

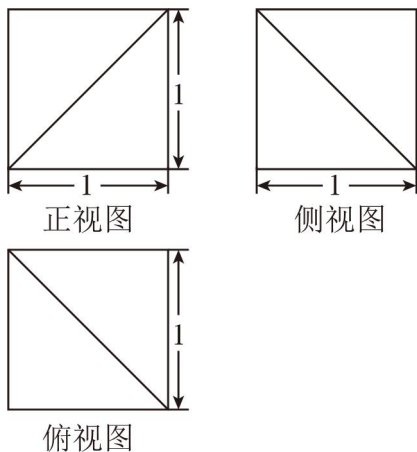
2023 年湖北省襄阳四中、五中特长生自主招生数学试卷

一.单项选择题（本题共 10 小题，每题 5 分，共 50 分）.

1. (5 分) 当 $x=8$ 时, $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{3}}-\sqrt{x+4\sqrt{3}}}{\sqrt{x-2}}$ 的值为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

2. (5 分) 若某多面体的三视图如图所示, 则此多面体的表面积是 ()



- A. 6 B. $\frac{9+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $4+\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. (5 分) 从编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个红球和 5 个黑球中随机取出 2 个, 则取出球的编号互不相同的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{8}{9}$

4. (5 分) 荆州方特东方神画主题乐园, 于 2019 年 9 月 12 日在荆州盛大开园. 该景点位于荆州纪南文旅区, 为湖北地区规模最大、档次最高的历史文化主题乐园. 游客要从景点 C 走到 D , 经测量 $\angle CAB=90^\circ$, $AC=\sqrt{3}$, $BD=2CD$, 且 $AD=20\sqrt{3}$ 米 () 米.



- A. $30\sqrt{3}$ B. $10\sqrt{6}$ C. $20\sqrt{2}$ D. 30

5. (5 分) $x^2 - 6x + 8 = \pm k$ 只有两个实根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k=0$ B. $k>1$ C. $0 \leq k < 1$ D. $k>1$ 或 $k=0$

6. (5 分) 在 \mathbf{R} 上定义运算: $a \oplus b = (a+1)b$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 存在 x 使不等式 $2 \oplus mx < 4$ 成立 ()

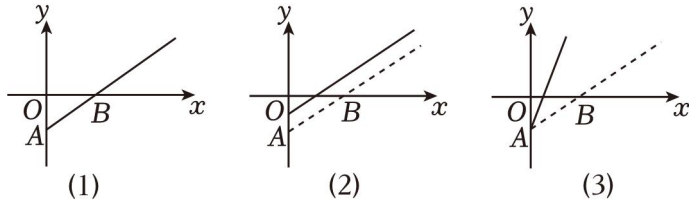
- A. $0 < m < \frac{4}{3}$ B. $m < \frac{2}{3}$ C. $m \leq 0$ D. $m < \frac{4}{3}$

7. (5分) 某部影片的盈利额(即影片的票房收入与固定成本之差)记为 y , 观影人数记为 x (1) 所示. 由于目前该片盈利未达到预期, 相关人员提出了两种调整方案, 图 (2) (3) 中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图象.

给出下列四种说法:

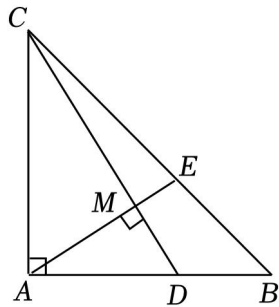
- ①图 (2) 对应的方案是: 提高票价, 并提高成本;
 ②图 (2) 对应的方案是: 保持票价不变, 并降低成本;
 ③图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并保持成本不变;
 ④图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并降低成本.

