专题 07　比大小归类

题型盘点·直击高考

目录

题型突围·精准提分

题型一：基础函数：指数函数性质

指｜点｜迷｜津

指数函数比大小易错点：

1.利用指数函数的单调性时要根据底数与1的大小区别对待.

2.指数函数在第一象限图像，具有“底大图高”的性质

3. 指数函数图像性质：一点一线。恒过定点（0，1），x 轴是它的水平渐近线

4. 进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断．对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确．

1．（23-24 高三·湖南衡阳·阶段练习）设 $a=\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$，$c=\ln 1.6$，则（　　）

A．$c<a<b$　　B．$b<a<c$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

【答案】D

【分析】首先比较$\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4$与$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4$的大小，即可得到$a>b$，再比较$\left(e^{0.6}\right)^5$与$1.6^5$的大小，即可得到$\ln 1.6<0.6$，从而得到$b>c$，即可判断.

【详解】因为$\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4=\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{16}{49}=\frac{2000}{6125}$，$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}=\frac{1323}{6125}$，所以$\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4>\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4$，则

$\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$，即$a>b$，因为$\left(e^{0.6}\right)^5=\left(e^{\frac{3}{5}}\right)^5=e^3>2.5^3=15.625$，$1.6^5=\left(\frac{8}{5}\right)^5=\frac{32768}{3125}<11$，

所以$\left(e^{0.6}\right)^5>1.6^5$，所以$e^{0.6}>1.6$，则$\ln e^{0.6}>\ln 1.6$，即$\ln 1.6<0.6$，又$b=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}>\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{3}{5}$，所以$b>c$，

所以$a>b>c$.故选：D

2．（23-24高三·云南昆明·模拟）已知$a=0.33^{\pi}$，$b=\left(\frac{1}{e}\right)^e$（e为自然对数的底数）$c=\tan 1$，比较$a$，$b$，$c$的大小（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】D

【分析】由常见的不等式可比较c和1的大小；利用幂函数和指数函数的单调性及中间量1可比较a，b和1的大小，进而得出答案.

【详解】由三角函数线可得：不等式$\tan x>x>\sin x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$c=\tan 1>1$，

又函数$y=x^e$为增函数，$y=0.33^x$为减函数，则$1>\left(\frac{1}{e}\right)^e>\left(\frac{1}{3}\right)^e>0.33^e>0.33^{\pi}>0$，

所以$1>b>a$，综上所述：$c>b>a$，故选D.

【点睛】关键点点睛：本题考查比较函数值的大小.解题关键在于利用三角函数线得到不等式$\tan x>x>\sin x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，进而比较$c$和$1$的大小;再利用幂函数和指数函数的单调性及中间量$1$，比较$a$，$b$和$1$的大小.

3．（23-24高三·宁夏银川·阶段练习）已知函数$f(x)=\left|3^x-1\right|$，$a<b<c$，且$f(a)>f(c)>f(b)$，则（　　）

A．$a<0$，$b<0$，$c<0$　　B．$a<0$，$b\geq 0$，$c>0$

C．$3^{-a}<3^c$　　D．$3^a+3^c<2$

【答案】D

【分析】画出$f(x)$的图象，根据a,b,c以及$f(a),f(c),f(b)$的大小关系确定正确答案.

【详解】令$f(x)=\left|3^x-1\right|=1$，解得$x=\log_3 2$，

画出$f(x)=\left|3^x-1\right|$的图象如下图所示，

由于 $a<b<c$，且 $f(a)>f(c)>f(b)$，

由图可知：$a<0$，$0<c<\log_3 2$，b 的值可正可负也可为 0，所以 AB 选项错误.

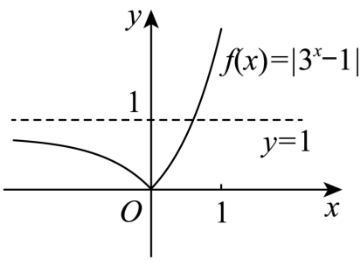
当 $a=-2,b=0,c=\frac{1}{2}$ 时，$f(-2)=\left|\frac{1}{9}-1\right|=\frac{8}{9},f(0)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-1$，

满足 $f(a)>f(c)>f(b)$，$3^{-a}=3^2=9>3^{\frac{1}{2}}$，所以 C 选项错误.

$f(a)=\left|3^a-1\right|=1-3^a,f(c)=\left|3^c-1\right|=3^c-1$，

$f(a)>f(c),1-3^a>3^c-1$，所以 $3^a+3^c<2$，D 选项正确.

故选：D



4．（2023·贵州毕节·模拟预测）已知实数 x,y 满足 $3^x+4^x=5^y$，且 $x=\log_2 3+\log_7 4$，则（　　）

A．$|x-y|>|x-2|$　B．$|x-y|>|y-3|$　　C．$|x-2|<|2-y|$　　D．$|x-3|<|3-y|$

【答案】D

【分析】利用对数函数、指数函数的单调性比较大小可得 $2<y<x<3$，再结合选项逐项判断可得答案.

【详解】因为 $\log_7 4>\log_8 4$，则 $x=\log_2 3+\log_7 4>\log_2 3+\log_8 4=\log_2 3+\log_2\sqrt[3]{4}=\log_2\sqrt[3]{108}>\log_2\sqrt[3]{2^6}=2$，

$x=\log_2 3+\log_7 4<\log_2 4+\log_7 4<3$，

因为 $5^y=3^x+4^x>3^2+4^2=5^2$，所以 $y>2$，

令 $f(x)=3^x+4^x-5^x\,(x>2)$，则 $f(x)=3^x+4^x-5^x=3^2\cdot3^{x-2}+4^2\cdot4^{x-2}-5^2\cdot5^{x-2}<3^2\cdot4^{x-2}+4^2\cdot4^{x-2}-5^2\cdot5^{x-2}$

$<25\left(4^{x-2}-5^{x-2}\right)<0$，所以 $3^x+4^x<5^x$，又因为 $3^x+4^x=5^y$，所以 $5^y<5^x$，可得 $y<x$，

所以 $2<y<x<3$，

对于 A，因为 $2<y<x<3$，所以 $x-y>0,x-2>0$，由 $y>2$ 得 $-y<-2$，

所以 $x-y<x-2$，可得 $|x-y|<|x-2|$，故 A 错误；

对于 B，即证 $|x-y|>|3-y|$，因为 $2<y<x<3$，所以 $x-y>0,3-y>0$，由 $x<3$ 得 $x-y<3-y$，所以

$|x-y|<|3-y|$，故 B 错误；

对于 C，即证 $|x-2|<|y-2|$，因为 $2<y<x<3$，所以 $x-2>0,y-2>0$，由 $x>y$ 得 $x-2>y-2$，所以

$|x-2|>|y-2|$，故 C 错误；

对于 D，$|3-x|<|3-y|$，因为$2<y<x<3$，所以$3-x>0, y-3>0$，由$x>y$得$-x<-y$，所以$3-x<3-y$，

即$|3-x|<|3-y|$，故 D 正确.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题的关键点是利用对数函数、指数函数的单调性得出$2<y<x<3$，考查了学生运算求解能力.

