2023届高三苏锡常镇四市第二次教学情况调研高三数学（4月）

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1-i)z=i$ ，则在复平面内 z 表示的点所在的象限为(　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知 A，B 为非空数集， $A=\{0,1\}$ ， $(\complement_R A)\cap B=\{-1\}$ ，则符合条件的 B 的个数为(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已经连续抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次，都出现了正面向上的结果，第 3 次随机地抛掷这枚硬币，则其正面向上的概率为(　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 已知向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夹角为60°，且 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=1$ ，则(　)

A. $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=1$　　B. $|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=1$

C. $\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=60^{\circ}$　　D. $\langle\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=60^{\circ}$

5. 埃及胡夫金字塔是世界古代建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，其侧面与底面所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则侧面三角形的顶角的正切值为(　)

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

6. 已知 $(2-\frac{1}{x})^{23}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_{22}}{x^{22}}+\frac{a_{23}}{x^{23}}$，则 $\frac{a_0}{2^{22}}+\frac{a_1}{2^{21}}+...+\frac{a_{21}}{2}+a_{22}=$(　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

7. 设 $a=\frac{1}{3}$， $b=ln\frac{3}{2}$， $c=tan\frac{1}{2}$，则(　)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n， $S_{n+1}+1=4a_n(n\in N^*)$，则使得不等式

$a_m+a_{m+1}+...+a_{m+k}-a_{m+1}S_k<2023(k\in N^*)$成立的正整数 m 的最大值为(　)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线$l:kx-y-k=0$，椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则下列说法正确的有(　)

A. l 恒过点$(1,0)$

B. 若 l 过 C 的焦点，则 $a^2+b^2=1$

C. 对任意实数 k，l 与 C 总有两个互异公共点，则$a\geqslant 1$

D. 若$a<1$，则一定存在实数 k，使得 l 与 C 有且只有一个公共点

10. 已知函数$f(x)=2sinx+sin2x$，则(　)

A. $f(x)$是偶函数，也是周期函数　　B. $f(x)$的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称　　D. $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调递增

11. 在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AB=2$， $AA_1=1$，则下列说法正确的有(　)

A. 异面直线AB_1， A_1C_1的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

B. 直线AB_1与平面A_1BC_1所成的角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

C. 若该正四棱柱的各顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为9π

D. 以 A 为球心，半径为 2 的球面与该正四棱柱表面的交线的总长度为$\dfrac{10+3\sqrt{3}}{6}\pi$

12. 已知函数$y=f(x)(x\in R)$的图象是连续不间断的，函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,1)$对称，在区间$(1,+\infty)$上单调递增.若$f(mcos\theta+4cos\theta-2)+f(-4cos2\theta)>2$对任意$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$恒成立，则下列选项中 m 的可能取值有(　)

A. $2\sqrt{2}-4$　　B. $2-2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}-2$　　D. $\sqrt{2}-4$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 某校 1000 名学生参加数学文化知识竞赛，每名学生的成绩$X\sim N\left(70,10^2\right)$，成绩不低于 90 分为优秀，依此估计优秀的学生人数为__________(结果填整数).附：若$\xi\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则

$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6827$， $P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9545$

14. 在平面直角坐标系 *xOy* 中，已知点 $A\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，将线段 *OA* 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到线段 *OB*，则点 *B* 的横坐标为__________

15. 某校数学兴趣小组在研究函数最值的过程中，获得如下研究思路：求函数 $f(x)=|g(x)-mx-n|$ 的最大值时，可以在平面直角坐标系中把 $|g(x)-mx-n|$ 看成 $y=g(x)$ 的图象与直线 $y=mx+n$ 在相同横坐标处的“高度差”，借助“高度差”探究其最值．借鉴该小组的研究思路，记 $f(x)=|sinx-mx-n|$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 *M*，当 *M* 取最小值时，$m=$__________，$n=$__________

16. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 *F*，过动点 *P* 的两条直线 l_1，l_2 均与 *C* 相切，设 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $(k_1-1)(k_2-1)=-4$，则 $|FP|$ 的最小值为__________

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$a_1=1$，$a_2+a_5+a_8=a_3a_5$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和 S_n；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$a_{n+2}b_{n+1}=a_nb_n$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

18.（本小题 12 分）

某地区的疾控机构为了考察药物 *A* 对某疾病的预防效果，在该地区随机抽取 96 人，调查得到的统计数据如下表所示.