其中, 正确的说法是 ()



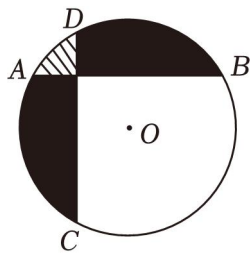
- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

8. (5分) 如图, 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, A 为直角顶点, E 分别在线段 AB 和 BC 上, 且满足 $AD=2BD$, 则 $CE:EB=$ ()



- A. 5: 4 B. 5: 3 C. 3: 2 D. 2: 1

9. (5分) 圆 O 半径为 5, 弦 $AB \perp CD$, 且 $AB=CD=5\sqrt{3}$, 阴影部分记为 II, 设 I、II 的面积分别记为 S_1, S_2 , 则 S_1+S_2 为 ()



A. $\frac{25\pi}{12} + \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{175\pi}{12} - \frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{25}{4}$

C. $\frac{135\pi}{12} + \frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{25}{4}$

D. $\frac{25\pi}{6} + \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

10. (5分) 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著, 以其名命名的函数 $y =$

$\begin{cases} 1, & (x \text{ 为有理数}) \\ 0, & (x \text{ 为无理数}) \end{cases}$ 被称为狄利克雷函数 (以下命题中的 A 、 B 、 C 三点均在此函数上):

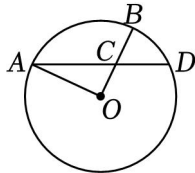
- ① 存在三个点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形;
- ② 存在三个点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形.
- ③ 已知 $M(1, 3)$, $N(2, 2)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 且为有理数, 边无理数, 则四边形 $MABN$ 周长的最小值是 $\sqrt{26} + \sqrt{2}$.

其中正确说法的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二. 填空题 (本题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分).

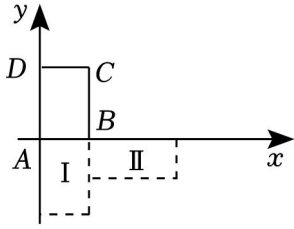
11. (5分) 如图, 在半径为 10 的圆 O 中, $\angle AOB = 90^\circ$, AC 的延长线交圆 O 于点 D , 则线段 CD 的长为 _____.



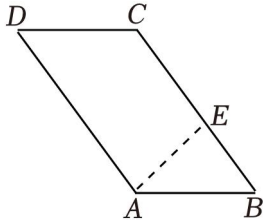
12. (5分) 如果方程 $x^3 - 4x^2 + (3+k)x - k = 0$ 的三个根可以作为一个等腰三角形的边长, 则实数 $k =$ _____.

13. (5分) 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} \frac{y-2}{x-1} = k \\ 3x+y-5+k^2 = 0 \end{cases}$ 无解, 则实数 $k =$ _____.

14. (5分) 如图, 已知矩形 $ABCD$ 顶点 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(1, 2)$ 、 $D(0, 2)$, 我们规定“把矩形 $ABCD$ 先关于 x 轴翻转, 再向 x 轴正方向滚动一次 (无滑动), 例如: 第一次变换是从初始位置先翻转至 I 处, 再向 x 轴正方向滚动至 II 处. 如此这样, 此时的 A 点坐标为 _____.



15. (5分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3$, 点 E 在线段 BC 上运动, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折使点 B 落在 B' 处, 则 $\sin \angle ADB' =$ _____.



16. (5分) 设 $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2014^2} + \frac{1}{2015^2}}$ 则不大于 S 的最大整数 $[S]$ 等于 _____.

三.解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分).

17. (10分) 一次函数 $y = -x + 3$ 与 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的第一象限的图象交于 A, B 两点.

- (1) 求 k 的取值范围;
- (2) 若 $k=2$, 求此时 $\triangle OAB$ 的面积.

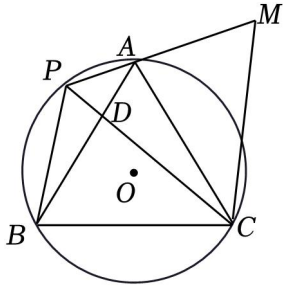
18 . (10 分) (1) 求 值 :

$$(\sqrt{5})^0 + 3^{-1} \times \sqrt[3]{-27} - (2\cos 30^\circ + 2)^{2023} \cdot (4\sin 30^\circ - \sqrt{3})^{2024} - \tan 60^\circ ;$$

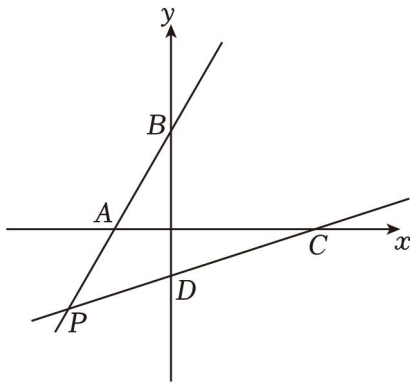
(2) 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 求 $\frac{x^3 - 7x - 4}{x^5}$ 的值.