5.（22-23 高三·山东威海·模拟）已知函数$f(x)=3^{|x|}$，若$a=f(\log_5 2)$，$b=f(\lg\frac{1}{4})$，$c=f(\log_{25}10)$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

【答案】A

【分析】根据对数函数的单调性和中间量比较出$0<\log_5 2<\lg 4<\log_{25}10$，再由函数$f(x)=3^{|x|}$的单调性得出结果.

【详解】$0=\log_5 1<\log_5 2=\log_5\sqrt{4}<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，由于$\left|\lg\frac{1}{4}\right|=|-\lg 4|=\lg 4$，$\lg 4=\lg\sqrt{16}>\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$，

$\lg 4=\lg\sqrt[3]{64}<\lg\sqrt[3]{100}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{1}{2}<\lg 4<\frac{2}{3}$，$\log_{25}10=\log_{25}\sqrt[3]{1000}>\log_{25}\sqrt[3]{625}=\frac{2}{3}$，所以$0<\log_5 2<\lg 4<\log_{25}10$，

因为函数$f(x)=3^{|x|}$在$(0,+\infty)$上为增函数，则$f(\log_5 2)<f(\lg 4)<\log_{25}10$，所以$f(\log_5 2)<f(\lg\frac{1}{4})<\log_{25}10$.

故选：A

题型二：基础函数：对数函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

对数函数比大小，主要时通过对数计算公式转化为结果相同，利用单调性比大小

对数运算公式

1.对数的运算法则：

①$\log_a(MN)=\underline{\log_a M+\log_a N}$　　②$\log_a\frac{M}{N}=\underline{\log_a M-\log_a N}$；

③$\log_a M^n=\underline{n\log_a M}\ (n\in\mathbf{R})$；　　④$\log_{a^m}M^n=\underline{\frac{n}{m}\log_a M}$.

2.对数的性质：①$a^{\log_a N}=\underline{\quad N\quad}$；　　②$\log_a a^N=\underline{\quad N\quad}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

3.对数的重要公式

①换底公式：$\log_b N=\underline{\frac{\log_a N}{\log_a b}}$；　　②换底推广：$\underline{\log_a b}=\frac{1}{\log_b a}$，$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\underline{\log_a d}$.

1.（22-23 高三下·河南·阶段练习）已知$a=\lg 8$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{12}10$，$d=3^{0.01}$，则(　)

A．$c<b<a<d$　B．$d<a<c<b$　C．$a<b<c<d$　D．$b<a<c<d$

【答案】D

【分析】首先判断 a、b、c 范围均为$(0,1)$，$d>1$，则 d 最大；用作商法可判断 a、b 大小；用作商法并结合基本不等式可判断 a、c 大小；从而可得四个数的大小关系.

【详解】$a=\lg 8\in(0,1)$， $b=\log_3 2\in(0,1), c=\log_{12}10\in(0,1), d=3^{0.01}>1$，

$a=3\lg 2, b=\dfrac{\lg 2}{\lg 3}, c=\dfrac{1}{\lg 12}$，

$\dfrac{a}{b}=3\lg 3=\lg 27>1\Rightarrow a>b$，

$\dfrac{a}{c}=\lg 8\cdot\lg 12<\left(\dfrac{\lg 8+\lg 12}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\lg 96}{2}\right)^2<\left(\dfrac{\lg 100}{2}\right)^2=1\Rightarrow a<c$，

$\therefore b<a<c<d$．

故选：D．

2．（23-24 高三·江苏泰州·模拟）已知三个互不相等的正数a,b,c满足

$a=e^{\frac{2}{3}}, b=\log_2 3+\log_9 6, c=\log_{\sqrt{5}}\left(2^a+1\right)$，（其中$e=2.71828\cdots$ 是一个无理数），则a,b,c的大小关系为（　）

A． $a<b<c$　　B． $a<c<b$

C． $c<a<b$　　D． $c<b<a$

【答案】B

【分析】由对数函数和指幂函数的单调性和运算性质放缩，再加上基本不等式求解即可.

【详解】因为$a=e^{\frac{2}{3}}$，所以$a^3=e^2=2.7^2<2^3$

所以根据幂函数的性质可得$e^{\frac{2}{3}}<2$，

因为a,b,c都是正数，

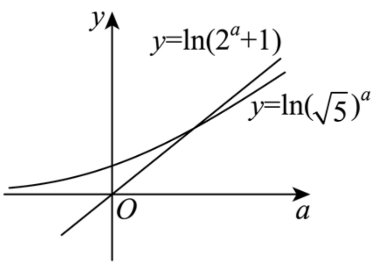
$b=\log_2 3+\log_9 6=\log_2 3+\log_{3^2}6=\log_2 3+\log_3\sqrt{6}\geq 2\sqrt{\log_2 3\cdot\log_3\sqrt{6}}=2\sqrt{\log_2\sqrt{6}}>2\sqrt{\log_2 2}=2$

$c=\log_{\sqrt{5}}\left(2^a+1\right)=2\log_5\left(2^{e^{\frac{2}{3}}}+1\right)<2\log_5\left(2^2+1\right)=2\log_5 5=2$，

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\log_{\sqrt{5}}\left(2^a+1\right)}{a}=\log_{\left(\sqrt{5}\right)^a}\left(2^a+1\right)=\dfrac{\ln\left(2^a+1\right)}{\ln\left(\sqrt{5}\right)^a}$，

因为$f(x)=\ln x$是递增函数，又因为$a\in(0,2)$，

作出$y=\ln\left(2^a+1\right)$和$y=\ln\left(\sqrt{5}\right)^a$的图像，如图可得，当$a=2$时，两函数值相等；$a<2$时，$y=\ln\left(2^a+1\right)$图像一直在$y=\ln\left(\sqrt{5}\right)^a$的上方，所以$a<c$



故$a<c<b$，

故选：B

【点睛】将a利用幂函数的单调性进行放缩；把b用指数函数的运算性质和基本不等式放缩；再把c用对数函数的性质放缩，最终得到结果.

3．（2024·重庆·模拟预测）设$a=\log_{2024}2023$，$b=\log_{2023}2022$，$c=\log_{0.2024}0.2023$，则（　）

A．$c<a<b$　　　　B．$b<c<a$

C．$b<a<c$　　　　D．$a<b<c$

【答案】C

【分析】利用对数函数的性质得到c最大，再利用作差法，结合基本不等式得到$b<a$，从而得解.

