关于杆件横截面上的应力

第一节 基本概念

应力

应变

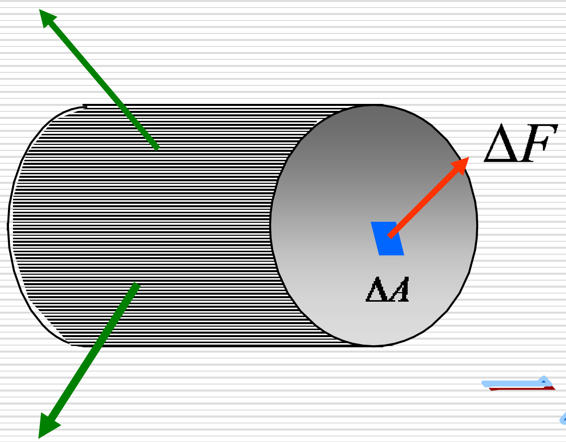
胡克定律

第二节 轴向拉压杆的应力

横截面上的应力

斜截面上的应力

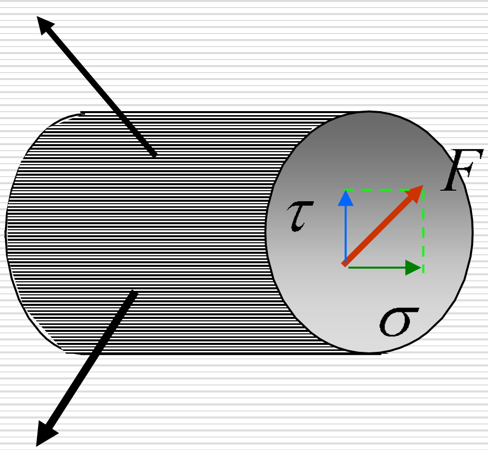
应力：杆件截面上的分布内力集度



$$p=\frac{\Delta F}{\Delta A}$$ 平均应力

一点处的总应力

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$



$p\begin{cases}\text{正应力}\boldsymbol{\sigma}\\ \text{切应力}\boldsymbol{\tau}\end{cases}$

应力特征 ：

（1）必须明确截面及点的位置；

（2）是矢量，1)正应力：拉为正，

2) 切应力顺时针为正；

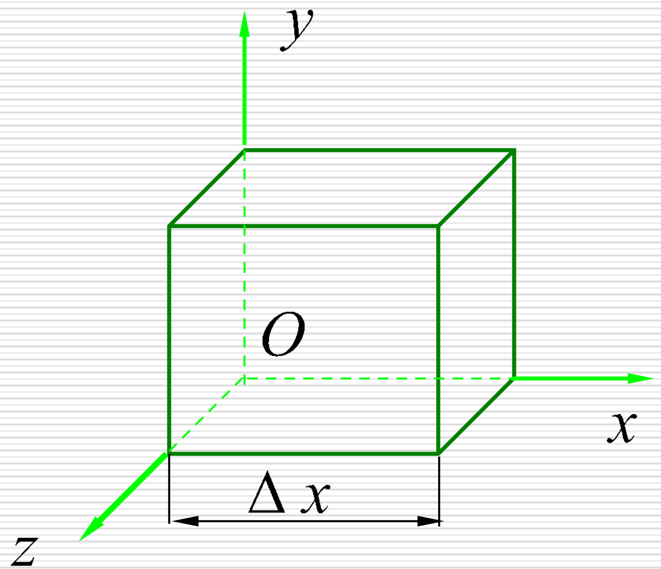
（3）单位：Pa(帕)和MPa(兆帕)

1MPa=10^6Pa

应变

杆原长为l，直径为d。受一对轴向拉力F的作用，发生变形。变形后杆长为l_1，直径为d_1。

轴向(纵向)应变：$\varepsilon = \dfrac{l_1 - l}{l} = \dfrac{\Delta l}{l}$ 其中：拉应变为正，压应变为负。



横向应变：$\varepsilon' = \dfrac{d_1 - d}{d} = \dfrac{\Delta d}{d}$

研究一点的线应变：

取单元体积为$\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$

该点沿x轴方向的线应变为：

x方向原长为Δx，变形后其长度改变量为$\Delta\delta_x$

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta_x}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}\delta_x}{\mathrm{d}x}$$

胡克定律

实验表明，在比例极限内，杆的轴向变形Δl与外力F及杆长l成正比，与横截面积A成反比。即：

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

引入比例常数E，有：$\Delta l = \dfrac{Fl}{EA} = \dfrac{F_N l}{EA}$ ----胡克定律

其中：E----弹性模量，单位为Pa;

EA----杆的抗拉（压）刚度。

G------切变模量

胡克定律的另一形式：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

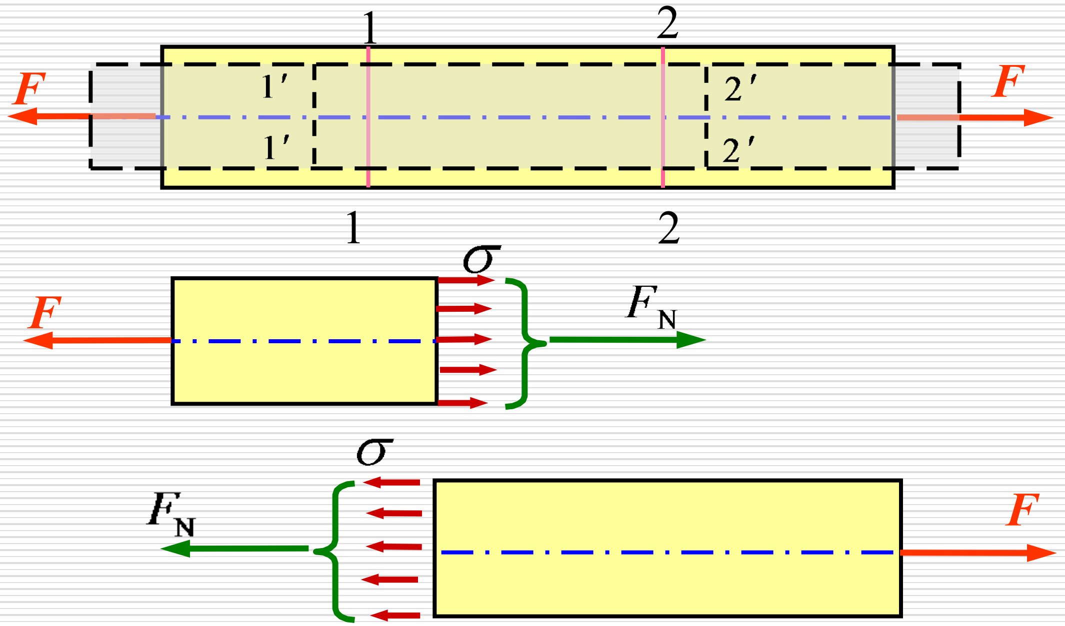
$$\tau = G\gamma$$

实验表明，横向应变与纵向应变之比为一常数ν----称为横向变形系数（泊松比）

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|} = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E}$$