19. (12分) 如图, 等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, P 是 \widehat{AB} (点 P 不与点 A, B 重合), 连接 AP, BP, CP , CP 与 AB 交于点 D

- (1) 求证: $\triangle ACM \cong \triangle BCP$;
- (2) 若 $PA=1$, 且 $AD:DB=1:2$. 求 $\odot O$ 的半径.



20. (12分) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y=k_1x+2$ 与 x 、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 直线 $y=k_2x-1$ 与 x 、 y 轴分别交于 C 、 D 两点, 点 $P(-6, -4)$ 是这两条直线的交点.
- (1) 求 k_1 和 k_2 的值;
 - (2) 若 Q 是直线 AB 一动点 (不与 P 重合), 若 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PDQ$ 相似时, 求点 Q 的坐标.



21. (12分) 如图所示, 在平面直角坐标系中, 如图 1, 点 A 在 x 轴的负半轴, 点 C 在 y 轴的正半轴上

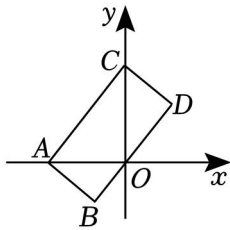


图1

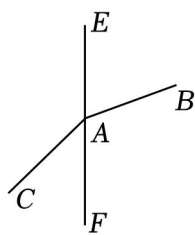
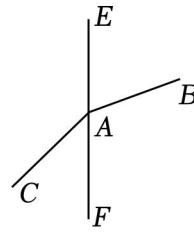


图2



备用图

- (1) 若 $A(-3, 0)$ 、 $B(-2, -1)$ 、 $C(0, 2)$, 直接写出点 D 的坐标;
 - (2) 如图 2, 在直线 EF 上有点 A , 分别引两条射线 AB 、 AC . $\angle BAF=110^\circ$, 射线 AB 、 AC 分别绕 A 点以 1 度/秒和 3 度/秒的速度同时顺时针转动, 设时间为 t , 是否存在某时刻, 使得 AC 与 AB 在同一条直线上? 若存在
 - (3) 在 (2) 的条件下, 是否存在某时刻
22. (14分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(-6, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 两点 $(0, c)$.
- (1) 若此函数当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 函数值 y 的最大值是 1, 求 a ;

(2) 已知 $C(0, 8)$ 连接 AC 、 BC ，若点 E 是线段 AB 上的一个动点（与点 A 、点 B 不重合），连接 CE ，设 AE 的长为 m ，求 S 与 m 之间的函数关系式，并写出自变量 m 的取值范围；

(3) 已知 $c > 0$ ，若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，平面内存在点 D 使得 $OADB$ 四点共圆且 D 点关于 x 轴的对称点恰好为 $\triangle OAB$ 的内心

2023 年湖北省襄阳四中、五中特长生自主招生数学试卷

参考答案与试题解析

一.单项选择题（本题共 10 小题，每题 5 分，共 50 分）.

