江西省赣州市大余县部分学校2024-2025学年高二上学期12月联考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知数列{an}是等差数列，其前 n 项和为 Sn，若 $a_1a_2a_3$＝15，且 $\frac{3}{S_1S_3}+\frac{15}{S_3S_5}+\frac{5}{S_5S_1}=\frac{3}{5}$，则 a_2＝（　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$

C．3　　D．$\frac{1}{3}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+3, x\le 0\\ 2x-3, 0<x<3\\ x-2, x\ge 3\end{cases}$，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4, a_{n+1}=f\left(a_n\right)\left(n\in N^*\right)$，则 $a_{2021}=$（　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．-1

3．意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1，1，2，3，5，8，13，…该数列的特点是：前两个数都是1，从第三个数起，每一个数都等于它前面两个数的和，人们把这样的一列数所组成的数列称为“斐波那契数列”，若

a_n“ 是“斐波那契数列”，则 $\left(a_1a_3-a_2^2\right)\left(a_2a_4-a_3^2\right)\left(a_3a_5-a_4^2\right)\cdots\left(a_{2020}a_{2022}-a_{2021}^2\right)$ 的值为（　）.

A．-1　　B．1　　C．-2　　D．2

4．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$，设$b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)2^{n-1}}$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和.若$S_n<t$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则实数$t$的最小值为（　）

A．1　　B．2　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

5．数列$\{a_n\}$满足$a_1=10$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，则（　）

A．$a_6\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$a_6\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C．$a_6\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$a_6\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$

6．定义：如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上存在$x_1,x_2\,(a<x_1<x_2<b)$，满足$f'(x_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数$y=f(x)$是在区间$[a,b]$上的一个双中值函数，已知函数$f(x)=x^3-\dfrac{6}{5}x^2$是区间$[0,t]$上的双中值函数，则实数$t$的取值范围是

A．$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　　B．$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　　C．$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right)$　　D．$\left(1,\dfrac{6}{5}\right)$

7．已知曲线$y=e^{x+a}$与$y=(x-1)^2$恰好存在两条公切线，则实数a的取值范围为（　）

A．$(-\infty,2\ln 2+3)$　　B．$(-\infty,2\ln 2-3)$

C．（0，1）　　D．$(1,+\infty)$

8．设直线$x=t\,(0\le t\le 2)$与函数$y=x^3$的图象交于点A，与直线$y=3x-4$交于点B．则$|AB|$的取值范围是（　）

A．$(2,6)$　　B．$[2,4]$　　C．$[4,6]$　　D．$[1,4]$

二、多选题

9．设$\{a_n\}$是各项为正数的等比数列，q是其公比，T_n是其前n项的积，且$T_6<T_7$，$T_7=T_8>T_9$，则下列结论正确的是（　　）

A．$q>1$　　B．$a_8=1$　　C．$T_{10}>T_6$　　D．T_7与T_8均为T_n的最大值

10．已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若对于任意的m，$n\in N^*$，都有$a_{m+n}=a_m+a_n$，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_1+a_{12}=a_8+a_5$

B．$a_5a_6<a_1a_{10}$

C．若该数列的前三项依次为x，$1-x$，$3x$，则$a_{10}=\frac{10}{3}$

D．数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为递减的等差数列

11．对于函数$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$在$x=\sqrt{e}$处取得极大值$\frac{1}{2e}$

B．$f(x)$有两个不同的零点

C．$f(\sqrt{2})\pi 3<f(\sqrt{\ })<f(\sqrt{\ })$

D．若 $f\left(x\right)<k-\frac{1}{x^2}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，则 $k>\frac{e}{2}$

12．已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 首项 $a_1>1$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，函数

$f\left(x\right)=x\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_7\right)$，若 $f'\left(0\right)=1$，则下列结论正确的是（　）

A．$\left\{\lg a_n\right\}$ 为单调递增的等差数列

B．$0<q<1$

C．$\left\{S_n-\frac{a_1}{1-q}\right\}$ 为单调递增的等比数列

D．使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 6

三、填空题

13．设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{2n}=a_n-1,a_{2n+1}=n-a_n$，则 $S_{100}=$______.

14．朱载堉（1536-1611）是中国明代一位杰出的音乐家、数学家和天文历算家，他的著作《律学新说》中制作了最早的“十二平均律”．十二平均律是目前世界上通用的把一组音（八度）分成十二个半音音程的律制，各相邻两律之间的频率之比完全相等，亦称“十二等程律”，即一个八度 13 个音，相邻两个音之间的频率之比相等，且最后一个音是最初那个音的频率的 2 倍．设第三个音的频率为 f_1，第七个音的频率为 f_2，则 $\frac{f_2}{f_1}=$___.