【详解】由对数函数的性质知$c=\log_{0.2024}0.2023>\log_{0.2024}0.2024=1$，

$0=\log_{2024}1<\log_{2024}2023<\log_{2024}2024=1$，

$0=\log_{2023}1<\log_{2023}2022<\log_{2023}2023=1$，

所以$c>1$，$0<a<1$，$0<b<1$；

当$n>2$时，$\ln(n+1)>\ln n>\ln(n-1)>0$，

所以$\ln(n+1)\cdot\ln(n-1)-(\ln n)^2<\left[\frac{\ln(n+1)+\ln(n-1)}{2}\right]^2-(\ln n)^2$

$=\left[\frac{\ln(n+1)(n-1)}{2}\right]^2-(\ln n)^2=\left[\frac{\ln(n^2-1)}{2}\right]^2-(\ln n)^2$

$<\left(\frac{\ln n^2}{2}\right)^2-(\ln n)^2=(\ln n)^2-(\ln n)^2=0$，

取$n=2023$，则$\lg 2022\cdot\lg 2024-(\lg 2023)^2<0$，

所以$b-a=\log_{2023}2022-\log_{2024}2023=\frac{\lg 2022}{\lg 2023}-\frac{\lg 2023}{\lg 2024}$

$=\frac{\lg 2022\cdot\lg 2024-(\lg 2023)^2}{\lg 2023\cdot\lg 2024}<0$，即$b<a$，

综上，$b<a<c$.

故选：C.

【点睛】结论点睛：对数比大小常用结论：$\log_n(n-1)<\log_{n+1}n(n>2)$.

4．（2024·辽宁·一模）设$a=e^{\frac{10}{33}}$，$b=\ln\frac{11}{10}$，$c=\frac{\ln 2.2}{10}$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【分析】由题意可得$a>1$，$b<1$，$c<1$，即可得$a>b$，$a>c$，再比较b与c

的大小关系，借助对数运算转化为比较$(1.1)^9$与2的大小关系，结合放缩计算即可得.

【详解】$a=e^{\frac{10}{33}}>e^0=1$，$b=\ln\frac{11}{10}<1$，$c=\frac{\ln 2.2}{10}<1$，故$a>b$，$a>c$，

要比较$\ln\frac{11}{10}$与$\frac{\ln 2.2}{10}$的大小，即比较$\ln\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$与$\ln 2.2$的大小，

等价于比较$(1.1)^{10}$与2.2的大小，等价于比较$(1.1)^9$与2的大小，

又$(1.1)^9=1.1\times(1.1)^8=1.1\times(1.21)^4>1.1\times(1.2)^4=1.1\times(1.44)^2>1.1\times(1.4)^2=1.1\times1.96>2$，故$(1.1)^9>2$，即

$\ln\frac{11}{10}>\frac{\ln 2.2}{10}$，即$b>c$，故$c<b<a$.故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于比较b与c的大小关系，可借助对数运算转化为比较$(1.1)^9$与2的大小关系，再借助放缩帮助运算即可得.

5.（23-24 高三·广东佛山·模拟）已知$2^a=5,3^b=10,4^c=17$，则a，b，c的大小关系为（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

【答案】D

【分析】根据指数式和对数式的转化，将a,b,c表示为对数形式，结合对数的运算性质以及对数函数的性质比较大小，即可得答案.

【详解】由题意知$2^a=5,3^b=10$，$4^c=17$，

则$a=\log_2 5=\log_2\left(4\times\frac{5}{4}\right)=2+\log_2\frac{5}{4},b=\log_3 10=\log_3 9\times\frac{10}{9}=2+\log_3\frac{10}{9}$，

$c=\log_4 17=\log_4 16\times\frac{17}{16}=2+\log_4\frac{17}{16}$，因为$\frac{5}{4}>\frac{10}{9}$，故$\log_2\frac{5}{4}>\log_2\frac{10}{9}$，

又因为$0<\log_{\frac{10}{9}}2<\log_{\frac{10}{9}}3$，故$\frac{1}{\log_{\frac{10}{9}}2}>\frac{1}{\log_{\frac{10}{9}}3}$，即$\log_2\frac{10}{9}>\log_3\frac{10}{9}$

故$\log_2\frac{5}{4}>\log_3\frac{10}{9}$，即得$a>b$，同理可得$\frac{10}{9}>\frac{17}{16}>1$，故$\log_3\frac{10}{9}>\log_3\frac{17}{16}>\log_4\frac{17}{16}$，即$b>c$，

故$c<b<a$，故选：D

题型三：幂指对函数性质

指丨点丨迷丨津

有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法：

（1）利用指数函数的单调性：$y=a^x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（2）利用对数函数的单调性：$y=\log_a x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（3）借助于中间值，例如：0 或 1 等.

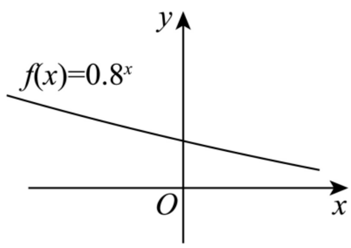
1．（23-24 高三·辽宁朝阳·阶段练习）已知$a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9}$，$b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}$，$c=\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}+\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

【答案】A

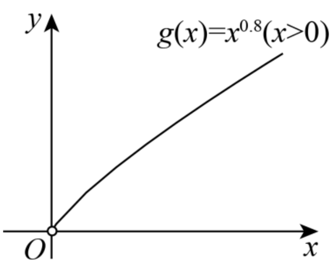
【分析】根据函数的上凸和下凸性质得到$a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9}>3\times0.8^{0.7}$，$b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}<3\times0.7^{0.8}$，结合$0.8^{0.7}>0.7^{0.7}>0.7^{0.8}$得到$a>b$，设$h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(0<x<1)$，求导得到$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，得到$0.6^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}$，同理可得$0.7^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}$，$0.8^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，相加后求出$b>c$，得到答案.

【详解】设$f(x)=0.8^x$，画出$f(x)$的图象，



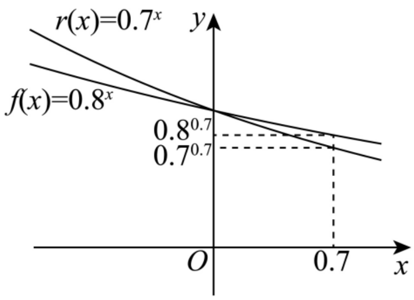
故$f(x)$为下凸函数，当$x_1\neq x_2$时$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

所以$0.8^{0.5}+0.8^{0.9}>2\times0.8^{0.7}$，$a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9}>3\times0.8^{0.7}$.设$g(x)=x^{0.8}(x>0)$，画出$g(x)$图象，



故$g(x)$为上凸函数，当$x_1\neq x_2$时$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}<g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，所以$b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}<3\times0.7^{0.8}$，

同一坐标系内画出 $f(x)=0.8^{x}$ 和 $r(x)=0.7^{x}$ 的图象，



又 $y=0.7^{x}$ 在 R 上单调递减，故 $0.8^{0.7}>0.7^{0.7}>0.7^{0.8}$，所以 $a>b$.

