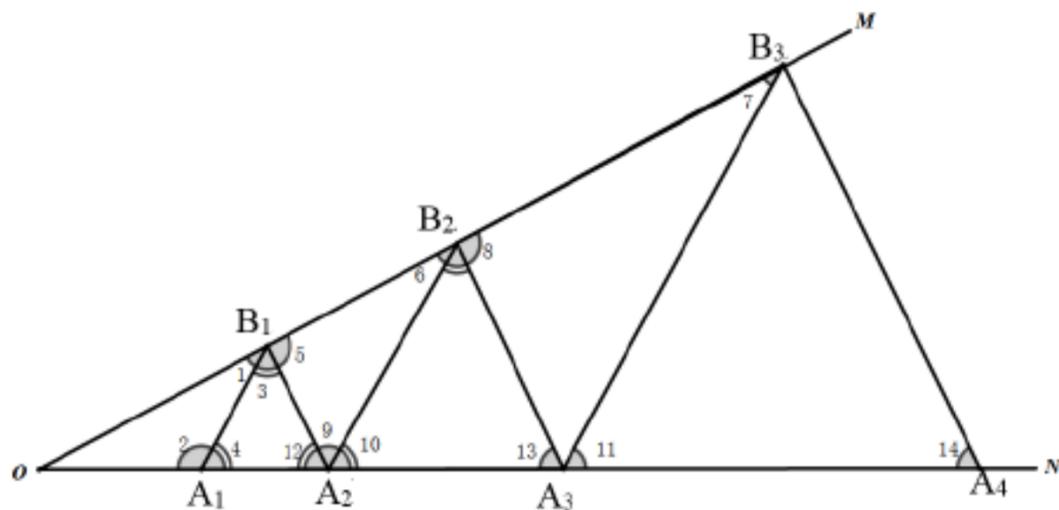
【解析】

【分析】

根据等腰三角形的性质以及平行线的性质得出 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ 以及 $a_2 = 2a_1 = 6$ ，得出 $a_3 = 4a_1, a_4 = 8a_1, a_5 = 16a_1 \dots$ 进而得出答案。

【详解】

解：如图，



$\because \triangle A_1B_1A_2$ 是等边三角形，
 $\therefore A_1B_1 = A_2B_1, \angle 3 = \angle 4 = \angle 12 = 60^\circ,$
 $\therefore \angle 2 = 120^\circ,$
 $\because \angle MON = 30^\circ,$
 $\therefore \angle 1 = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$
 又 $\because \angle 3 = 60^\circ,$
 $\therefore \angle 5 = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$
 $\because \angle MON = \angle 1 = 30^\circ,$
 $\therefore OA_1 = A_1B_1 = 3,$
 $\therefore A_2B_1 = 3,$
 $\because \triangle A_2B_2A_3, \triangle A_3B_3A_4$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle 11 = \angle 10 = 60^\circ, \angle 13 = 60^\circ,$
 $\because \angle 4 = \angle 12 = 60^\circ,$
 $\therefore A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3, B_1A_2 \parallel B_2A_3,$
 $\therefore \angle 1 = \angle 6 = \angle 7 = 30^\circ, \angle 5 = \angle 8 = 90^\circ,$

$$\therefore a_2 = 2a_1 = 6,$$

$$a_3 = 4a_1,$$

$$a_4 = 8a_1,$$

$$a_5 = 16a_1,$$

以此类推: $a_{2019} = 2^{2018}a_1 = 3 \times 2^{2018}$

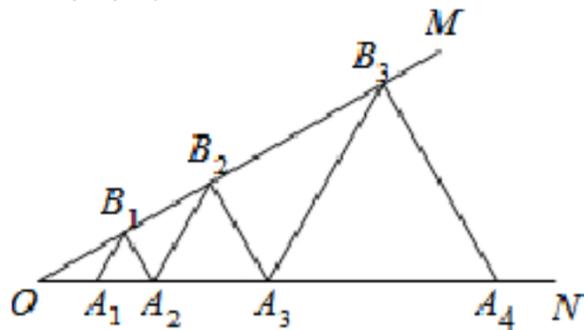
故答案是: 6; 3×2^{2018} .