拉压杆横截面上的应力



假设：
① 平面假设
② 横截面上各点处仅存在正应力并沿截面均匀分布。

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{F_N}{A}$$

F_N:横截面上的轴力

A：横截面的面积

拉应力为正，
压应力为负。

对于等直杆

当有多段轴力时，最大轴力所对应的截面-----危险截面。

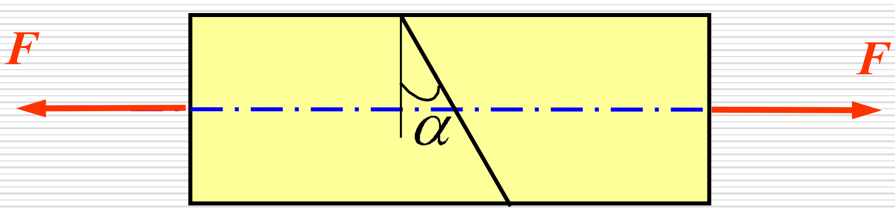
$$\sigma_{max}=\frac{F_{N,max}}{A}$$

危险截面上的正应力----最大工作应力

拉压杆斜截面上的应力

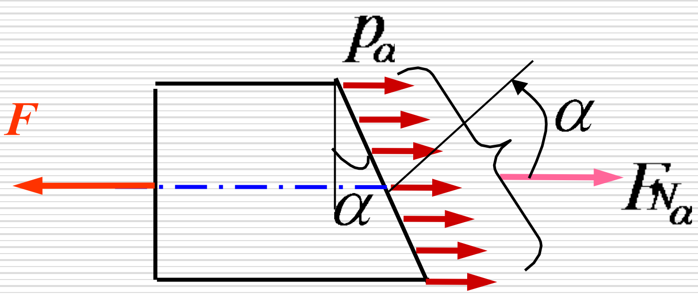
横截面----是指垂直杆轴线方向的截面；

斜截面----是指任意方位的截面。



①全应力：

$$p_\alpha = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma_0\cos\alpha$$