设 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(0<x<1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $0<x<1$ 时 $h(x)>h(1)=0$，所以 $\ln x>1-\frac{1}{x}$，$0.8\ln 0.6>\frac{4}{5}\left(1-\frac{5}{3}\right)=-\frac{8}{15}$，

所以 $0.6^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}$，同理可得 $0.7^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}$，$0.8^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，相加得 $0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}+\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，$b>c$，

所以 $a>b>c$.故选：A

【点睛】结合函数图象得到函数 $f(x)$ 的凹凸性，进而可根据此性质得到以下结论，

若函数 $f(x)$ 为上凸函数，则有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

若函数 $f(x)$ 为下凸函数，则有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，本题中可以此性质比较出 a,b 的大小.

2.（23-24 高三江苏泰州·模拟）已知三个互不相等的正数 a,b,c 满足 $a=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}},b=\log_2 3+\log_9 6,c=\log_{\sqrt{5}}\left(2^{a}+1\right)$，（其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是一个无理数），则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

【答案】B

【分析】由对数函数和指幂函数的单调性和运算性质放缩，再加上基本不等式求解即可.

【详解】因为 $a=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$，所以 $a^{3}=\mathrm{e}^{2}=2.7^{2}<2^{3}$ 所以根据幂函数的性质可得 $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}<2$，

因为 a,b,c 都是正数，

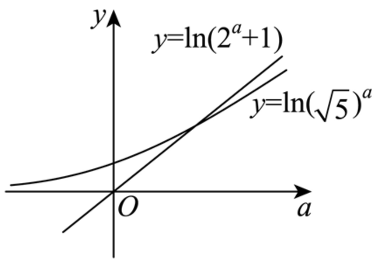
$$b=\log_2 3+\log_9 6=\log_2 3+\log_{3^2} 6=\log_2 3+\log_3\sqrt{6}\geq 2\sqrt{\log_2 3\cdot\log_3\sqrt{6}}=2\sqrt{\log_2\sqrt{6}}>2\sqrt{\log_2 2}=2$$

$$c=\log_{\sqrt{5}}\left(2^{a}+1\right)=2\log_5\left(2^{e^{\frac{2}{3}}}+1\right)<2\log_5\left(2^{2}+1\right)=2\log_5 5=2,$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\log_{\sqrt{5}}\left(2^{a}+1\right)}{a}=\log_{(\sqrt{5})^{a}}\left(2^{a}+1\right)=\frac{\ln\left(2^{a}+1\right)}{\ln\left(\sqrt{5}\right)^{a}}$$，因为 $f(x)=\ln x$ 是递增函数，又因为 $a\in(0,2)$，

作出 $y=\ln\left(2^{a}+1\right)$ 和 $y=\ln\left(\sqrt{5}\right)^{a}$ 的图像，如图可得，当 $a=2$ 时，两函数值相等；$a<2$ 时，$y=\ln\left(2^{a}+1\right)$

图像一直在 $y=\ln\left(\sqrt{5}\right)^{a}$ 的上方，所以 $a<c$



故 $a<c<b$， 故选：B

【点睛】将 a 利用幂函数的单调性进行放缩；把 b 用指数函数的运算性质和基本不等式放缩；再把 c 用对数函数的性质放缩，最终得到结果.

3．（2023·河南·模拟预测）已知 $a=\ln\pi,b=\log_{3}\pi,c=\sqrt{\pi}\ln 2$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A． $b<a<c$　　　　B． $a<b<c$　　　　C． $c<b<a$　　　　D． $b<c<a$

【答案】A

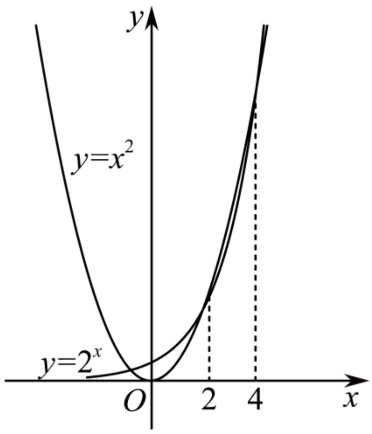
【分析】

利用对数函数和指数函数，幂函数的性质求解.

【详解】$\because e<3<\pi$， $\therefore a=\log_{e}\pi>\log_{3}\pi=b>\log_{3}3=1$， 即 $a>b>1$，

$\because a=\ln\pi=\ln\left(\sqrt{\pi}\right)^{2}$， $c=\sqrt{\pi}\ln 2=\ln 2^{\sqrt{\pi}}$， 下面比较 $\left(\sqrt{\pi}\right)^{2}$ 与 $2^{\sqrt{\pi}}$ 的大小，构造函数 $y=x^{2}$ 与 $y=2^{x}$，

由指数函数 $y=2^{x}$ 与幂函数 $y=x^{2}$ 的图像与单调性可知，



当 $x\in(0,2)$ 时， $x^{2}<2^{x}$； 当 $x\in(2,4)$ 时， $x^{2}>2^{x}$

由 $x=\sqrt{\pi}\in(0,2)$， 故 $\left(\sqrt{\pi}\right)^{2}<2^{\sqrt{\pi}}$， 故 $\ln\pi<\ln 2^{\sqrt{\pi}}$， 即 $a<c$， 所以 $b<a<c$， 故选：A

4．（22-23 高三·河北唐山·阶段练习）设 $a=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$， $b=\ln 1.5$， $c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$，则 a，b，c 的大小顺序是（　　）

A． $c<a<b$　　　　B． $c<b<a$　　　　C． $a<c<b$　　　　D． $b<c<a$

【答案】D

【分析】利用幂函数与对数函数的单调性即可得解.

【详解】因为 $a=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}>0$， $c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}}>0$， $\frac{9}{16}>\frac{8}{27}>\frac{1}{16}>0$，

又因为 $y=x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}>\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}}>\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，即 $a>c>\frac{1}{2}$，

因为 $\frac{9}{4}=2.25<\mathrm{e}$，所以 $\frac{3}{2}<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，又因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\ln\frac{3}{2}<\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，即 $b=\ln 1.5<\frac{1}{2}$，

综上：$b<c<a$.故选：D.

5.（2022·河南·一模）已知 $a=\mathrm{e}^{\pi},b=\pi^{\mathrm{e}},c=\left(\sqrt{2}\right)^{\mathrm{e}\pi}$，则这三个数的大小关系为（　　）

A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】A

【分析】构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$，利用导数法研究单调性，并利用单调性可比较 a,b，在同一坐标系中作出 $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$ 与 $y=x$ 的图象，结合图象与幂函数的性质可比较 b,c，即可求解

【详解】令 $f(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},(x>0)$，

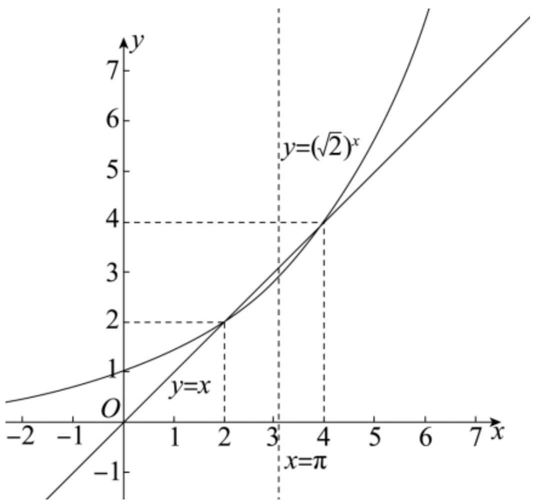
由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\mathrm{e}$，由 $f'(x)<0$，解得 $x>\mathrm{e}$，