【点睛】

此题主要考查了等边三角形的性质以及等腰三角形的性质, 根据已知得出 $a_2 = 2a_1 = 6$, $a_3 = 4a_1$, $a_4 = 8a_1$, $a_5 = 16a_1$... 进而发现规律是解题关键.

5. 如图, 已知 $\angle MON = 30^\circ$, 点 A_1, A_2, A_3, \dots 在射线 ON 上, 点 B_1, B_2, B_3, \dots 在射线 OM 上, $\triangle A_1B_1A_2, \triangle A_2B_2A_3, \triangle A_3B_3A_4, \dots$ 均为等边三角形, 若 $OA_1 = 2$, 则

$\triangle A_5B_5A_6$ 的边长为 _____.



【答案】 32

【解析】

【分析】

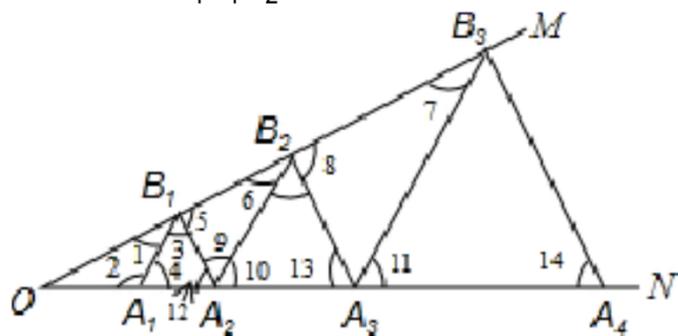
根据底边三角形的性质求出 $\angle 1 = 30^\circ$ 以及平行线的性质得出 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, 以及

$A_1B_1 = 2A_2B_2$, 得出 $A_2B_2 = 2A_3B_3 = 4A_4B_4 = 4$, $A_3B_3 = 8A_4B_4 = 8$, $A_4B_4 = 16A_5B_5 = 16$... 进

而得出答案.

【详解】

解: $\because \triangle A_1B_1A_2$ 是等边三角形,



$$\therefore A_1B_1 = A_2B_2$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \angle 12 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 120^\circ$$

,

$$\angle MON = 30^\circ$$

,

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

,

$$\text{又 } \angle 3 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

, ∴

$$\angle MON = \angle 1 = 30^\circ$$

,

$$\therefore OA = AB = 2$$

,

$$\therefore AB = 2$$

,

∴

$\triangle ABA$ 、 $\triangle ABA$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle 11 = \angle 10 = 60^\circ$$

$$\angle 13 = 60^\circ,$$

$$\angle 4 = \angle 12 = 60^\circ$$

,

$$\therefore AB \parallel AB \parallel AB$$

$$, BA \parallel BA,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 6 = \angle 7 = 30^\circ$$

$$\angle 5 = \angle 8 = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BA = 2^2 = 4$$

$$, BA = 2BA,$$

$$\therefore AB = 4BA = 2^3 = 8$$

,

$$\text{同理可得: } AB = 8BA = 2^4 = 16,$$

...

∴

$\triangle ABA$ 的边长为 $2n$,

∴

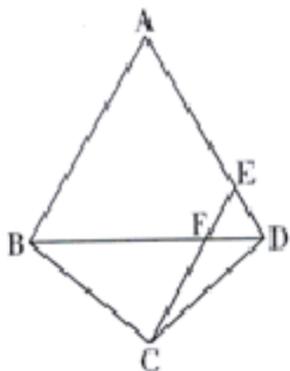
$\triangle ABA$ 的边长为 $2^5 = 32$.

故答案为: 32.