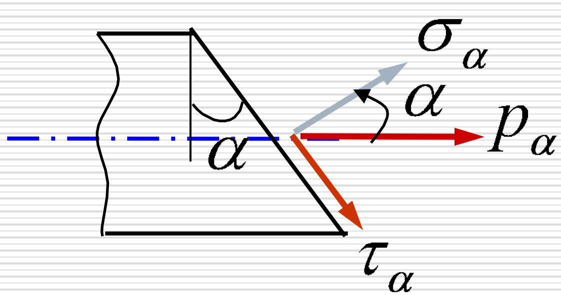


②正应力：

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha$$

③切应力：

$$\tau_\alpha = p_\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha$$

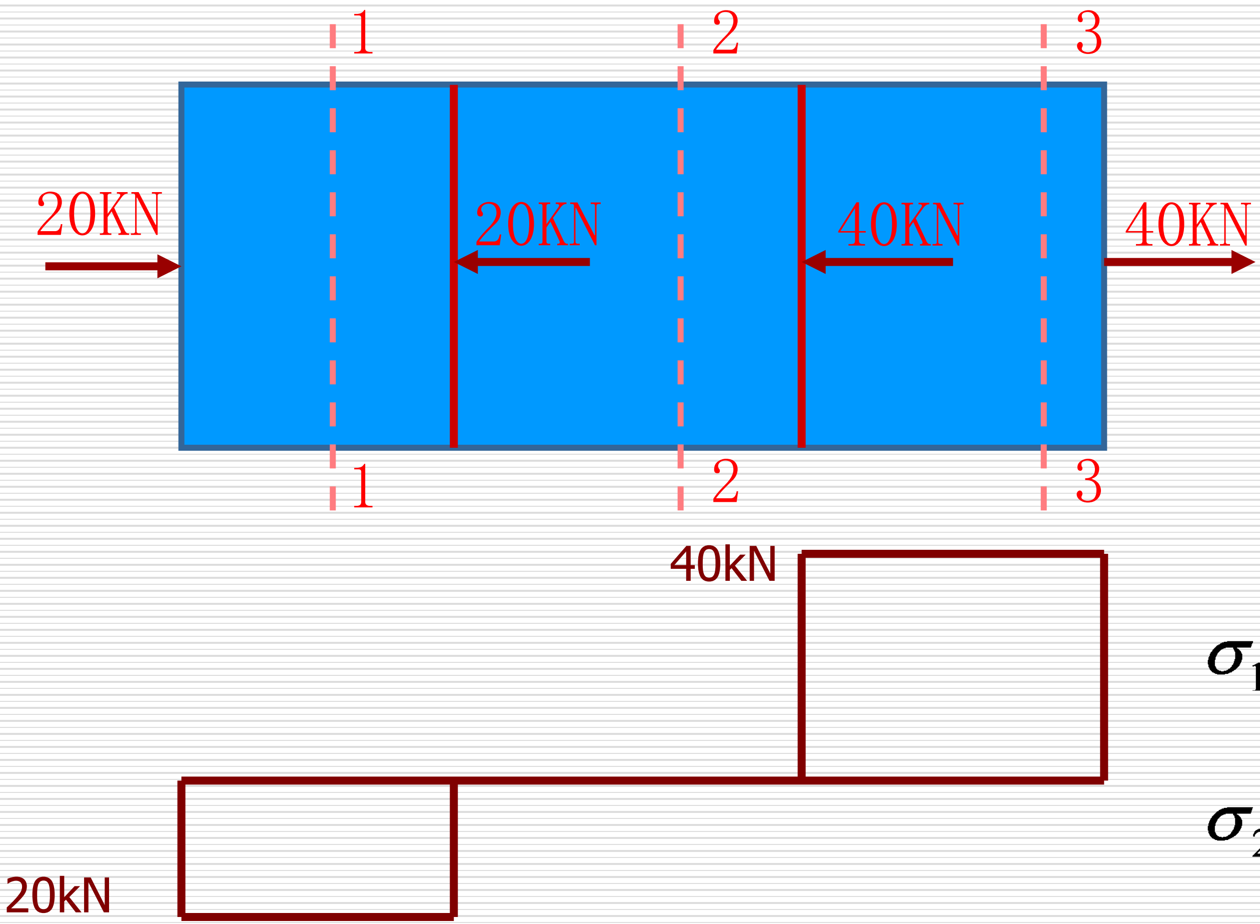


1）$\alpha=0^0$时， $\sigma_{max}=\sigma$

2）$\alpha=45^0$时， $\tau_{max}=\sigma/2$

例题

试计算图示杆件1-1、2-2、和3-3截面上正应力. 已知横截面面积$A=2\times10^3 mm^2$



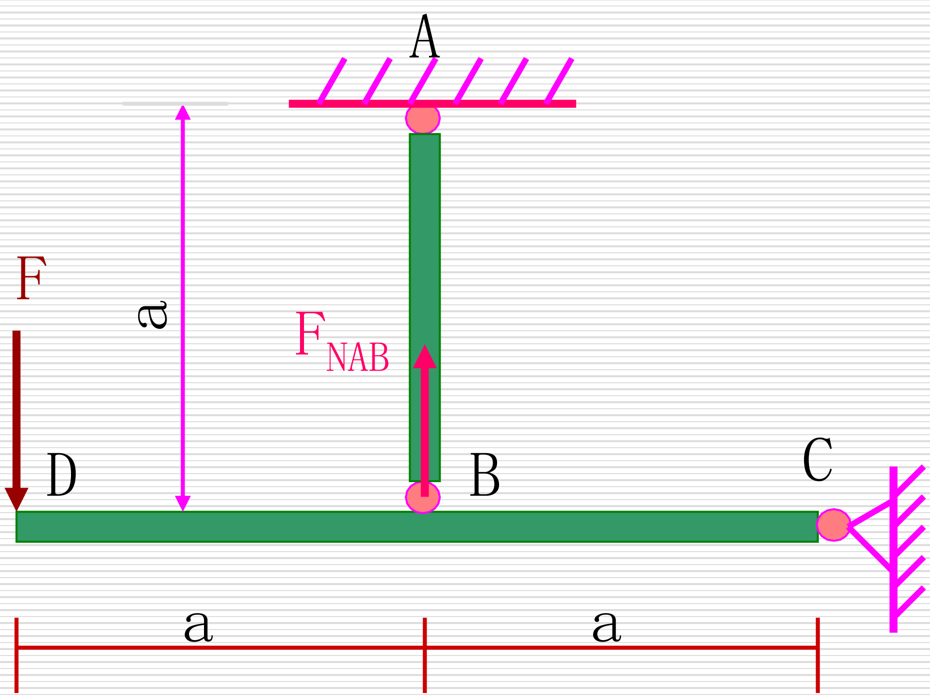
$$\sigma_{1-1}=-10MPa$$

$$\sigma_{2-2}=0$$

$$\sigma_{3-3}=20MPa$$

例题

试求图示结构AB杆横截面上的正应力。已知F=30KN，A=400m



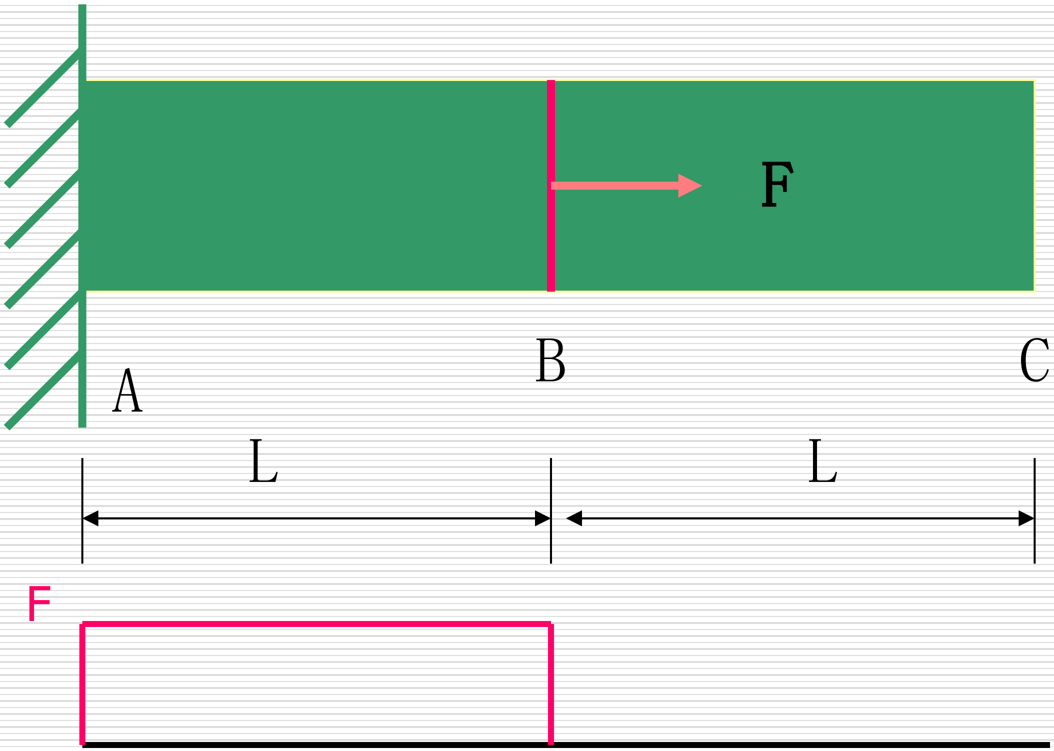
$$F\times 2a - F_{N\,AB}\times a = 0$$

$$F_{NAB} = 2F$$

$$\sigma = \frac{F_{NAB}}{A} = 150MPa$$

例题

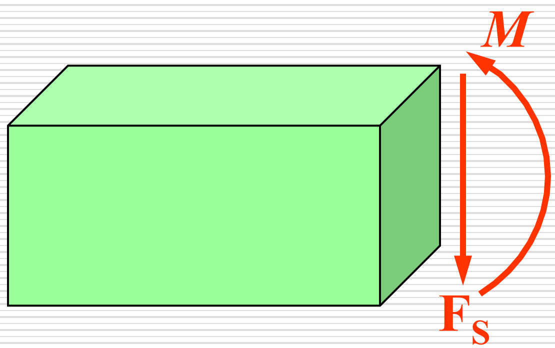
图示直杆，其抗拉刚度为EA，试求杆件的轴向变形△L，B点的位移δ$_B$和C点的位移δ$_C$