所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减；因为 $\pi>\mathrm{e}$，

所以 $f(\pi)<f(\mathrm{e})$，即 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，所以 $\mathrm{e}\ln\pi<\pi\ln \mathrm{e}$，所以 $\ln\pi^{\mathrm{e}}<\ln \mathrm{e}^{\pi}$，又 $y=\ln x$ 递增，

所以 $\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}$，即 $b<a$；$\left(\sqrt{2}\right)^{\mathrm{e}\pi}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}\right]^{\mathrm{e}}$，

在同一坐标系中作出 $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$ 与 $y=x$ 的图象，如图：



由图象可知在 $(2,4)$ 中恒有 $x>\left(\sqrt{2}\right)^{x}$，又 $2<\pi<4$，所以 $\pi>\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$，

又 $y=x^{\mathrm{e}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $\pi>\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$ 所以 $\pi^{\mathrm{e}}>\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}\right]^{\mathrm{e}}=\left(\sqrt{2}\right)^{\mathrm{e}\pi}$，即 $b>c$；

综上可知：$c<b<a$，故选：A

6.（2024年高考天津卷）若 $a=4.2^{-0.3}$，$b=4.2^{0.3}$，$c=\log_{4.2}0.2$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数和对数函数的单调性分析判断即可.

【详解】因为 $y=4.2^x$ 在 R 上递增，且 $-0.3<0<0.3$，

所以 $0<4.2^{-0.3}<4.2^0<4.2^{0.3}$，所以 $0<4.2^{-0.3}<1<4.2^{0.3}$，即 $0<a<1<b$，

因为 $y=\log_{4.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $0<0.2<1$，所以 $\log_{4.2}0.2<\log_{4.2}1=0$，即 $c<0$，

所以 $b>a>c$，故选：B

题型四：借助 0、1 分界

指 | 点 | 迷 | 津

解答比较函数值大小问题，常见的基础思路之一是判断各个数值所在的区间，这样的区间划分，最基础的是以正负划分，正数则以 1 为区间端点划分。

指、对、幂大小比较的常用方法：

（1）底数相同，指数不同时，如 a^{x_1} 和 a^{x_2}，利用指数函数 $y=a^x$ 的单调性；

（2）指数相同，底数不同，如 x_1^a 和 x_2^a 利用幂函数 $y=x^a$ 单调性比较大小；

（3）底数相同，真数不同，如 $\log_a x_1$ 和 $\log_a x_2$ 利用指数函数 $\log_a x$ 单调性比较大小；

（4）底数、指数、真数都不同，寻找中间变量 0，1 或者其它能判断大小关系的中间量，借助中间量进行大小关系的判定.

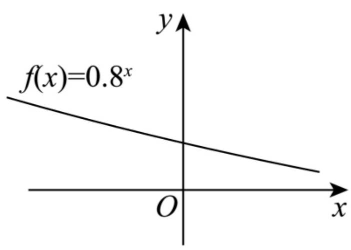
1.（23-24 高三 ·辽宁朝阳·阶段练习）已知 $a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9}$，$b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}$，$c=\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}+\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

【答案】A

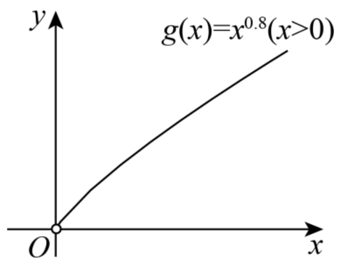
【分析】根据函数的上凸和下凸性质得到 $a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9}>3\times0.8^{0.7}$，$b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}<3\times0.7^{0.8}$，结合 $0.8^{0.7}>0.7^{0.7}>0.7^{0.8}$ 得到 $a>b$，设 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(0<x<1)$，求导得到 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，得到 $0.6^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}}$，同理可得 $0.7^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{12}{35}}$，$0.8^{0.8}>\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}$，相加后求出 $b>c$，得到答案.

【详解】设 $f(x)=0.8^x$，画出 $f(x)$ 的图象，



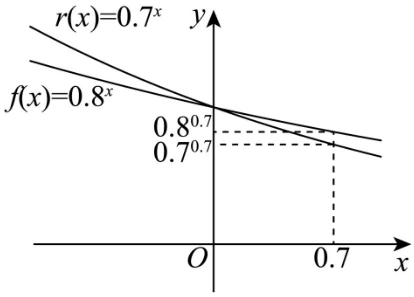
故 $f(x)$ 为下凸函数，当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

所以 $0.8^{0.5}+0.8^{0.9} > 2\times0.8^{0.7}$，$a=0.8^{0.5}+0.8^{0.7}+0.8^{0.9} > 3\times0.8^{0.7}$.设 $g(x)=x^{0.8}(x>0)$，画出 $g(x)$ 图象，



故 $g(x)$ 为上凸函数，当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} < g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，所以 $b=0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8} < 3\times0.7^{0.8}$，

同一坐标系内画出 $f(x)=0.8^x$ 和 $r(x)=0.7^x$ 的图象，



又 $y=0.7^x$ 在 R 上单调递减，故 $0.8^{0.7} > 0.7^{0.7} > 0.7^{0.8}$，所以 $a>b$.

设 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(0<x<1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $0<x<1$ 时 $h(x)>h(1)=0$，所以 $\ln x>1-\frac{1}{x}$，$0.8\ln 0.6>\frac{4}{5}\left(1-\frac{5}{3}\right)=-\frac{8}{15}$，

所以 $0.6^{0.8}>e^{-\frac{8}{15}}$，同理可得 $0.7^{0.8}>e^{-\frac{12}{35}}$，$0.8^{0.8}>e^{-\frac{1}{5}}$，相加得 $0.6^{0.8}+0.7^{0.8}+0.8^{0.8}>e^{-\frac{8}{15}}+e^{-\frac{12}{35}}+e^{-\frac{1}{5}}$，$b>c$，

所以 $a>b>c$.故选：A

【点睛】结合函数图象得到函数 $f(x)$ 的凹凸性，进而可根据此性质得到以下结论，

若函数 $f(x)$ 为上凸函数，则有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

若函数 $f(x)$ 为下凸函数，则有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，本题中可以此性质比较出 a,b 的大小.

2.（黑龙江省桦南县第一中学 2021-2022 学年高三上学期）已知 $a=\log_3\frac{7}{2}$，$b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$

C．$b>c>a$　　D．$c>a>b$

【答案】D

【分析】

根据对数函数的单调性，结合指数函数的性质进行判断即可.

