第一类曲线积分的计算方法探讨

汇报人：

2024-01-26

目录

CONTENTS

01

曲线积分基本概念与性质

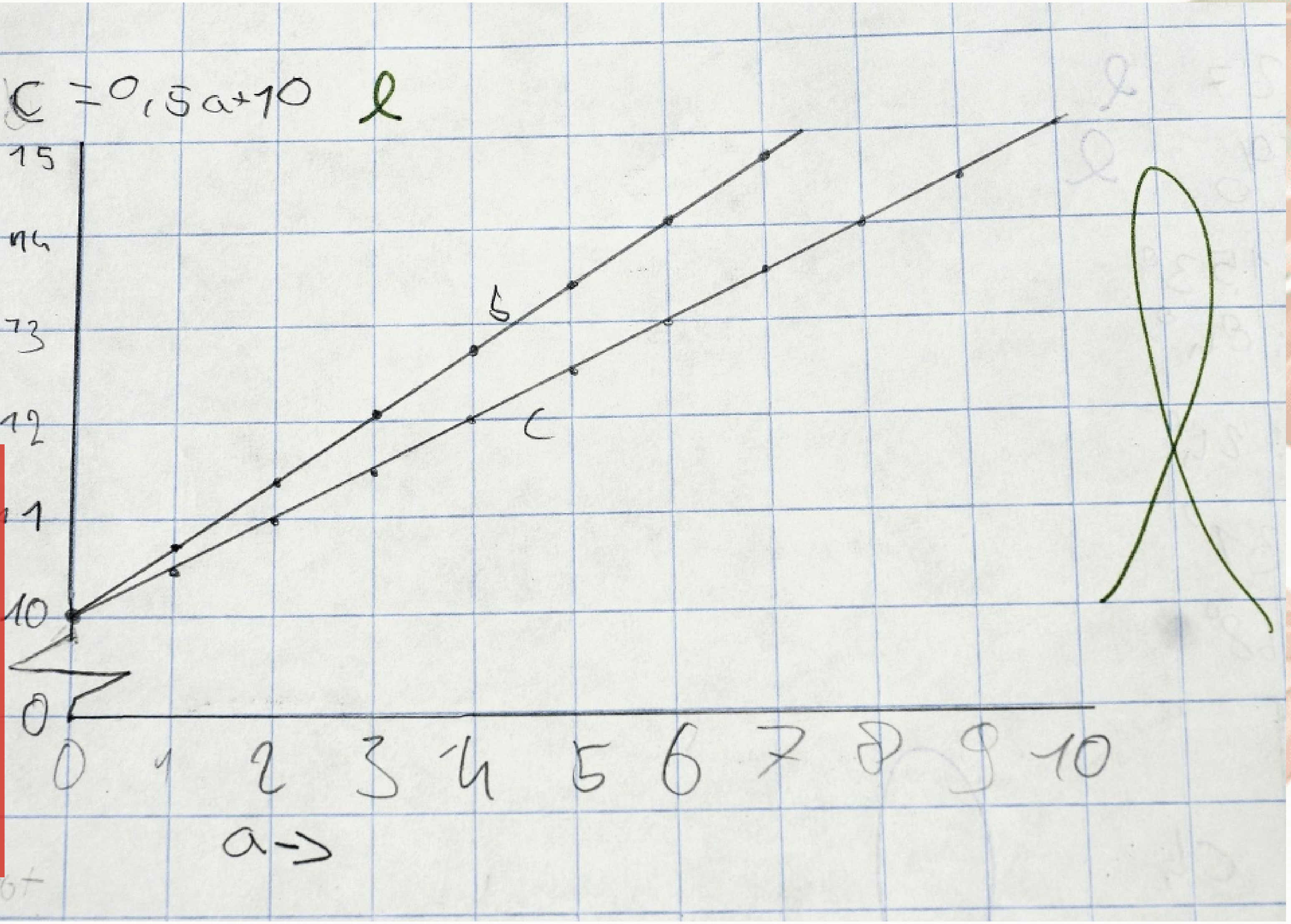
第一类曲线积分定义

对弧长的曲线积分

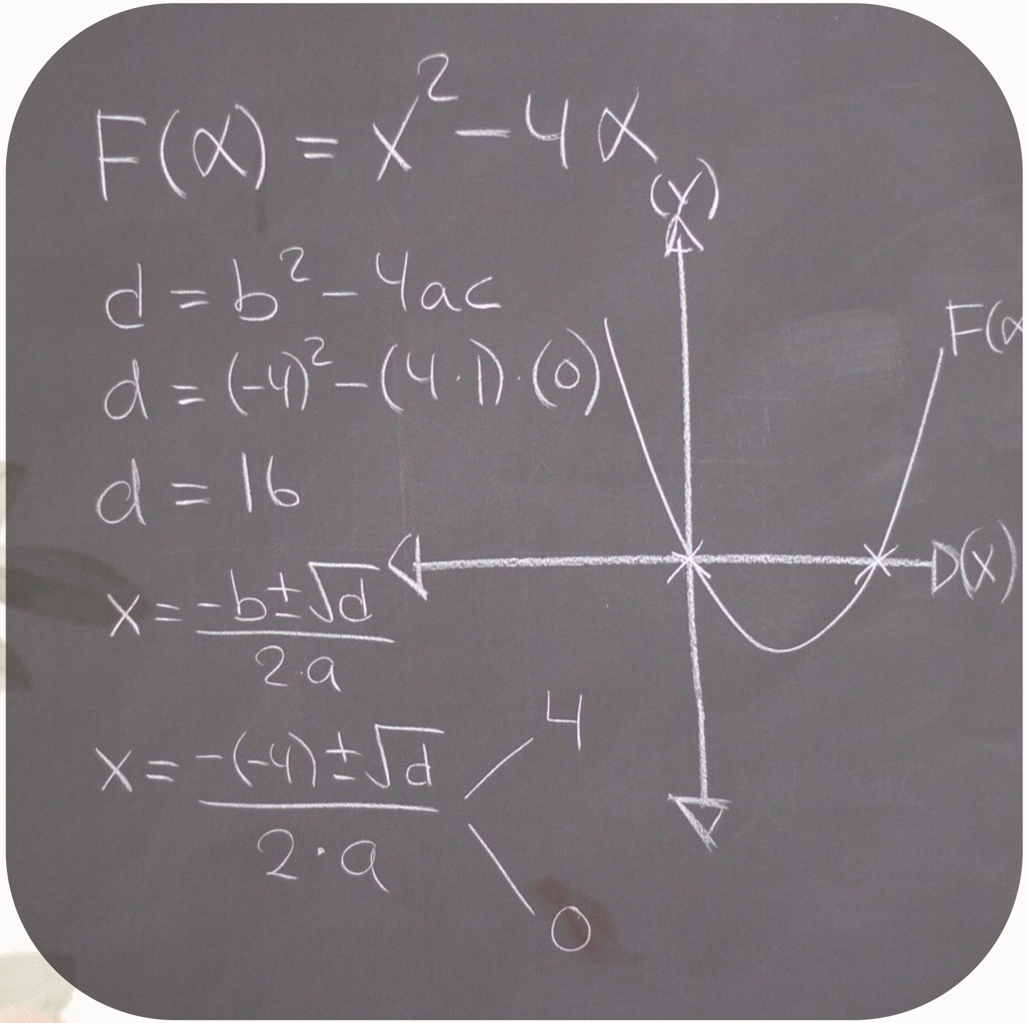
设$f(x,y)$是定义在平面曲线L上的函数，对弧长s的曲线积分记为$int_{L}f(x,y)ds$，其中ds表示弧长微分。

对坐标的曲线积分

设$P(x,y)$和$Q(x,y)$是定义在平面曲线L上的函数，对坐标x和y的曲线积分记为$int_{L}P(x,y)dx + Q(x,y)dy$。



几何意义与物理背景



几何意义

第一类曲线积分可以理解为求曲线形构件的质量，当密度函数为1时，曲线积分即为曲线的长度。

物理背景

在物理学中，第一类曲线积分可用于计算质点沿曲线运动时受到的力所做的功，或者计算电荷沿曲线移动时产生的电场强度。

曲线积分性质

01

线性性质

若$alpha$和$beta$为常数，则$int_{L}(alpha f + beta g)ds = alphaint_{L}fds + betaint_{L}gds$。

02

路径可加性

若曲线L可分为两段光滑曲线L_1和L_2，则$int_{L}fds = int_{L_1}fds + int_{L_2}fds$。

03

方向性

第一类曲线积分与曲线的方向有关，若改变曲线的方向，则积分的值会变为相反数。

04

估值定理

若$m leq f(x,y) leq M$在曲线L上恒成立，其中m和M为常数，则$m|L| leq int_{L}fds leq M|L|$，其中$|L|$表示曲线$L$的长度。