【点睛】

本题考查了等边三角形的性质以及30°直角三角形的性质，根据已知得出 $AB_3 = 4BA_1$ ， $AB_4 = 8BA_1$ ， $AB_5 = 16BA_1$ 进而发现规律是解题关键.

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $BC = DC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，点 E 为 AD 边上一点，连接 BD 、 CE ， CE 与 BD 交于点 F ，且 $CE \parallel AB$ ，若 $AB = 8$ ， $CE = 6$ ，则 BC 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{7}$

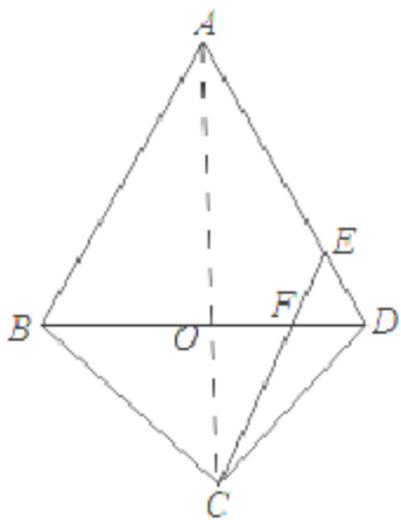
【解析】

【分析】

由 $AB = AD$ ， $BC = DC$ 知点 A, C 都在 BD 的垂直平分线上，因此，可连接 AC 交 BD 于点 O ，易证 $\triangle ABD$ 是等边三角形， $\triangle EDF$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质对三角形中的线段进行等量转换即可求出 OB, OC 的长度，应用勾股定理可求解.

【详解】

解：如图，连接 AC 交 BD 于点 O \triangle



$$\because AB = AD, BC = DC, \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore AC \text{ 垂直平分 } BD, \triangle ABD \text{ 是等边三角形}$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DAO = 30^\circ, AB = AD = BD = 8, BO = OD = 4$$

$$\because CE \parallel AB$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ACE = 30^\circ, \angle CED = \angle BAD = 60^\circ$$

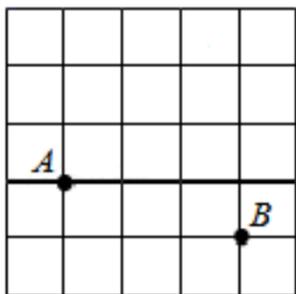
$$\therefore \angle DAO = \angle ACE = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore AE = CE = 6 \\ \therefore DE = AD - AE = 2 \\ \therefore \angle CED = \angle ADB = 60^\circ \\ \therefore EDF \text{ 是等边三角形} \\ \therefore DE = EF = DF = 2 \\ \therefore CF = CE - EF = 4, OF = OD - DF = 2 \\ \therefore OC = \sqrt{CF^2 - OF^2} = 2\sqrt{3} \\ \therefore BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

【点睛】

本题主要考查了等边三角形的判定与性质、勾股定理，综合运用等边三角形的判定与性质进行线段间等量关系的转换是解题的关键。

7. 如图，已知每个小方格的边长为1，A、B两点都在小方格的格点（顶点）上，请在图中找一个格点C，使 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，这样的格点C有_____个。