15．已知 $\sin\alpha$ 是 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的等差中项，$\sin\beta$ 是 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的等比中项，则 $\frac{\cos2\alpha}{\cos2\beta}=$_

.

16．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-2x^2+cx$ 在 R 数上单调递增，且 $ac\leq4$，则 $|\sin x|+\left|\frac{ac}{\sin x}\right|$ 的最小

值为_____，$\frac{a}{c^2+4}+\frac{c}{a^2+4}$的最小值为_____.

四、解答题

17．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，从条件①$na_{n+1}=(n+1)a_n$，②$S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，③$a_n^2+a_n=2S_n$中任选一个，补充到下面问题中，并给出解答．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，________.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=-2^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n和T_n.

18．已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}\frac{(3a_n^2+4)b_{n+1}}{a_na_{n+2}} & n\text{为奇数}\\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}} & n\text{为偶数}\end{cases}$ $(n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

19．已知函数$f(x)=a\cdot e^x-\frac{1}{2}x^2-x$($a\in R$).

（1）若函数$f(x)$有两个极值点，求a的取值范围；

（2）证明：当$x>1$时，$e^x\cdot\ln x>x-\frac{1}{x}$.

20．已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$a_2+a_3=12, b_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n}=2, b_{n+1}-b_n=a_n, n\in N_+$

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求证：$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{11}{6}, n\in N_+$.

21．设函数$f(x)=\ln x-a^2x+2a\,(a\in R)$

（1）若函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上递减，求实数$a$的值.

（2）讨论$f(x)$在$(1,+\infty)$上的单调性；

（3）若方程$x-\ln x-m=0$有两个不等实数根x_1,x_2，求实数m的取值范围，并证明$x_1x_2<1$.

22．已知函数$f(x)=ax-e^x+2$，其中$a\neq 0$.

（1）讨论$f(x)$的单调性.

（2）是否存在$a\in R$，对任意$x_1\in[0,1]$，总存在$x_2\in[0,1]$，使得$f(x_1)+f(x_2)=4$成立？若存在，求出实数a的值；若不存在，请说明理由.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	C	C	A	B	A	BD	AC
题号	11	12								
答案	ACD	BCD								

1．C

【分析】结合数列的前 n 项和公式以及中项性质将已知条件化简整理即可直接求出结果.

【详解】$\because S_1=a_1,S_3=\frac{3\left(a_1+a_3\right)}{2}=\frac{3\times 2a_2}{2}=3a_2,S_5=\frac{5\left(a_1+a_5\right)}{2}=\frac{5\times 2a_3}{2}=5a_3,$

$\because \frac{3}{S_1S_3}+\frac{15}{S_3S_5}+\frac{5}{S_5S_1}=\frac{3}{5}$，即 $\frac{3}{3a_1a_2}+\frac{15}{15a_2a_3}+\frac{5}{5a_3a_1}=\frac{3}{5}$，则 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}=\frac{3}{5}$

$\because a_1a_2a_3=15$，

$\therefore \frac{3}{5}=\frac{a_3}{15}+\frac{a_1}{15}+\frac{a_2}{15}=\frac{a_1+a_2+a_3}{15}=\frac{3a_2}{15}=\frac{a_2}{5}$，

$\therefore a_2=3$.

故选：C.

2．C

【分析】根据题意，分别求得 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,\cdots$，得出数列 $\{a_n\}$ 的周期为4，根据数列的周期性，得到 $a_{2021}=a_{505\times4+1}=a_1$，即可求解.

【详解】由题意，函数 $f(x)=\begin{cases}-x+3,x\le 0\\ 2x-3,0<x<3\\ x-2,x\ge 3\end{cases}$，且数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4,a_{n+1}=f\left(a_n\right)(n\in N^*)$，

所以 $a_2=f\left(a_1\right)=f(4)=4-2=2$，$a_3=f\left(a_2\right)=f(2)=2\times2-3=1$，

$a_4=f\left(a_3\right)=f(1)=2\times1-3=-1$，$a_5=f\left(a_4\right)=f(-1)=-(-1)+3=4$，

$a_6=f\left(a_5\right)=f(4)=4-2=2$，$\cdots\cdots$，

所以数列$\{a_n\}$的周期为4，所以$a_{2021}=a_{505\times4+1}=a_1=4\cdot$

故选：C.