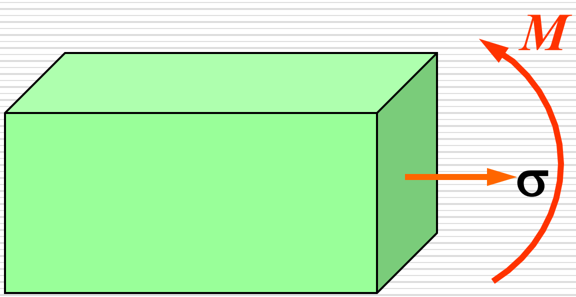


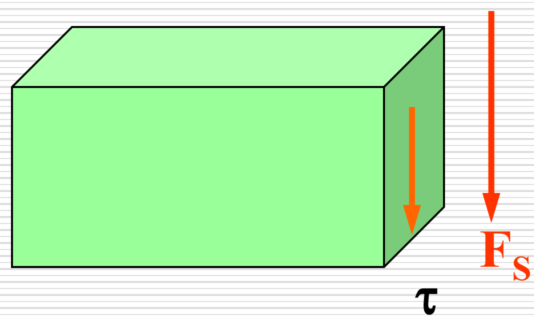
$$\delta_B = \Delta L_{AB} = \frac{FL}{EA}$$

$$\delta_C = \delta_B = \frac{FL}{EA}$$

第四节纯弯曲时梁横截面上的正应力



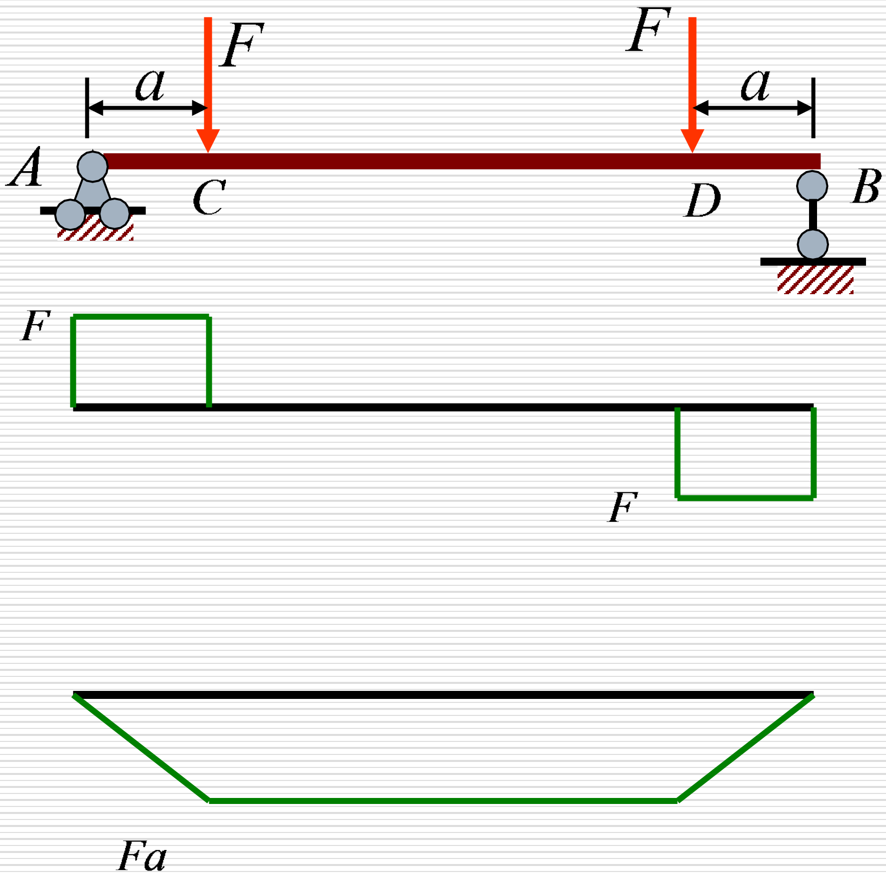




$M \Leftrightarrow \sigma$　　　　　　　　$F_S \Leftrightarrow \tau$

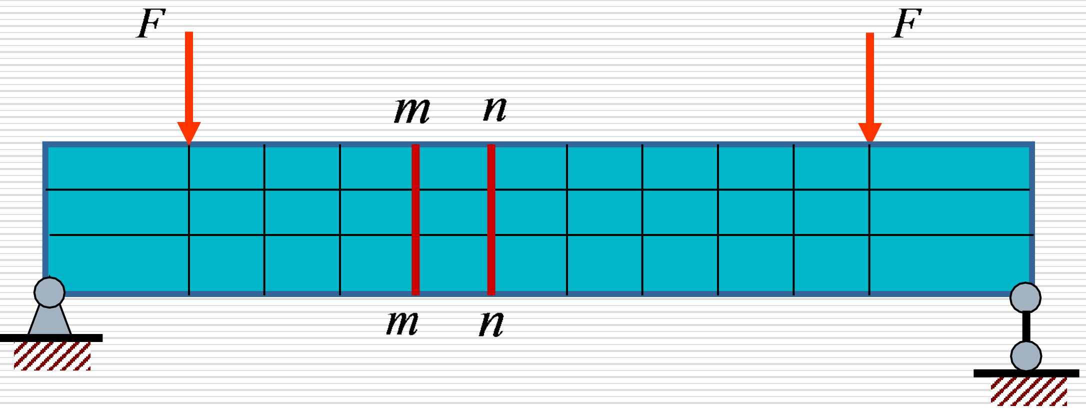
梁弯曲时横截面上的正应力与切应力，分别称为*弯曲正应力*与*弯曲切应力*。

纯弯曲时梁横截面上的正应力



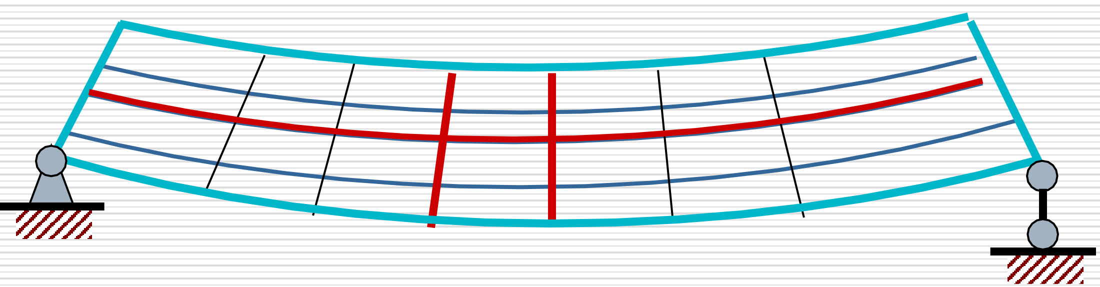
纯弯曲：梁受力弯曲后，如其横截面上只有弯矩而无剪力，这种弯曲称为纯弯曲。

实验现象：



✓1、变形前互相平行的纵向直线、变形后变成弧线，且凹边纤维缩短、凸边纤维伸长。

✓2、变形前垂直于纵向线的横向线,变形后仍为直线，且仍与弯曲了的纵向线正交，但两条横向线间相对转动了一个角度。

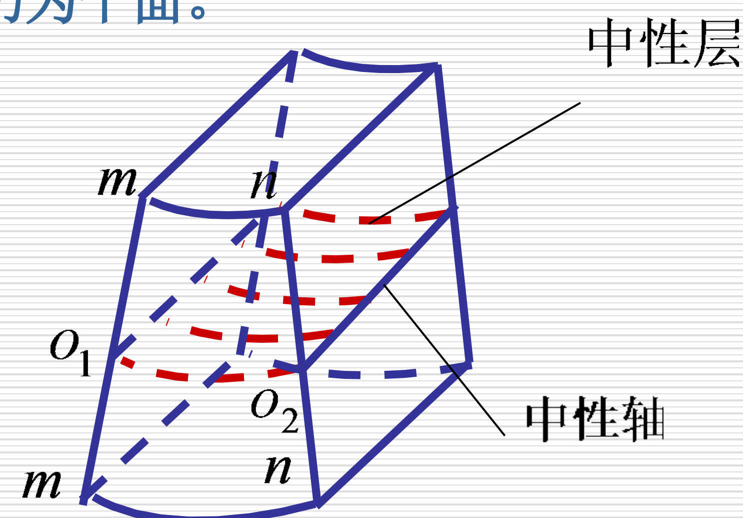