1. (5 分) 当 $x=8$ 时, $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{3}} - \sqrt{x+4\sqrt{3}}}{\sqrt{x-2}}$ 的值为 ()

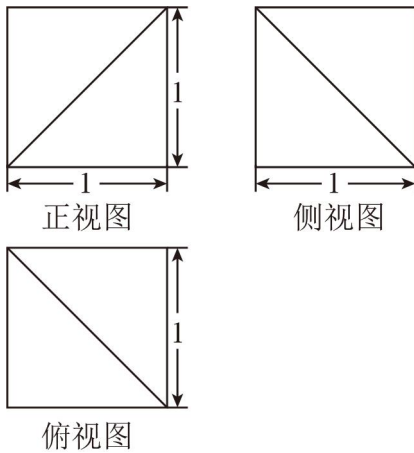
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

【解答】解: 把 $x=8$ 代入 $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{3}} - \sqrt{x+4\sqrt{3}}}{\sqrt{x-2}}$ 得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2} - (\sqrt{6}+\sqrt{8})}{\sqrt{6}} \\ &= -\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{6}} \\ &= -\frac{2\sqrt{4}}{3}. \end{aligned}$$

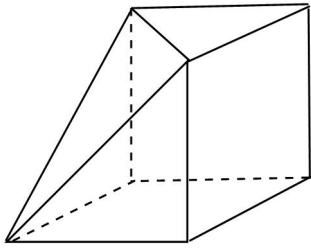
故选: B.

2. (5 分) 若某多面体的三视图如图所示, 则此多面体的表面积是 ()



- A. 6 B. $\frac{9+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $4+\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解: 由三视图可得原多面体如图:



此多面体的表面是由 3 个边长为 1 的正方形, 3 个腰为 1 的等腰直角三角形和 1 个边长为 $\sqrt{7}$,

$$\text{此多面体的表面积} = 3 \times 1^2 + 3 \times \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{5}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{8}\sqrt{2})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{2},$$

故选: B.

3. (5 分) 从编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个红球和 5 个黑球中随机取出 2 个, 则取出球的编号互不相同的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{8}{9}$

【解答】解: 列表如下:

	红 1	红 2	红 4	红 4	红 5	黑 8	黑 2	黑 3	黑 8	黑 5
红 1		(红 8, 红 2)	(红 1, 红 4)	(红 1, 红 4)	(红 2, 红 5)	(红 1, 黑 4)	(红 1, 黑 2)	(红 4, 黑 3)	(红 1, 黑 5)	(红 1, 黑 5)
红 3	(红 2, 红 1)		(红 6, 红 3)	(红 2, 红 4)	(红 2, 红 5)	(红 3, 黑 1)	(红 2, 黑 4)	(红 2, 黑 3)	(红 4, 黑 4)	(红 2, 黑 3)
红 3	(红 3, 红 3)	(红 3, 红 2)		(红 4, 红 4)	(红 3, 红 2)	(红 3, 黑 1)	(红 6, 黑 2)	(红 3, 黑 5)	(红 3, 黑 4)	(红 6, 黑 5)
红 4	(红 7, 红 1)	(红 4, 红 3)	(红 4, 红 3)		(红 3, 红 5)	(红 4, 黑 2)	(红 4, 黑 2)	(红 4, 黑 3)	(红 5, 黑 4)	(红 4, 黑 5)
红 8	(红 5, 红 1)	(红 7, 红 2)	(红 5, 红 6)	(红 5, 红 4)		(红 7, 黑 1)	(红 5, 黑 8)	(红 5, 黑 3)	(红 8, 黑 4)	(红 5, 黑 3)
黑 1	(黑 1, 红 7)	(黑 1, 红 2)	(黑 6, 红 3)	(黑 1, 红 4)	(黑 1, 红 5)		(黑 5, 黑 2)	(黑 1, 黑 6)	(黑 1, 黑 4)	(黑 4, 黑 5)
黑 2	(黑 5, 红 1)	(黑 2, 红 4)	(黑 2, 红 3)	(黑 7, 红 4)	(黑 2, 红 5)	(黑 2, 黑 1)		(黑 3, 黑 3)	(黑 2, 黑 3)	(黑 2, 黑 5)