	患病	未患病	合计
服用药物 *A*	10	38	48
未服用药物 *A*	22	26	48
合计	32	64	96

(1) 试判断：是否有 99% 以上的把握认为药物 *A* 对预防该疾病有效果？

(2) 已知治愈一位服用药物 *A* 的该疾病患者需要 2 个疗程，治愈一位未服用药物 *A* 的该疾病患者需要 3 个疗程．从该地区随机抽取 1 人，调查其是否服用药物 *A*、是否患该疾病，若未患病则无需治疗，若患病则对其进行治疗并治愈、求所需疗程数的数学期望.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$），$P(\chi^2>6.635)=0.01$

19.（本小题 12 分）

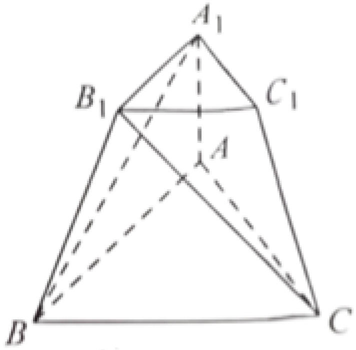
在 $\triangle ABC$ 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $acosB+(b+2c)cosA=0$.

(1) 求 *A*；

(2) 若点 D 在边 BC 上，$BD=2DC$，$AD=2$，$c=2b$，求$\triangle ABC$的面积.

20.（本小题 12 分）

如图，在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$BA\perp BC$，平面$A_1B_1BA\perp$平面 ABC，二面角B_1-BC-A的大小为45°，$AB=2$，$BC=A_1B_1=AA_1=1$



(1) 求证：$AA_1\perp$平面 ABC；

(2) 求异面直线BA_1与CB_1所成角的余弦值.

21.（本小题 12 分）

已知双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，右焦点 F 到渐近线的距离为$\sqrt{3}$.设$M(x_0,y_0)$是双曲线$C_2:\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$上的动点，过 M 的两条直线$l_1$，$l_2$分别平行于$C_1$的两条渐近线，与$C_1$分别交于 P，Q 两点.

(1) 求C_1的标准方程；

(2) 证明直线 PQ 过定点，并求出该定点的坐标.

22.（本小题 12 分）

已知函数$f(x)=ae^{x-1}-lnx-1,a\in R$.

(1) 若$a=1$，求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 若$f(x)$有且只有 2 个不同的零点，求 a 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查复数的运算和几何意义，属于基础题.

先化简 z，再利用复数的几何意义即可求解.

【解答】

解：由题意得： $z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

故 z 对应的点是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，在第二象限.

故选 B.

2.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查集合的运算，属于基础题.

利用列举法即可求解.

【解答】

解：因为 $A=\{0,1\}$，$(\complement_R A)\cap B=\{-1\}$，

则符合条件的 B 为 $\{-1\}$，$\{0,-1\}$，$\{-1,1\}$ 和 $\{-1,1,0\}$，共 4 个.

3.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查古典概型，属于基础题.

由每次正面朝上的概率都是 $\frac{1}{2}$ 即可解答.

【解答】

解：由每次抛掷硬币结果相互独立，

所以每次正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$

4.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查向量的数量积，向量的模，向量的夹角，考查数学运算能力，属于中档题.

由题意利用 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=\overrightarrow{a}^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2=1$ 可求出 $\left|\overrightarrow{b}\right|$，继而可求得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，再利用数量积求向量的模和夹角，对各选项依次求解判断即可.

【解答】

解：由题意可得

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=\overrightarrow{a}^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2$

$=|\overrightarrow{a}|^2-2|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos 60^\circ+|\overrightarrow{b}|^2=1$，

即 $1-\left|\overrightarrow{b}\right|+|\overrightarrow{b}|^2=1$，解得 $\left|\overrightarrow{b}\right|=1$ 或 0(舍去)，

则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，

则 $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{4\overrightarrow{a}^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2}=\sqrt{4-4\times\frac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$，故 *A* 错误；

$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=\sqrt{\overrightarrow{a}^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{b}^2}=\sqrt{1-4\times\frac{1}{2}+4}=\sqrt{3}$，故 *B* 错误；

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{\overrightarrow{a}^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2}=\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}+1}=1$，

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)}{|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|}=\frac{\overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1\times 1}=\frac{1}{2},$$

所以$\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=60^\circ$，故 *C* 正确；

$$\cos\langle\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=\frac{\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)}{\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|}=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}^2}{\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1\times 1}=-\frac{1}{2},$$

所以$\langle\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle=120^\circ$，故 *D* 错误.