3．B

【解析】由已知数列的特点依次求出$a_1a_3-a_2^2$，$a_2a_4-a_3^2$，$a_3a_5-a_4^2$，$\cdots$的值，发现这些数

依次为$1,-1,1,-1,1,-1\cdots$，进而可求出答案

【详解】由题设可知，斐波那契数列$\{a_n\}$为：$1,1,2,3,5,8,\cdots\cdots$

其特点为：前两个数为1，从第三个数起，每一个数都等于它前面两个数的和，由此可知：

$a_1a_3-a_2^2=1\times2-1^2=1$，

$a_2a_4-a_3^2=1\times3-2^2=-1$，

$a_3a_5-a_4^2=2\times5-3^2=1$，

$a_4a_6-a_5^2=3\times8-5^2=-1$，

$a_{2020}a_{2022}-a_{2021}^2=-1$，

则$\left(a_1a_3-a_2^2\right)\left(a_2a_4-a_3^2\right)\cdots\cdots\left(a_{2020}a_{2022}-a_{2021}^2\right)$

$=1^{1010}\times\left(-1\right)^{1010}=1$.

故选：B.

4．C

【解析】先求出$\{a_n\}$的通项，再利用裂项相消法可求S_n，结合不等式的性质可求实数t的

最小值.

【详解】$n=1$时，$a_1=2$，

因为$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$，

所以$n\geq 2$时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-1}$，

两式相减得到$na_n=2^{n-1}$，故$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}$, $n=1$时不适合此式，

所以$b_n=\dfrac{a_n}{(n+1)2^{n-1}}=\begin{cases}1, n=1\\ \dfrac{1}{n(n+1)}, n\geq 2\end{cases}$，

当$n=1$时，$S_1=b_1=1$，

当$n\geq 2$时，$S_n=1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{3}{2}$，

所以$t\geq\dfrac{3}{2}$；所以t的最小值$\dfrac{3}{2}$；

故选：C.

【点睛】方法点睛：数列求和关键看通项的结构形式，如果通项是等差数列与等比数列的和，则用分组求和法；如果通项是等差数列与等比数列的乘积，则用错位相减法；如果通项可以拆成一个数列连续两项的差，那么用裂项相消法；如果通项的符号有规律的出现，则用并项求和法.

5．C

【分析】首先设$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$，根据题意得到$b_{n+1}=b_n^{\ 2}$，从而得到$b_6=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{32}$，即可得到

$a_6=1+\dfrac{2}{\left(\dfrac{11}{9}\right)^{32}-1}$，即可得到答案.

【详解】由题知：设$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$，

则$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-1}=\dfrac{{a_n}^2+2a_n+1}{{a_n}^2-2a_n+1}=\left(\dfrac{a_n+1}{a_n-1}\right)^2$，

所以$b_{n+1}={b_n}^2$．

又因为$b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-1}=\dfrac{11}{9}$，

所以$b_2=\left(\dfrac{11}{9}\right)^2$，$b_3=\left(\dfrac{11}{9}\right)^4$，$b_4=\left(\dfrac{11}{9}\right)^8$，$b_5=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{16}$，$b_6=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{32}$，

即$\dfrac{a_6+1}{a_6-1}=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{32}$，解得$a_6=\dfrac{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}+1}{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}-1}=1+\dfrac{2}{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}-1}$．

因为$\dfrac{2}{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}-1}>0$，所以$a_6>1$，

又因为$\dfrac{2}{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}-1}<\dfrac{2}{4}$，所以$1+\dfrac{2}{\left(\frac{11}{9}\right)^{32}-1}<\dfrac{3}{2}$，即$a_6\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

故选：C

6．A

【详解】$\because f\left(x\right)=x^3-\dfrac{6}{5}x^2,\therefore f'\left(x\right)=3x^2-\dfrac{12}{5}x$，

$\because$函数$f\left(x\right)=x^3-\dfrac{6}{5}x^2$是区间$\left[0,t\right]$上的双中值函数，

$\therefore$区间$\left[0,t\right]$上存在x_1，x_2（$0<x_1<x_2<t$），

满足 $f'(x_1)=f'(x_2)\quad \frac{f(t)-f(0)}{t}\quad t^2-\frac{6}{5}t$

∴方程 $3x^2-\frac{12}{5}x=t^2-\frac{6}{5}t$ 在区间 $[0,t]$ 有两个不相等的解，

令∵ $g(x)=3x^2-\frac{12}{5}x-t^2+\frac{6}{5}t\quad 0<x\le t$ ，

则 $\begin{cases}\Delta=\left(-\frac{12}{5}\right)^2-12(-t^2+\frac{6}{5}t)>0\\0<\frac{2}{5}<t\\g(0)=-t^2+\frac{6}{5}t>0\\g(t)=2t^2-\frac{6}{5}t>0\end{cases}$ ，

解得 $\frac{3}{5}<t<\frac{6}{5}$，

∴实数 t 的取值范围是 $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$.