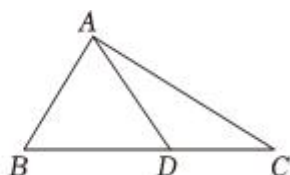
黑 6	(黑 3, 红 1)	(黑 6, 红 2)	(黑 3, 红 4)	(黑 3, 红 4)	(黑 4, 红 5)	(黑 3, 黑 5)	(黑 3, 黑 2)		(黑 4, 黑 4)	(黑 3, 黑 6)
黑 4	(黑 4, 红 2)	(黑 4, 红 2)	(黑 6, 红 3)	(黑 4, 红 3)	(黑 4, 红 5)	(黑 7, 黑 1)	(黑 4, 黑 6)	(黑 4, 黑 3)		(黑 3, 黑 5)
黑 5	(黑 6, 红 1)	(黑 5, 红 2)	(黑 5, 红 3)	(黑 5, 红 4)	(黑 5, 红 7)	(黑 5, 黑 1)	(黑 6, 黑 2)	(黑 5, 黑 7)	(黑 5, 黑 4)	

共有 90 种等可能的结果，其中取出球的编号互不相同的结果有 80 种等可能的结果，

∴取出球的编号互不相同的概率为 $\frac{80}{90} = \frac{5}{9}$.

故选：D.

4. (5 分) 荆州方特东方神画主题乐园，于 2019 年 9 月 12 日在荆州盛大开园。该景点位于荆州纪南文旅区，为湖北地区规模最大、档次最高的历史文化主题乐园。游客要从景点 C 走到 D，经测量 $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = \sqrt{3}$ ， $BD = 2CD$ ，且 $AD = 20\sqrt{3}$ 米 () 米。



- A. $30\sqrt{3}$ B. $10\sqrt{6}$ C. $20\sqrt{2}$ D. 30

【解答】解：∵ $AC = \sqrt{3}CD$ ，设 $CD = x$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore BC = 3x,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}x}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CD}{AC},$$

而 $\angle C$ 公共，

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ = \angle ADC,$$

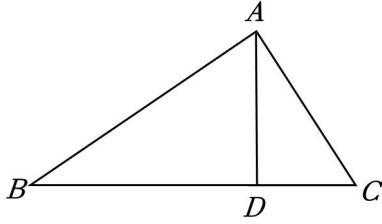
而 $AC = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x$ 米，

$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2,$$

$$\therefore 3CD^2 = 400 \times 3 + CD^2,$$

$$\therefore CD = 10\sqrt{3}.$$

故选：B.



5. (5分) $x^2 - 6x + 8 = \pm k$ 只有两个实根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k=0$ B. $k>1$ C. $0 \leq k < 1$ D. $k>1$ 或 $k=0$

【解答】解: 若 $x^2 - 6x + 8 = \pm k$ 只有两个实根, 则 $x^2 - 6x + 7 - k = 0$ 有两个实根, $x^2 - 2x + 8 + k = 0$ 无实根,

$$\therefore (-8)^2 - 4(4-k) > 0, \quad (-6)^2 - 4(8+k) < 0,$$

解得 $k > 1$,

$$\because x^2 - 7x + 8 = 0 \text{ 时, } \Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 8 > 0,$$

$$\therefore x^2 - 6x + 8 = 3 \text{ 只有两个实根,}$$

故 k 的取值范围是 $k > 1$ 或 $k = 0$,

故选: D.

方法二:

$$\because \text{函数 } y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = x^2 - 6x + 8 \text{ 开口向上, 顶点为 } (3, -1),$$

$$\therefore \text{若抛物线 } y = x^2 - 6x + 8 \text{ 与直线 } y = -k \text{ 无交点, 则 } k > 1,$$

$$\because y = x^2 - 2x + 8 = (x - 4)(x - 5),$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = x^2 - 6x + 8 \text{ 与 } x \text{ 轴有两个交点为 } (4, 0) \text{ 和 } (8, 0),$$

故 $x^2 - 6x + 8 = \pm k$ 只有两个实根, 则 k 的取值范围是 $k > 1$ 或 $k = 0$,

故选: D.