故选 C.

5.【答案】*A*

【解析】【分析】

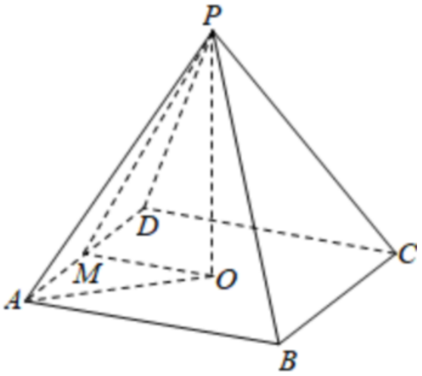
本题考查了二面角的求解计算，以及二倍角的正切公式的应用，属于中档题.

设出相关的线段长度，设正四棱锥的底面边长为 $AB=2a$，设侧面与底面所成的锐角为 θ，侧面三角形的顶角为 α，由 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，可得 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，进而可根据二倍角公式求解 $\tan\alpha$，即可得解.

【解答】

解：设正四棱锥的底面边长为 $2a$，设 *O* 为底面的中心，高为 *h*，斜高为 h'，

设 M 为 AD 的中点，则斜高为 $PM=h'$，



连接 OM，设侧面与底面所成的锐角为 θ，侧面三角形的顶角为 α，

由于 $PM\perp AD$，$OM\perp AD$，即 $\angle PMO=\theta$，

由 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，可得 $PM=\dfrac{a}{\cos\theta}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}-1}$，

由正四棱锥中 $PA=PD$，则 $\alpha=\angle DPA=2\angle DPM$，

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{DM}{PM}=\dfrac{a}{\frac{2a}{\sqrt{5}-1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

则 $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2}=2$，

故选 A.

6.【答案】D

【解析】【分析】

本题主要考查二项式定理的应用，属于中档题.

由已知根据二项式展开式的通项得 $a_{23}=-1$，再令 $x=\dfrac{1}{2}$，进而可得解.

【解答】

解：由 $(2-\dfrac{1}{x})^{23}=a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\ldots+\dfrac{a_{22}}{x^{22}}+\dfrac{a_{23}}{x^{23}}$，

对于 $(2-\dfrac{1}{x})^{23}$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_{23}^{r}\times2^{23-r}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{r}$，$r=0$，1，2，……23，

令 $r=23$，可得 $a_{23}=-1$，

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $a_0+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{21}a_{21}+2^{22}a_{22}+2^{23}a_{23}=0$，

故 $a_0+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{21}a_{21}+2^{22}a_{22}=-2^{23}a_{23}=2^{23}$，

上式等号两边同时除以 2^{22} 可得

$\frac{a_0}{2^{22}}+\frac{a_1}{2^{21}}+...+\frac{a_{21}}{2}+a_{22}=2$，

故选 D.

7.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查比较大小，属于中档题.

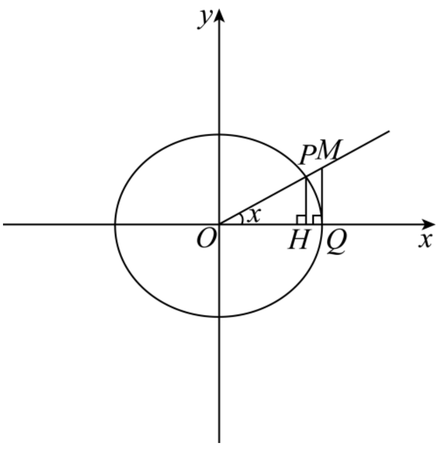
利用单位圆结合三角函数线比较 a 和 c 的大小，利用导数比较 b 和 c 的大小，利用对数函数单调性比较 a 和 b 的大小.