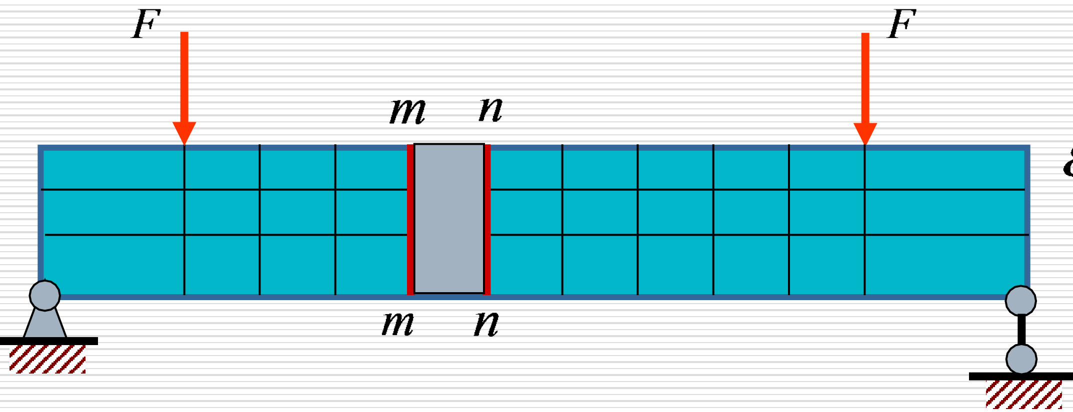
- 平面假设：

　　变形前杆件的横截面变形后仍为平面。

- 中性轴：

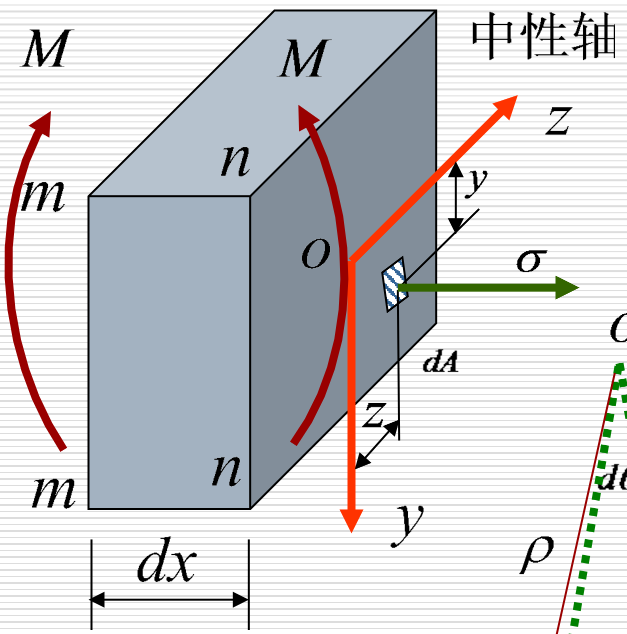
　　中性层与横截面的交线称为中性轴。

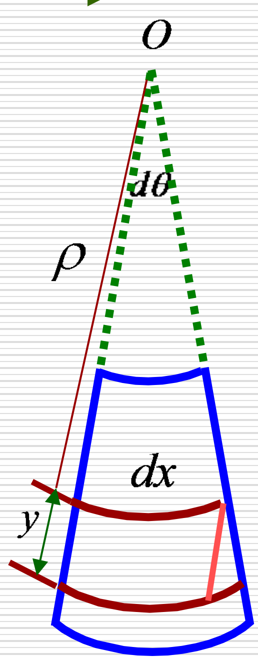




$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E$$





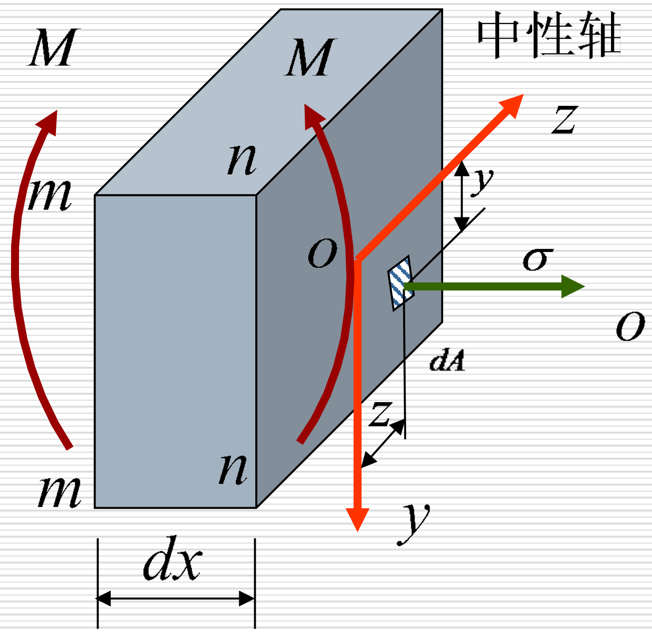
$$F_N = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A y dA = 0$$

$$M_y = \int_A z\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A zy dA = 0$$

$$M_z = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho}\underline{\int_A y^2 dA} = \frac{EI_Z}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_Z}{EI_Z}$$