6. (5分) 在 \mathbf{R} 上定义运算: $a \oplus b = (a+1)b$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 存在 x 使不等式 $2 \oplus mx < 4$ 成立 ()

- A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ B. $m \leq \frac{2}{3}$ C. $m \leq 0$ D. $m < \frac{4}{3}$

【解答】解: $\because 2 \oplus mx < 4,$

$$\therefore 7mx < 4,$$

\because 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 存在 x 使不等式 $2 \oplus mx < 4$ 成立,

$$\therefore m < \frac{4}{3x},$$

$$\therefore m < \frac{4}{2},$$

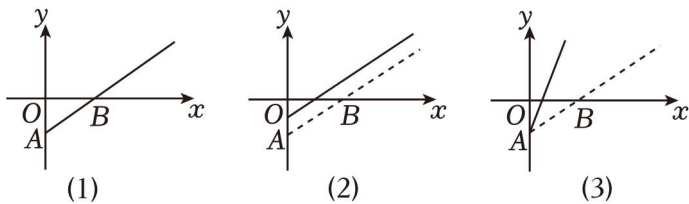
故选：D.

7. (5分) 某部影片的盈利额(即影片的票房收入与固定成本之差)记为 y , 观影人数记为 x (1) 所示. 由于目前该片盈利未达到预期, 相关人员提出了两种调整方案, 图(2)(3) 中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图象.

给出下列四种说法:

- ①图(2)对应的方案是: 提高票价, 并提高成本;
- ②图(2)对应的方案是: 保持票价不变, 并降低成本;
- ③图(3)对应的方案是: 提高票价, 并保持成本不变;
- ④图(3)对应的方案是: 提高票价, 并降低成本.

其中, 正确的说法是 ()



- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

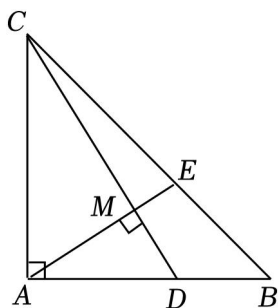
【解答】解: 由图可知, 点 A 的纵坐标的相反数表示成本.

图(2)对应的方案是: 保持票价不变, 并降低成本, ②正确;

图(3)对应的方案是: 提高票价, 并保持成本不变, ④错误.

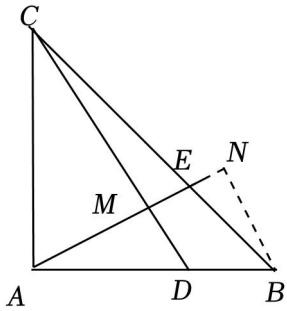
故选: C.

8. (5分) 如图, 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, A 为直角顶点, E 分别在线段 AB 和 BC 上, 且满足 $AD=2BD$, 则 $CE:EB=$ ()



- A. 5: 4 B. 5: 3 C. 3: 2 D. 2: 1

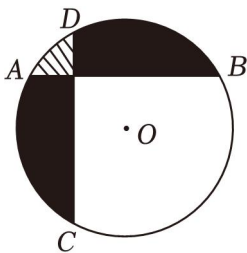
【解答】解: 过 B 作 $BN \perp AE$ 于 N ,



\because 等腰直角 $\triangle ABC$, $AE \perp CD$,
 $\therefore AC = AB$, $\angle ACD = \angle BAE = 90^\circ - \angle EAC$,
 $\therefore \triangle ACM \sim \triangle DCA$,
 $\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{AC}{AD}$,
 $\because AD = 2BD$,
 $\therefore AC = AB = 3BD$,
 $\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{AC}{AD} = \frac{4}{2}$,
 $\because BN \perp AE$,
 $\therefore \angle CAD = \angle N = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle ACM \cong \triangle BAN$,
 $\therefore AM = BN$,
 $\therefore \frac{CM}{BN} = \frac{3}{4}$,
 $\because AE \perp CD$, $BN \perp AE$,
 $\therefore \angle CME = \angle N = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle CEM \sim \triangle BEN$,
 $\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BN} = \frac{3}{2}$

故选: C.