故选:A．

7．B

【分析】设切点分别为 (m, n) 和 (s, t)，再由导数求得斜率相等，得到

$a=ln2(s-1)-\frac{s+3}{2}(s>1)$ 构造函数由导数求得参数 a 的范围．

【详解】 $y=(x-1)^2$ 的导数为 $y'=2(x-1)$，$y=e^{x+a}$ 的导数为 $y'=e^{x+a}$, 设与曲线 $y=e^{x+a}$ 相切

的切点为 (m, n) 与曲线 $y=(x-1)^2$ 相切的切点为 (s, t)，则有公共切线斜率为

$2(s-1)=e^{m+a}=\frac{t-n}{s-m}$，又 $t=(s-1)^2$，$n=e^{m+a}$，即有 $2(s-1)=\frac{(s-1)^2-e^{m+a}}{s-m}=\frac{(s-1)^2-2(s-1)}{s-m}$，

即为 $s-m=\frac{s-1}{2}-1$，即有 $m=\frac{s+3}{2}(s>1)$ 则有 $e^{m+a}=2(s-1)$，

即为 $a=ln2(s-1)-\frac{s+3}{2}(s>1)$ 令 $f(s)=ln2(s-1)-\frac{s+3}{2}(s>1)$ 则 $f'(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}$，

当 $s>3$ 时，$f'(s)<0$ $f(s)$ 递减，当 $1<s<3$ 时，$f'(s)>0$ $f(s)$ 递增，即有 $s=3$ 处 $f(s)$ 取得

极大值，也为最大值，且为 $2ln2-3$，由恰好存在两条公切线，即 s 有两解，可得 a 的取值范

围是 $a<2ln2-3$，

故选:B

8．A

【分析】根据题意，用 t 表示出 $|AB|$，结合导数判断单调性，求出最值即可.

【详解】由题意得 $A(t,t^3)$，$B(t,3t-4)$，则 $|AB|=|t^3-3t+4|(0\le t\le 2)$.

设函数 $f(t)=t^3-3t+4$，$0\le t\le 2$，则 $f'(t)=3t^2-3$，

易知 $f(t)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，所以 $f(t)_{\min}=f(1)=2$，

又 $f(0)=4$，$f(2)=6$，所以 $f(t)$ 的值域为 $[2,6]$，故 $|AB|$ 的取值范围是 $[2,6]$.

故选：A.

9．BD

【分析】结合等比数列的性质依次分析选项即可.

【详解】由题意知，

A：由 $T_6<T_7$ 得 $a_7>1$，由 $T_7=T_8$ 得 $a_8=\frac{T_8}{T_7}=1$，

所以$\frac{a_8}{a_7}=q<1$，又$q>0$，所以$0<q<1$，故A错误；

B：由$T_7=T_8$得$a_8=\frac{T_8}{T_7}=1$，故B正确；

C：因为$\{a_n\}$是各项为正数的等比数列，$q\in(0,1)$，

有$a_1>a_2>\cdots>a_7>a_8=1>a_9>a_{10}>\cdots$，

所以$\frac{T_{10}}{T_6}=a_7a_8a_9a_{10}=(a_8a_9)^2=a_9^2<1$，

所以$T_{10}<T_6$，故C错误；

D：$T_1<T_2<\cdots<T_7<T_8>T_9>T_{10}>\cdots$，

则T_7与T_8均为T_n的最大值，故D正确.

故选：BD

10．AC

【解析】令$m=1$，则$a_{n+1}-a_n=a_1$，根据$a_1>0$，可判定A正确；由$a_5a_6-a_1a_{10}=20d^2>0$，

可判定B错误；根据等差数列的性质，可判定C正确；$\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$，根据$\frac{d}{2}>0$，

可判定D错误.

【详解】令$m=1$，则$a_{n+1}-a_n=a_1$，因为$a_1>0$，所以$\{a_n\}$为等差数列且公差$d>0$，故A正确；

由$a_5a_6-a_1a_{10}=\left(a_1^2+9a_1d+20d^2\right)-\left(a_1^2+9a_1d\right)=20d^2>0$，所以$a_5a_6>a_1a_{10}$，故$B$错误；根

据等差数列的性质，可得$2\left(1-x\right)=x+3x$，所以$x=\frac{1}{3}$，$1-x=\frac{2}{3}$，

故$a_{10}=\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$，故$C$正确；

由$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$，因为$\frac{d}{2}>0$，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是递增的等差数列，故$D$

错误.