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$$

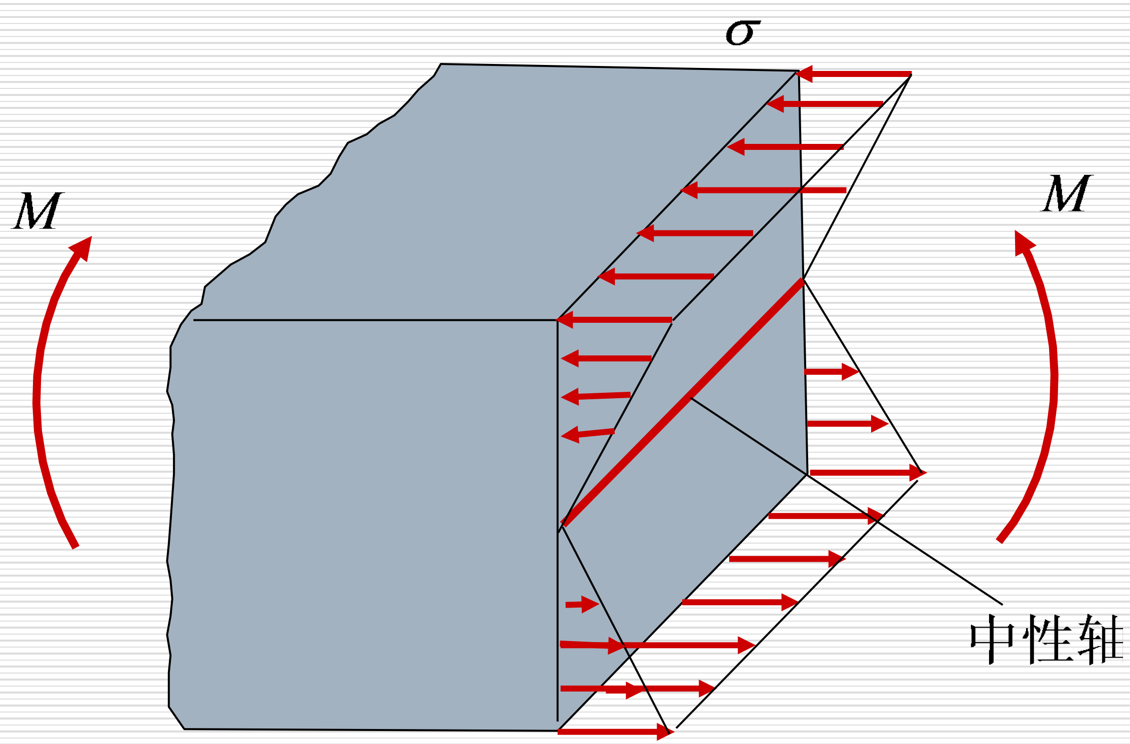


M_Z:横截面上的弯矩

y:到中性轴的距离

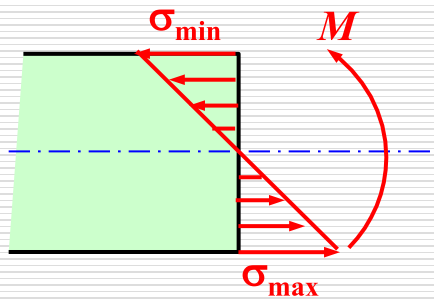
I_Z:截面对中性轴的惯性矩

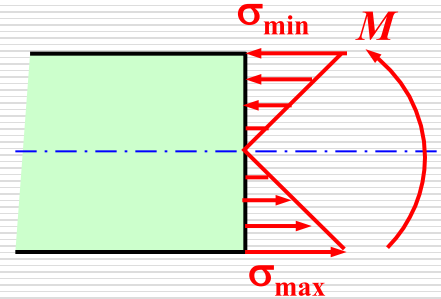
$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W_z}$$

横截面上正应力的画法：





公式适用范围：

①线弹性范围—正应力小于比例极限σ_p；

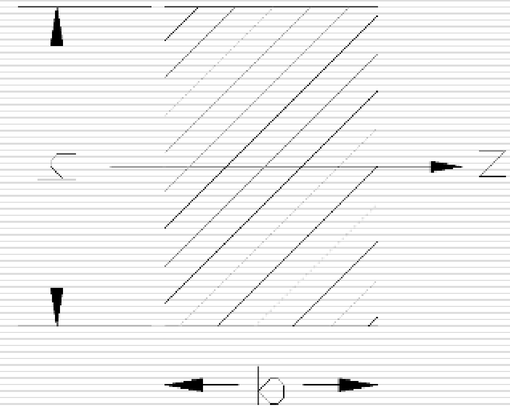
②精确适用于纯弯曲梁；

③对于横力弯曲的细长梁(跨度与截面高度比L/h>5)，上述公式的误差不大，但公式中的M应为所研究截面上的弯矩，即为截面位置的函数。

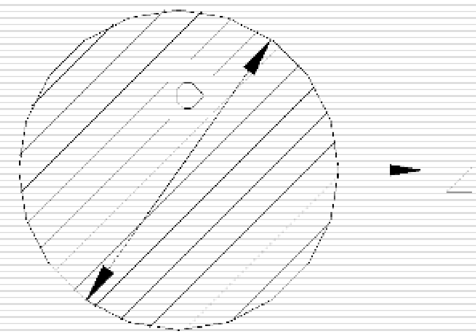
$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z} \quad , \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