9. (5分) 圆 O 半径为 5, 弦 $AB \perp CD$, 且 $AB = CD = 5\sqrt{3}$, 阴影部分记为 II, 设 I、II 的面积分别记为 S_1, S_2 , 则 $S_1 + S_2$ 为 ()



$$A. \frac{25\pi}{12} + \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$B. \frac{175\pi}{12} - \frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{25}{4}$$

$$C. \frac{135\pi}{12} + \frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{25}{4}$$

$$D. \frac{25\pi}{6} + \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

【解答】解：作 $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，垂足为点 F 、 OC ，

由垂径定理可得： $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $CF = \frac{2}{2}CD = \frac{5\sqrt{8}}{2}$ ，

$\because AB = CD$ ， $AB \perp CD$ ，

$\therefore OF = OE$ ，

在 $Rt\triangle OBE$ 和 $Rt\triangle OCF$ 中，由勾股定理得：

$$OE = OF = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$\therefore \angle BOE = \angle COF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 360^\circ - 2 \times 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ ，

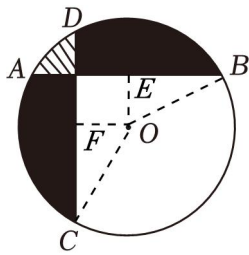
$$\therefore S_{\text{扇形}BOC} = \frac{150 \times \pi \times 25}{360} = \frac{375\pi}{36}$$

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{8} \times \frac{5\sqrt{3}}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{6}}{8}$$

$$S_{\text{空白}} = S_{\text{正方形}} + 2S_{\triangle BOE} + S_{\text{扇形}BOC} = \frac{2}{2} \times \frac{5}{2} + 2 \times \frac{25\sqrt{3}}{8} + \frac{375\pi}{36} = \frac{25}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{8} + \frac{125\pi}{12}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 25\pi - \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{125\pi}{12} = \frac{175\pi}{12} - \frac{25}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

故选：B.



10. (5分) 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著，以其名命名的函数 $y =$

$\begin{cases} 1, & (x \text{ 为有理数}) \\ 0, & (x \text{ 为无理数}) \end{cases}$ 被称为狄利克雷函数 (以下命题中的 A 、 B 、 C 三点均在此函数上)：

- ① 存在三个点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ 使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形；
- ② 存在三个点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形。
- ③ 已知 $M(1, 3)$ ， $N(2, 2)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 且为有理数，边无理数，则四边形 $MABN$ 周长的最小值是 $\sqrt{26} + \sqrt{2}$ 。

其中正确说法的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【解答】解：①当 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 不共线，

即 A 、 B 、 C 三点中有两点在直线 $y=0$ 上，

或者一点在直线 $y=0$ 上，两点在直线 $y=7$ 上，

不妨设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y=0$ 上， $C(x_3, y_3)$ 在直线 $y=1$ 上，

则 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 1)$ ，且 x_1, x_2 为无理数， x_3 为有理数，

若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 C 必为直角顶点，

$$\text{即 } x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, |x_1 - x_2| = 7,$$

当 x_1, x_2 为无理数时， x_3 也为无理数，故①错误；

②同理，不妨设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y=0$ 上， $C(x_3, y_3)$ 在直线 $y=1$ 上，

则 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 1)$ ，且 x_1, x_2 为无理数， x_3 为有理数，

$$\text{若 } \triangle ABC \text{ 为等边三角形，则 } x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, |x_1 - x_2| = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

可令 $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_3 = 0$ ，故②正确；

③由题意可知，点 $A(x_1, y_1)$ 在 x 轴上运动，点 $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y=5$ 上运动，

作点 $N(2, 2)$ 关于 x 轴的对称点 $N'(2, -2)$ ，

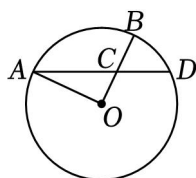
则 $C_{\text{四边形 } MABN} = MB + BA + AN + MN = MB + BA + AN' + MN \geq MN' + MN = \sqrt{26} + \sqrt{2}$ ，故③正确；

综上，正确的个数为 2 个，

故选：C.

二. 填空题（本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分）.

11. (5 分) 如图，在半径为 10 的圆 O 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， AC 的延长线交圆 O 于点 D ，则线段 CD 的长为 $3\sqrt{5}$.



【解答】解：过点 O 作 $OH \perp AD$ 于 H ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/495333042344011141>