【解答】

解：证明当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x$：如图，在单位圆中，圆 O 半径 $|OP|=1, \tan x=\frac{|MQ|}{|OQ|}=|MQ|$, 由于 $S_{\triangle OMQ}>S_{扇形OPQ}$, 即 $\frac{1}{2}|OQ||MQ|>\frac{1}{2}x\cdot|OP|^2$,

即 $\frac{1}{2}\tan x>\frac{1}{2}x$, 即 $\tan x>x$,

由于 $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, 故 $c=\tan\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}=a$,



令 $f(x)=x-\ln x-1, x>0$, 则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(1)=1-\ln 1-1=0$,

即 $x-\ln x-1\geqslant 0$ 恒成立，当 $x=1$ 时取等号，

故 $\frac{3}{2}-\ln\frac{3}{2}-1>0$, 即 $\frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2}$, 故 $c>b$,

由于 $a=\frac{1}{3}=\ln e^{\frac{1}{3}}$, 而 $\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3=e<3, \left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}>3$,

故$\dfrac{3}{2} > e^{\frac{1}{3}}$, 即$b > a$,

故$c > b > a$.

8.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查等比数列通项公式及求和公式，数列的递推公式，数列与不等式，属于中档题.

由题意可得$a_n = 2^{n-1}$，$S_n = \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$，进而不等式可化为$2^{m-1} < 2023$恒成立，由此得到答案.

【解答】

解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

由$S_{n+1} + 1 = 4a_n$，则$n \geqslant 2$，$S_n + 1 = 4a_{n-1}$，

所以两式相减可得 $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$，

所以$q^2 a_{n-1} = 4qa_{n-1} - 4a_{n-1}$，即$q^2 - 4q + 4 = 0$，解得$q = 2$，

令$n = 1$，则$S_2 + 1 = 4a_1$，可得$a_1 = 1$，

所以$a_n = 2^{n-1}$，$S_n = \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$，

所以$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+k} - a_{m+1}S_k = \dfrac{2^{m-1}(1-2^{k+1})}{1-2} - 2^m(2^k - 1) = 2^{m-1}$，

所以$2^{m-1} < 2023$，

由$2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$，

所以正整数m的最大值为11,

故选C.

9.【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查直线与椭圆的位置关系，椭圆的性质及几何意义，直线系方程及其应用，属于中档题.

结合椭圆性质、直线与椭圆位置关系，逐个选项判断即可.

【解答】解：直线$l: kx - y - k = 0$，即直线$k(x-1) - y = 0$，

令$\left\{\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$, 可得$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$,

即l恒过点$(1,0)$，A正确;

若l过C的焦点，则$c = 1, a^2 = b^2 + 1, B$错误;

由于直线$l: kx - y - k = 0$过定点$(1,0)$且斜率存在，故要使对任意实数k，l与C总有两个互异公共点，

则l恒过的定点$(1,0)$在椭圆内部或$(1,0)$是椭圆的右顶点即可，即$a \geqslant 1$，C正确;

若 $a<1$，则 *l* 恒过的定点 $(1,0)$ 在椭圆外部，从而可知一定存在实数 *k*，使得直线 *l* 与椭圆 *C* 相切，即使得 *l* 与 *C* 有且只有一个公共点，*D* 正确.

10.【答案】*BD*

【解析】【分析】

本题考查函数的奇偶性、周期性、对称性，考查利用导数研究函数的单调区间和最值，属于中档题.

利用函数周期性和奇偶性的定义，即可判断 *A*；因为 $f(x)$ 是周期函数且周期为 2π，则研究函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的最值即可，利用导数求解函数的单调性和最值，进而可判断 *B* 和 *D*；对于 *C*，易举出反例.

【解答】

解：对于 *A*，显然 $f(x+2\pi)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期函数，

$f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)$

$=-2\sin x-\sin 2x=-f(x)$，

又 $f(x)$ 定义域为 *R*，

所以 $f(x)$ 为奇函数，故 *A* 错误；

对于 *B*，$f(x)=2sinx+sin2x$，

则 $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$

$=2\cos x+2\left(2\cos^2 x-1\right)$

$=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$，

$f(x)$ 是周期函数，周期为 2π，

研究 $[-\pi,\pi]$ 情况，

令 $f'(x)>0$，则 $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$，

令 $f'(x)<0$，则 $-\pi<x<-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，在 $(-\pi,-\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递减，

求得 $f(-\frac{\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$f(\pi)=0$，$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$f(-\pi)=0$，

则 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故 *B* 正确；

对于 *D*，又 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\subseteq(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，故 *D* 正确；

对于 *C*，假设 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，