【详解】

因为$a=\log_3\frac{7}{2}>\log_3 3=1$， $b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=4^{-\frac{1}{3}}<1$， $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_3 5>1$，

$\log_3 5>\log_3\frac{7}{2}$，所以$c>a>b$，故选：D

3.（广东省陆丰市林启恩纪念中学 2021-2022 学年高三学期（12 月）数学试题）已知$a=0.3^{\frac{1}{2}}$， $b=2^{0.2}$，$c=0.3^{0.2}$，则a，b，c三者的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

【答案】C

【分析】

利用指数函数的性质比较即可

【详解】

因为$y=0.3^x$在R上为减函数，且$\frac{1}{2}>0.2>0$，

所以$0.3^{\frac{1}{2}}<0.3^{0.2}<0.3^0$，即$0.3^{\frac{1}{2}}<0.3^{0.2}<1$，

因为$y=2^x$在R上为增函数，且$0.2>0$，

所以$2^{0.2}>2^0=1$，

所以$0.3^{\frac{1}{2}}<0.3^{0.2}<1<2^{0.2}$，所以$b>c>a$

故选：C.

4.（陕西省西安市第一中学 2021-2022 学年高三上学期期中）已知定义在R上的函数$f(x)$满足当$m\neq n$时，不等式$(m-n)[f(m)-f(n)]<0$恒成立，若$a=f\left(\log_5\frac{1}{2}\right)$，$b=f\left(\log_2\frac{1}{2}\right)$，$c=f\left(4^{0.3}\right)$，则$a$，$b$，$c$大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

【答案】D

【分析】

依题意可得函数$f(x)$在R上为减函数，再根据指数、对数的性质比较自变量的大小即可；

【详解】

解：根据题意，函数$f(x)$满足当$m\neq n$时，不等式$(m-n)[f(m)-f(n)]<0$恒成立，

所以函数$f(x)$在R上为减函数，

因为$\log_2\frac{1}{2}=-1$， $-1=\log_5\frac{1}{5}<\log_5\frac{1}{2}<0$，即$-1<\log_5\frac{1}{2}<0$，又$1=4^0<4^{0.3}$

所以$f\left(\log_2\frac{1}{2}\right)>f\left(\log_5\frac{1}{2}\right)>f\left(4^{0.3}\right)$，即$b>a>c$，故选：D.

题型五：指数型同构法

指|点|迷|津

指数幂同构性比较大小

①同底幂比较，构造指数函数，用单调性比较；

②同指数幂比较，构造幂函数，用单调性比较；

③不同底也不同指幂比较，借助媒介“1”.

1.（江苏省镇江市2021-2022学年高三上学期期中数学试题）已知$a=2^{\sqrt{3}}$，$b=\frac{5}{2}$，$c=\log_2 5$，$d=2\sqrt{2}$，则下列大小关系正确的为（　　）

A．$c>a>d>b$　　B．$a>c>d>b$　　C．$a>d>c>b$　　D．$a>d>b>c$

【答案】D

【分析】

利用指数函数、对数函数的性质进行比较即可.

【详解】$d=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}<2^{\sqrt{3}}=a$。$d=2\sqrt{2}=\sqrt{8}>\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=b$

$b=\frac{5}{2}=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\log_2\sqrt{32}>\log_2\sqrt{25}=\log_2 5=c$

∴$a>d>b>c$，故选：D

2..（四川省宜宾市普通高中2022届高三上学期第一次诊断测试文科数学试题）若$a=0.5^{0.6},b=0.6^{0.5},c=\log_9 3$，则$a,b,c$的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$

C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

【答案】B

【分析】

根据指数函数和幂函数的单调性分别比较$0.5^{0.6},0.5^{0.5}$和$0.5^{0.5},0.6^{0.5}$的大小，即可比较a,b，再根据$c=\log_9 3=\frac{1}{2}$，即可得出答案.

【详解】

解：因为函数$y=0.5^x$是减函数，所以$0.5<0.5^{0.6}<0.5^{0.5}$，又函数$y=x^{0.5}$在$(0,+\infty)$上是增函数，

所以$0.5^{0.5}<0.6^{0.5}$，所以$0.5^{0.6}<0.6^{0.5}$，即$\frac{1}{2}<a<b$，$c=\log_9 3=\frac{1}{2}$，所以$c<a<b$.

故选：B.

3.（陕西省西安中学2021-2022学年上学期数学试题）若$a=3^{0.5}$，$b=2^{0.6},c=\ln 10$，则三者大小关系为(　　)

A．$c>b>a$

B．$a>c>b$

C．$b>a>c$

D．$c>a>b$

【答案】D

【分析】

先借助中间量“2”比较出a,c间的大小关系和b,c间的大小关系，再将a、b分别化为$3^{\frac{5}{10}},2^{\frac{6}{10}}$，进而化为根式即可比较出$a$、$b$的大小关系，最后得到答案.

【详解】

因为$a=3^{0.5}=\sqrt{3}<2,b=2^{0.6}<2^1=2,c=\ln 10>\ln e^2=2$，所以$a<c,b<c$，

又因为$a=3^{0.5}=3^{\frac{5}{10}}=\sqrt[10]{243}$，$b=2^{\frac{6}{10}}=\sqrt[10]{64}$，所以$a>b$，

综上：$c>a>b$.故选：D.

4..已知三个实数a，$b=a^a$，$c=a^{a^a}$，其中$0<a<1$，则这三个数的大小关系是（　　）

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】A

【分析】

利用指数函数的单调性判断.

【详解】

$\because 0<a<1$，$\therefore$由指数函数的性质，有$a^1<a^a<a^0=1$，$\therefore 1>a^a>a$．再由指数函数的性质得$a<a^{a^a}<a^a$，即$a<c<b$．

故选：A

题型六：借助常数分界

指 | 点 | 迷 | 津

寻找非0、1的中间变量是难点。中间变量的选择首先要估算要比较大小的两个值所在的大致区间。然后可以对区间使用二分法（或者利用区间内特殊值，或者利用指对互化）寻找合适的中间值。

1.估算要比较大小的两个值所在的大致区间

2.可以对区间使用二分法（或者利用指对转化）寻找合适的中间值

3.利用幂指对等函数计算公式进行适当的放缩转化

1.（陕西省西安市第一中学2024届高三下学期高考模拟押题文科数学试题（一））若$a=0.31^{1.5},b=\log_3 12,c=\log_2 6,d=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$，则有（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>d$

C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

【答案】B

【分析】由题意首先得$0<a<1,d=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}<0$，进一步$b=\log_3 12=1+\log_3 4>2,c=\log_2 6=1+\log_2 3>2$，从而我们只需要比较$\log_3 4,\log_2 3$的大小关系即可求解，两式作商结合基本不等式、换底公式即可比较.