【答案】 8

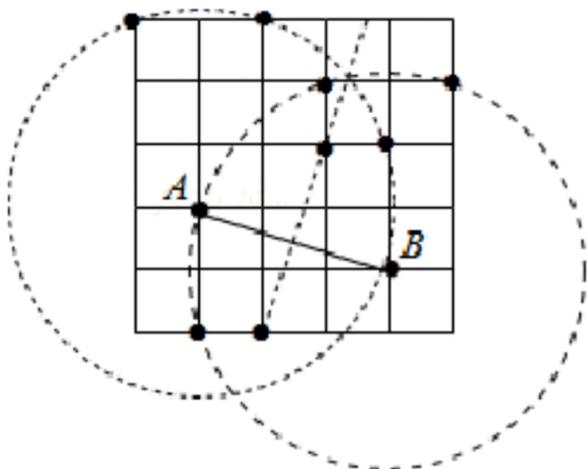
【解析】

【分析】

分别以A、B点为圆心，AB为半径作圆，找到格点即可（A、B、C共线除外）；此外加上在AB的垂直平分线上有两个格点，即可得到答案。

【详解】

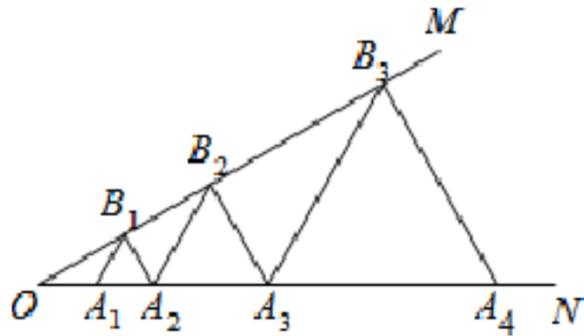
解：以A点为圆心，AB为半径作圆，找到格点即可，（A、B、C共线除外）；以B点为圆心，AB为半径作圆，在 $\odot B$ 上的格点为C点；在AB的垂直平分线上有两个格点。故使 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的格点C有8个。



【点睛】

本题考查了等腰三角形的判定，解题的关键是画出图形，利用数形结合解决问题.

8. 如图，已知 $\angle MON=30^\circ$ ，点 A_1, A_2, A_3, \dots 在射线 ON 上，点 B_1, B_2, B_3, \dots 在射线 OM 上， $\triangle A_1 B_1 A_2, \triangle A_2 B_2 A_3, \triangle A_3 B_3 A_4, \dots$ 均为等边三角形，若 $OA_1=4$ ，则 $\triangle A_n B_n A_{n+1}$ 的边长为_____.



【答案】 2^n .

【解析】

【分析】

根据等腰三角形的性质以及平行线的性质得出 $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel A_3 B_3$ 以及 $A_1 B_1 = 2 A_2 B_2$ ，得出 $A_3 B_3 = 4 A_1 B_1 = 8$ ， $A_4 B_4 = 8 A_1 B_1 = 16$ ， $A_5 B_5 = 16 A_1 B_1 = 32 \dots$ 进而得出答案.

【详解】

解：∵ $\triangle A_1 B_1 A_2$ 是等边三角形，
 ∴ $A_1 B_1 = A_2 B_1$ ，
 ∵ $\angle MON=30^\circ$ ，
 ∴ $OA_2=4$ ，
 ∴ $OA_1=A_1 B_1=2$
 ∴ $A_2 B_1=2$ ，
 ∵ $\triangle A_2 B_2 A_3, \triangle A_3 B_3 A_4$ 是等边三角形，
 ∴ $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel A_3 B_3, B_1 A_2 \parallel B_2 A_3$ ，
 ∴ $A_2 B_2 = 2 A_1 B_1, B_3 A_3 = 2 B_2 A_2$ ，
 ∴ $A_3 B_3 = 4 A_1 B_1 = 8$ ，
 $A_4 B_4 = 8 A_1 B_1 = 16$ ，
 $A_5 B_5 = 16 A_1 B_1 = 32$ ，
 以此类推 $\triangle A_n B_n A_{n+1}$ 的边长为 2^n .
 故答案为： 2^n .

【点睛】

本题主要考查等边三角形的性质及含 30° 角的直角三角形的性质，由条件得到 $OA_5=2OA_4=4OA_3=8OA_2=16OA_1$ 是解题的关键.

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，D、E分别在AC、AB边上，把 $\triangle ADE$ 沿DE翻折得到 $\triangle FDE$ ，点F恰好落在BC边上，若 $\triangle CFD$ 与 $\triangle BFE$ 都是等腰三角形，则 $\angle BAC$ 的度数为_____.

【答案】 45° 或 60°