02

参数方程表示下曲线积分计算

参数方程形式及意义

参数方程形式

对于平面或空间中的一条曲线，若其上的每一点都可以通过一组参数来表示，则称该组参数为曲线的参数方程。通常表示为$vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，其中$t$为参数。

参数方程的意义

参数方程提供了一种将曲线上的点与其对应参数联系起来的方式，使得我们可以方便地描述和分析曲线的性质。

参数方程下曲线积分公式推导

曲线积分的定义

对于定义在曲线C上的函数$f(x, y, z)$，其在曲线C上的积分称为第一类曲线积分，记作$int_{C}f(x, y, z)ds$。

参数方程下的曲线积分公式

若曲线C由参数方程$vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$给出，且$t$的取值范围为$[a, b]$，则第一类曲线积分的计算公式为$int_{C}f(x, y, z)ds = int_{a}^{b}f(vec{r}(t))|vec{r}^{prime}(t)|dt$。

公式推导

根据弧长微分公式$ds = |vec{r}^{prime}(t)|dt$，将曲线积分转化为定积分形式。

典型例题分析与求解

例题1

计算曲线$C: x = t, y = t^{2}, z = t^{3}$（其中$0 leq t leq 1$）上函数$f(x, y, z) = x + y + z$的第一类曲线积分。

求解过程

计算曲线$C: x = cos t, y = sin t, z = t$（其中$0 leq t leq pi$）上函数$f(x, y, z) = x^{2} + y^{2} + z^{2}$的第一类曲线积分。

例题2

首先求出参数方程的导数$vec{r}^{prime}(t) = (1, 2t, 3t^{2})$，然后计算模长$|vec{r}^{prime}(t)| = sqrt{1 + 4t^{2} + 9t^{4}}$，最后代入公式进行计算$int_{C}f(x, y, z)ds = int_{0}^{1}(t + t^{2} + t^{3})sqrt{1 + 4t^{2} + 9t^{4}}dt$。

求解过程

首先求出参数方程的导数$vec{r}^{prime}(t) = (-sin t, cos t, 1)$，然后计算模长$|vec{r}^{prime}(t)| = sqrt{sin^{2}t + cos^{2}t + 1}$，最后代入公式进行计算$int_{C}f(x, y, z)ds = int_{0}^{pi}(cos^{2}t + sin^{2}t + t^{2})sqrt{sin^{2}t + cos^{2}t + 1}dt$。

03

极坐标表示下曲线积分计算

极坐标形式及意义

要点一

极坐标的基本概念

在平面内取一个定点O，称为极点；自极点O引一条射线Ox，称为极轴；再选定一个长度单位、一个角度单位（通常取弧度）及其正方向（通常取逆时针方向）。对于平面内任意一点M，用rho表示线段OM的长度（有时也用r表示），$theta$表示从Ox到OM的角度，rho叫做点M的极径，$theta$叫做点M的极角，有序数对$(rho, theta)$就叫做点M的极坐标，这样建立的坐标系叫做极坐标系。

要点二

极坐标的意义

极坐标提供了一个描述平面上点的位置的新方法。通过极径和极角，我们可以确定平面上任意一点的位置。此外，极坐标在描述某些图形（如圆、螺旋线等）和解决某些问题（如涉及圆或旋转对称的问题）时具有优势。

极坐标下曲线积分公式推导

曲线积分的定义

设L为平面上一条光滑的简单曲线（即自身不相交的连续曲线），函数$f(x, y)$在L上有定义。将L任意分割为n个小弧段$Delta l_i (i = 1, 2, ldots, n)$，每个小弧段$Delta l_i$上任取一点$(x_i, y_i)$，作乘积$f(x_i, y_i) Delta l_i (i = 1, 2, ldots, n)$，并求和$sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) Delta l_i$。当这些小弧段的最大长度$lambda to 0$时，如果上述和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x, y)$沿曲线$L$的（第一类）曲线积分，记作$int_{L} f(x, y) ds$。

极坐标下曲线积分的公式推导

设曲线L的方程为$r = r(theta) (alpha leq theta leq beta)$，其中函数$r(theta)$在区间$[alpha, beta]$上连续且可导。则曲线积分$int_{L} f(x, y) ds$可以转化为定积分$int_{alpha}^{beta} f(rcostheta, rsintheta) sqrt{r^2 + (r')^2} dtheta$。这里的$sqrt{r^2 + (r')^2}$是曲线$L$在极坐标系下的弧长元素。