【详解】$a=0.31^{1.5}<0.31^0=1$，所以$0<a<1,d=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}<0$，

$b=\log_3 12=1+\log_3 4>2,c=\log_2 6=1+\log_2 3>2$，

又因为$\frac{\log_3 4}{\log_2 3}=\frac{\ln 4\cdot\ln 2}{\ln 3\cdot\ln 3}<\frac{\left(\frac{\ln 4+\ln 2}{2}\right)^2}{\ln 3\cdot\ln 3}=\frac{(\ln 2\sqrt{2})^2}{(\ln 3)^2}<1$，

所以$b<c$，即$d<a<b<c$.故选：B.

2.（2024年普通高等学校招生全国统一考试数学理科猜题卷（四））已知$a=\log_5 2$，$b=\lg 4$，$c=2e^{-1}$，则a,b,c的大小关系为（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<b<a$

【答案】A

【分析】根据题意利用指、对数函数单调性以及指、对数运算分析判断.

【详解】因为$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，$b=\lg 4>\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$，所以$a<b$；

又因为$3\lg 2=\lg 2^3=\lg 8<1, 3e^{-1}>1$，则$3\lg 2<3e^{-1}$，

即$\lg 2<e^{-1}$，所以$2\lg 2=\lg 4<2e^{-1}$，即$b<c$；

所以$a<b<c$．故选：A.

3.（2022年全国著名重点中学领航高考冲刺试卷（九））若$a=\log_3 2$，$b=\log_\pi 3$，$c=\log_8 5$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$

C．$b<c<a$　　D．$a<c<b$

【答案】D

【分析】

根据对数函数的单调性，分别计算a，b，c的范围即可比较大小.

【详解】

因为$2^3<3^2$，所以$\log_3 2^3<\log_3 3^2$，即$3\log_3 2<2\log_3 3=2$，可得$\log_3 2<\frac{2}{3}$，即$a<\frac{2}{3}$，

因为$5^5<8^4$，所以$\log_8 5^5<\log_8 8^4$，即$5\log_8 5<4\log_8 8=4$，

所以$\log_8 5<\frac{4}{5}$，又$\log_8 5>\log_8 4=\log_8 8^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$，可得$\frac{2}{3}<c<\frac{4}{5}$，

因为$\left(\frac{\pi}{3}\right)^4<(1.1)^4=1.4641<3$，故$\pi^4<3^5$所以$\log_\pi \pi^4<\log_\pi 3^5$，即$4\log_\pi \pi<5\log_\pi 3$，

所以$\log_\pi 3>\frac{4}{5}$，即$b>\frac{4}{5}$，所以$a<c<b$。故选：D.

4.（广西师大附属外国语学校2021届高三5月高考考前模拟考试数学（理）试题）已知$a=\log_5 6$，$b=\log_3 5$，$c=\log_2 3$，$d=\frac{3}{2}$，则a、b、c、d的大小关系是（　　）

A．$b<a<d<c$　　B．$a<b<c<d$

C．$b<a<c<d$　　D．$a<b<d<c$

【答案】D

【分析】

利用对数函数的单调性比较a、b、c与d的大小关系，利用中间值法判断出a、b的大小关系，综合可得出a、b、c、d的大小关系.

【详解】

Q $a=\log_5 6<\log_5 5\sqrt{5}=\frac{3}{2}=d$，$b=\log_3 5<\log_3 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}=d$，$c=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}=d$，

Q $6^4=1296<5^5=3125$，$\therefore 6<5^{\frac{5}{4}}$，则 $a=\log_5 6<\log_5 5^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}$，

Q $5^4=625>3^5=243$，$\therefore 5>3^{\frac{5}{4}}$，则 $b=\log_3 5>\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}$，

因此，$a<b<d<c$.故选：D.

题型七：放缩型

指 | 点 | 迷 | 津

放缩：

1.借助幂指对函数的单调性进行放缩。

2.常用一些放缩公式：

$\tan x\geq x\geq \sin x,\left(0\leq x<\frac{\pi}{2}\right)$;

$e^x\geq x+1$,当 $x=0$ 时取等;

$\ln x\leq x-1$,当 $x=1$ 时取等,

1.（湖北省恩施州咸丰春晖学校2022-2023学年高二上学期11月月考数学试题)若 $a=\ln 5$，$b=\frac{4}{3}$，$c=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则它们的大小关系是（　）

A．$a>c>b$　　B．$b>c>a$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

【答案】D

【分析】先判断 b,c 大小，再分别判断 a,b 和 a,c 的大小即可

【详解】因为 $c=\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{\sqrt{5}}>\frac{4}{3}=b$，故 $c>b$.又 $3a=3\ln 5=\ln 125$，$3b=4=\ln e^4<\ln 3^4=\ln 81<\ln 125=3a$，故 $b<a$.再分析 a,c 和 $\frac{5}{3}$ 的大小，因为 $c^2=\frac{16}{5}>3$，$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}<3$，故 $c>\frac{5}{3}$，又

$3a=\ln 125<\ln 2.7^5<\ln e^5=5$，故 $a<\frac{5}{3}$，故 $c>a$.综上有 $c>a>b$

故选：D

2.（山东省枣庄市第三中学2021-2022学年高三质量检测数学试题）已知 $a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln 5}{5}$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A．$b<c<a$　　B．$c<a<b$

C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【分析】先把 a，b，c 的化成同底的对数值，再把真数化成同指数幂的形式进行大小比较即可.

【详解】$a=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}=\ln\sqrt[3]{3}$，$c=\frac{\ln 5}{5}=\ln\sqrt[5]{5}$

由 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3}$， $\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{25}<\sqrt[10]{32}=\sqrt{2}$， 可得 $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，

又 $y=\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上增函数，则 $\ln\sqrt[5]{5}<\ln\sqrt{2}<\ln\sqrt[3]{3}$，即 $c<a<b$

故选：B

3.若 $a=\log_2\sqrt{3}$， $b=2^{\log_4\frac{3}{4}}$， $c=2^{-\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　）.

A． $a>b>c$　　B． $b>a>c$

C． $c>a>b$　　D． $b>c>a$

【答案】B

【分析】利用对数运算的性质将 $b=2^{\log_4\frac{3}{4}}$ 化简为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而和 c 比较大小，同理比较 a,c 的大小关系，再根据两个指数幂的大小结合对数的运算性质可比较 a,b 大小，即可得答案.

【详解】由题意： $b=2^{\log_4\frac{3}{4}}=2^{\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $c=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 故 $b>c$.

又 $2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}<3$， 即 $2^{\sqrt{2}}<3$， 所以 $\log_4 2^{\sqrt{2}}<\log_4 3$， 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\log_4 3$，

因为 $a=\log_2\sqrt{3}=\log_4 3$， 所以 $c<a$.

因为 $2^8=256>243=3^5$， 故 $\log_2 3<\frac{8}{5}<\sqrt{3}$， 即 $2^{\sqrt{3}}>3$，

所以 $\log_4 2^{\sqrt{3}}>\log_4 3$， 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}>\log_4 3$，

所以 $b>a$， 所以 $b>a>c$， 故选：B.