三种典型截面对中性轴的惯性矩

$$I_Z = \frac{bh^3}{12}\quad , \quad W_Z = \frac{bh^2}{6}$$



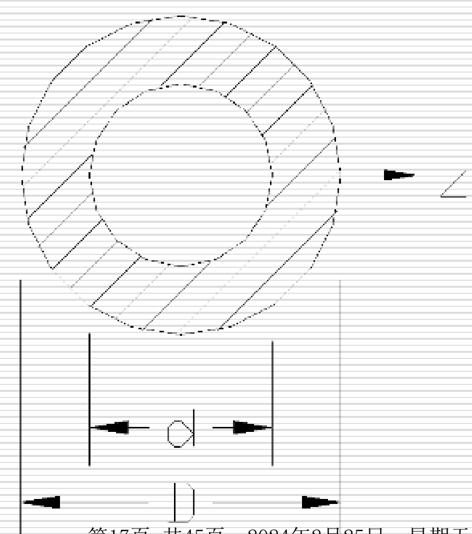
$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}\quad , \quad W_Z = \frac{\pi d^3}{32}$$



$$I_Z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

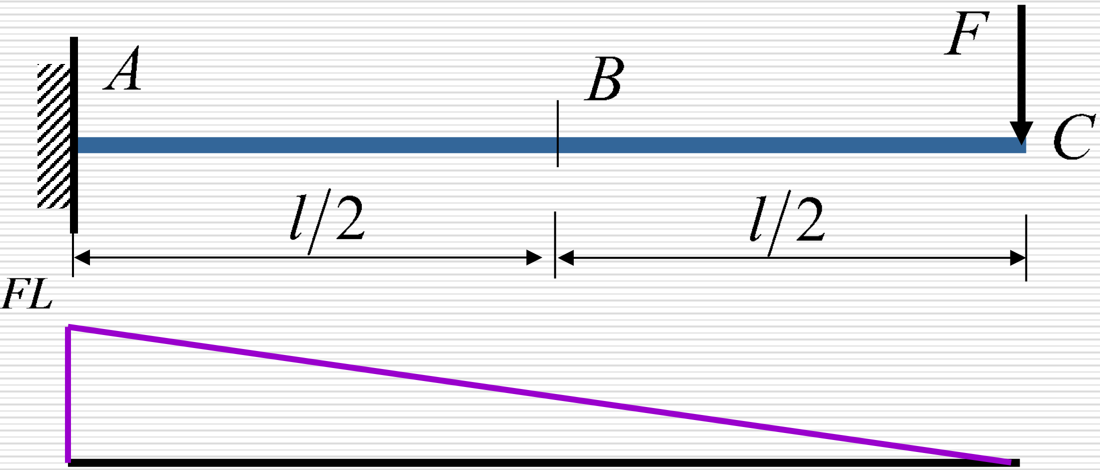
$$W_Z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

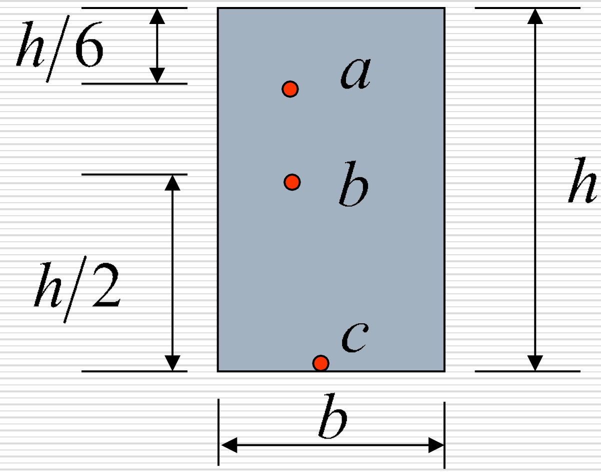
CL8TU6



例题

长为l的矩形截面悬臂梁，在自由端作用一集中力F，已知b＝120mm，h＝180mm、l＝2m，F＝1.6kN，试求B截面上a、b、c各点的正应力。





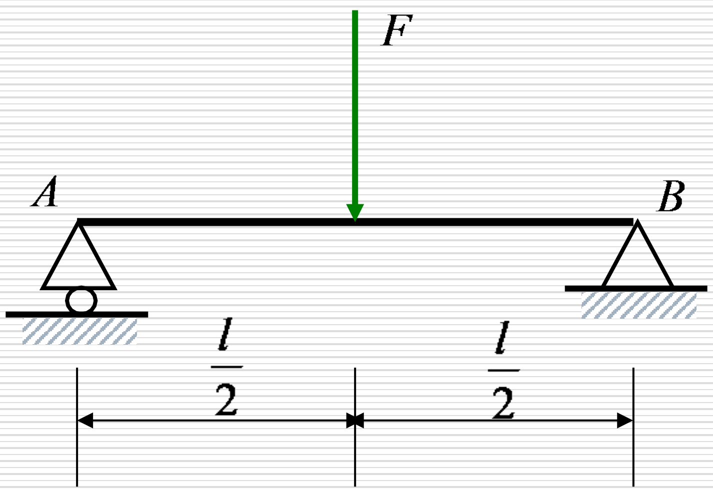
$$M_B = \frac{1}{2}FL \qquad I_Z = \frac{bh^3}{12}$$

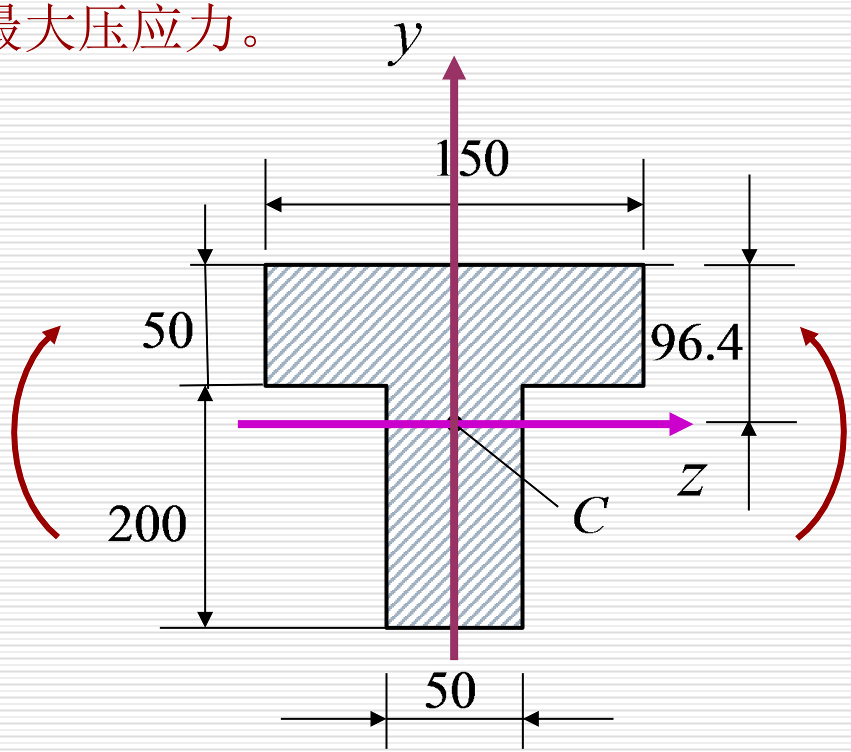
$$\sigma_a = \frac{M_B y_a}{I_Z} = \frac{\frac{1}{2}FL\frac{h}{3}}{\frac{bh^3}{12}} = 1.65MPa$$

$$\sigma_b = 0 \qquad \sigma_c = \frac{M_B y_c}{I_Z} = \frac{\frac{1}{2}FL\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = 2.47MPa$$ （压）