故选：AC.

【点睛】解决数列的单调性问题的三种方法；

1、作差比较法：根据$a_{n+1}-a_n$的符号，判断数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列、递减数列或是常数列；

2、作商比较法：根据$\frac{a_{n+1}}{a_n}(a_n>0$或$a_n<0)$与1的大小关系，进行判定；

3、数形结合法：结合相应的函数的图象直观判断.

11．ACD

【分析】根据导函数确定$f(x)$的单调性极值及最值情况，就能确定ABC的正误，对于

D，恒成立问题，可通过参变分离求最值来解决.

【详解】【解】A选项，$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^2}$，定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$\therefore f'\left(x\right)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，令$f'\left(x\right)=0$，

解得$x=\sqrt{e}$，

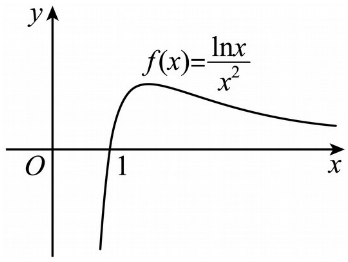
当$0<x<\sqrt{\mathrm{e}}$时，$f'\left(x\right)>0$，$\therefore$函数$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{e}\right)$上单调递增，

当$x>\sqrt{e}$时，$f'\left(x\right)<0$，$\therefore$函数$f\left(x\right)$在$\left(\sqrt{e},+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore$ 函数在 $x=\sqrt{e}$ 时取得极大值也是最大值 $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{2e}$，故A对，

B选项，$\because 0<x<1$ 时 $f\left(x\right)<0$，$f\left(1\right)=0$，$f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{2e}>0$，当 $x>1$ 时 $f\left(x\right)>0$，

如下图所示：



函数 有且只有唯一一个零点，故B错，

$\therefore$ $f\left(x\right)$

C选项，$\because$ 当 $x>\sqrt{e}$ 时 $f\left(x\right)$ 为单调递减函数，$\therefore f\left(\sqrt{\pi 3}\right)<f\left(\sqrt{\ }\right)$，

$\because f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\ln 2}{4}=f(2)<f(\pi)$，$\therefore f\left(\sqrt{2}\pi 3\right)<f\left(\sqrt{\ }\right)<f\left(\sqrt{\ }\right)$，故C对，

D选项，$\because f\left(x\right)<k-\dfrac{1}{x^2}$，故 $k>f\left(x\right)+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\ln x+1}{x^2}$，由于函数在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

$\therefore k>\left(\dfrac{\ln x+1}{x^2}\right)_{\max}$，设 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x+1}{x^2}$，定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{-2\ln x-1}{x^3}$，

设 $g'\left(x\right)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，$\therefore x\in(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}),g'\left(x\right)>0,g(x)$ 单调递增，

$x\in(\sqrt{e},+\infty),g'\left(x\right)<0,g(x)$ 单调递减，$\therefore g\left(x\right)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=e-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{2}$，故 $k>\dfrac{e}{2}$，故D对.

故选：ACD.

12．BCD

【分析】首先求函数的导数，根据条件判断 $0<q<1$，先判断B；再结合等比数列的定义和

等差数列的定义判断AC；最后数列前n项积的定义判断D.

【详解】函数$f\left(x\right)=x\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_7\right)$，

则$f'\left(x\right)=\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_7\right)+x\left[\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_7\right)\right]'$，

因为$f'\left(0\right)=1$，所以$a_1a_2\cdots a_7=1$，

由等比数列的性质可得$a_1a_7=a_2a_6=a_3a_5=a_4^2$，

所以$a_1a_2\cdots a_7=a_4^7=1$，所以$a_4=1$，

由$a_1>1$，可得$0<q<1$，故B正确；

因为等比数列$\left\{a_n\right\}$首项$a_1>1$，公比为q，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，

则$\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lg q<0$，故$\left\{\lg a_n\right\}$为单调递减的等差数列，故A错误；

设

$b_n=S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1}{q-1}q^n$，则$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{\dfrac{a_1}{q-1}q^n}{\dfrac{a_1}{q-1}q^{n-1}}=q$为常数，

因为$0<q<1$，所以$\dfrac{a_1}{q-1}<0$，q^n单调递减，

所以$\left\{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\right\}$为单调递增的等比数列，故C正确；

因为$a_1a_2\cdots a_7=1$，且$a_1>a_2>\cdots>a_7>0$，所以$a_1a_2\cdots a_6>1$，$0<a_7<1$，

所以使得$T_n>1$成立的n的最大值为6，故D正确.

故选：BCD