4.设 $a=2^{\sqrt{5}}$， $b=\log_2 5$， $c=\sqrt{5}$， 则 a，b，c 的大小关系为______.（用“<”连接）

江苏省南京师范大学附属中学 2022-2023 学年高一上学期 12 月阶段性测试数学试题

【答案】 $c<b<a$

【分析】易知 $a>b$， b,c 的大小借助指数和对数的运算性质放缩可得，详见解析.

【详解】$\because a=2^{\sqrt{5}}>2^2=4=\log_2 16>\log_2 5=b$， $\therefore a>b$

$\because 5<\frac{81}{16},\therefore\sqrt{5}<\frac{9}{4},\therefore 2^{\sqrt{5}}<2^{\frac{9}{4}}$， 再比较 $2^{\frac{9}{4}}$ 与 5 的大小，同时四次方：

$2^9=512<625=5^4,\therefore 5>2^{\frac{9}{4}}$， 则 $b=\log_2 5>\log_2 2^{\frac{9}{4}}>\log_2 2^{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=c$ $\therefore b>c$.故答案为： $c<b<a$.

题型八：构造型 1：对数幂型

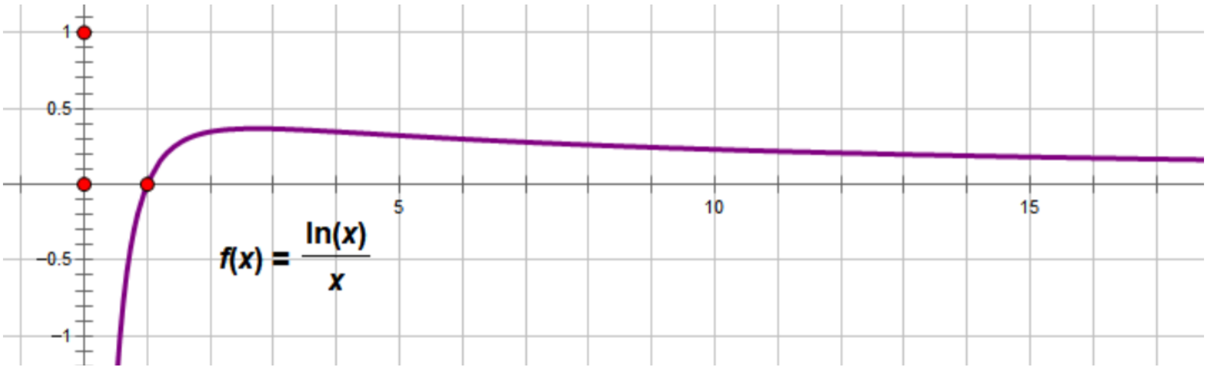
指 | 点 | 迷 | 津

常见的构造函数求导思维：在于转化过程中，“分参”→“构造”，得新函数，求导函数寻找单调性

对数幂常见的构造：

构造对数幂型：$\dfrac{\ln x}{x^n}$

比较常见的对数幂型函数图像 $\dfrac{\ln x}{x}$



1.（2023·江西景德镇·统考一模）设 $a=3^{\pi}$，$b=\pi^{e}$，$c=e^{\pi}$（e 为自然对数底数），则 a，b，c 大小关系为（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】B

【分析】由 $\ln a=\pi\ln 3$，$\ln b=e\ln\pi$，$\ln c=\pi$，且 $\ln a>\ln c$，构造 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 利用导数研究单调性比较 $\dfrac{\ln\pi}{\pi},\dfrac{\ln e}{e}$ 大小，即可得结果.

【详解】由题设 $\ln a=\pi\ln 3$，$\ln b=e\ln\pi$，$\ln c=\pi$，显然 $\ln a>\ln c$，

对于 $e\ln\pi$，π 的大小，只需比较 $\dfrac{\ln\pi}{\pi},\dfrac{\ln e}{e}$ 大小，

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 且 $x\ge e$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\le 0$，即 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上递减，

所以 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$，故 $\ln b=e\ln\pi<\ln c=\pi$，

综上，$\ln a>\ln c>\ln b$，故 $a>c>b$.

故选：B

2.（2023上·陕西安康·高三校联考阶段练习）已知 $a,b,c\in\left(e,+\infty\right),k>0,\dfrac{\ln a}{10}=ak\ln 8,\dfrac{\ln b}{9}=bk\ln 9,\dfrac{\ln c}{8}=ck\ln 10$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$c>b>a$

C．$b>c>a$　　D．$c>a>b$

【答案】B

【分析】由题设有$\frac{\ln a}{a}=10k\ln 8,\frac{\ln b}{b}=9k\ln 9,\frac{\ln c}{c}=8k\ln 10$，构造$g(x)=(18-x)\ln x$且$x\in[8,+\infty)$研究单调性比较$g(8),g(9),g(10)$大小，进而确定$\frac{\ln a}{a},\frac{\ln b}{b},\frac{\ln c}{c}$，再构造$f(x)=\frac{\ln x}{x}$且$x\in(\mathrm{e},+\infty)$研究单调性比较参数大小.

【详解】由$\frac{\ln a}{10}=ak\ln 8,\frac{\ln b}{9}=bk\ln 9,\frac{\ln c}{8}=ck\ln 10$，

得$\frac{\ln a}{a}=10k\ln 8,\frac{\ln b}{b}=9k\ln 9,\frac{\ln c}{c}=8k\ln 10$.

令$g(x)=(18-x)\ln x$且$x\in[8,+\infty)$，则$g'(x)=-\ln x+\frac{18}{x}-1$且在$[8,+\infty)$上单调递减，

而$g'(8)=-\ln 8+\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}-\ln 8<\frac{5}{4}-\ln \mathrm{e}^2=\frac{5}{4}-2<0$，

所以$g'(x)<0$在$[8,+\infty)$上恒成立，故$g(x)$在$[8,+\infty)$上单调递减，

所以$g(8)>g(9)>g(10)$，即$10\ln 8>9\ln 9>8\ln 10$，

所以$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln c}{c}$，

令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$且$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，

所以$f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，故$c>b>a$.

故选：B

【点睛】关键点点睛：由$\frac{\ln a}{a}=10\ln 8,\frac{\ln b}{b}=9\ln 9,\frac{\ln c}{c}=8\ln 10$，构造$g(x)=(18-x)\ln x$研究单调性比较等式右侧大小确定$\frac{\ln a}{a},\frac{\ln b}{b},\frac{\ln c}{c}$大小，构造$f(x)=\frac{\ln x}{x}$并利用单调性确定参数大小.

3.（2023·河南·校联考模拟预测）设$a=\frac{\ln 4}{4}$，$b=\frac{4-\ln 4}{\mathrm{e}^2}$，$c=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$c<a<b$

【答案】D

【分析】构建函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，求导判断其单调性，利用单调性比较大小，注意$a=f(4)=f(2)$.

【详解】由题意可得$a=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{4-\ln 4}{\mathrm{e}^2}=\frac{\ln\frac{\mathrm{e}^2}{2}}{\frac{\mathrm{e}^2}{2}}$，$c=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}}=\frac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，

设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

故当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；