例题

图示T形截面简支梁在中点承受集中力F＝32kN，梁的长度L＝2m。T形截面的形心坐标y_c＝96.4mm，横截面对于z轴的惯性矩I_z＝1.02×10^8mm^4。求弯矩最大截面上的最大拉应力和最大压应力。





$$M_{\max}=\frac{FL}{4}=16kNm$$

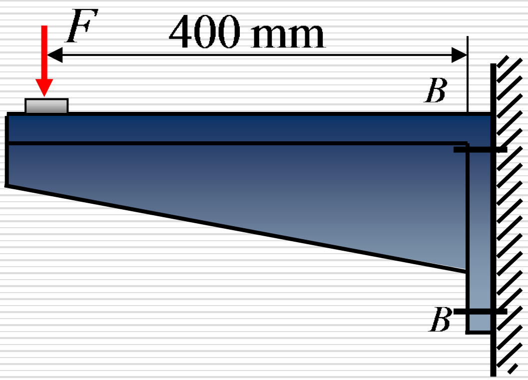
$$y^{+}_{\max}=200+50-96.4=153.6mm$$

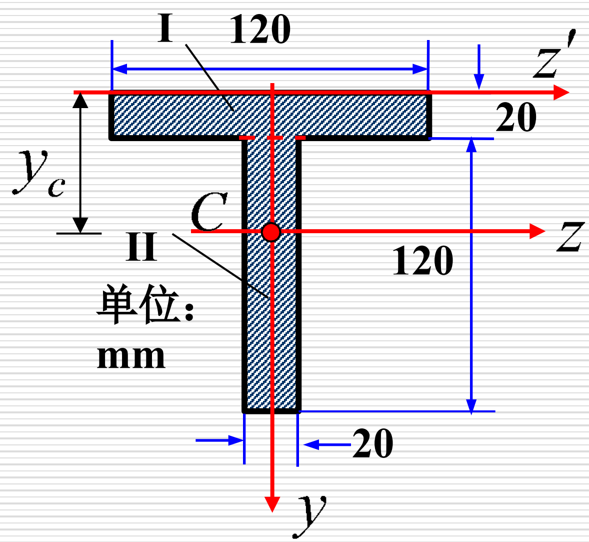
$$y^{-}_{\max}=96.4mm$$

$$\sigma^{+}_{\max}=\frac{My^{+}_{\max}}{I_z}=24.09MPa$$

$$\sigma^{-}_{\max}=\frac{My^{-}_{\max}}{I_z}=15.12MPa$$

例题 图所示悬臂梁，自由端承受集中载荷F=15kN作用。试计算截面B--B的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。





解： 1．确定截面形心位置

选参考坐标系$z'oy$如图示，将截面分解为I和II两部分，形心C的纵坐标为:

$$y_c=\frac{(0.12\times0.02)\times0.01+(0.02\times0.12)(0.02+0.06)}{(0.12\times0.02)+(0.02\times0.12)}=0.045\text{m}$$

2．计算截面惯性矩

$$I_{1z}=\frac{0.12\times(0.02)^3}{12}+(0.12\times0.02)(0.045-0.01)^2=3.02\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$I_{2z}=\frac{0.02\times(0.12)^3}{12}+(0.02\times0.12)(0.08-0.045)^2=5.82\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$I_z=3.02\times10^{-6}+5.08\times10^{-6}=8.84\times10^{-6}\text{m}^4$$

3 计算最大弯曲正应力

截面B—B的弯矩为:

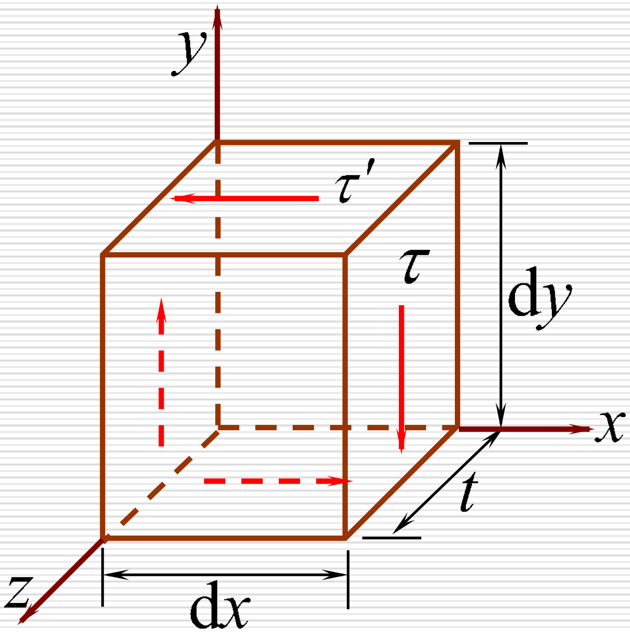
$$M_B = F \times 0.4 = 6000\mathrm{N \cdot m}$$

在截面B的上、下边缘，分别作用有最大拉应力和最大压应力，其值分别为：

$$\sigma_{l,\max} = \frac{6000 \times 0.045}{8.84 \times 10^{-6}} = 3.05 \times 10^{7}\,\mathrm{Pa} = 30.5\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{6000 \times (0.12 + 0.02 - 0.045)}{8.84 \times 10^{-6}} = 6.45 \times 10^{7}\,\mathrm{Pa} = 64.5\mathrm{MPa}$$

切应力互等定理



$$(\tau \cdot t \cdot \mathrm{d}y) \cdot \mathrm{d}x = (\tau' \cdot t \cdot \mathrm{d}x) \cdot \mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \quad \tau = \tau'$$

切应力互等定理：

在相互垂直的两个平面上，切应力必然成对存在，且数值相等，两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。