

# 第 3 章圆锥曲线的方程

## 3.3.2 抛物线的简单几何性质 (第1课时)



# 目录

01求抛物线标准方程

02求焦点弦长



## 学习目标

- 1.掌握抛物线的简单几何性质.
- 2.归纳、对比四种方程所表示的抛物线的几何性质的异同.
- 3.掌握直线与抛物线位置关系的判断。

## 知识回顾

### 1. 抛物线的定义

平面内与一个定点 $F$ 和一条定直线 $l$  ( $l$  不经过点 $F$ )的距离相等的点的轨迹叫做抛物线.

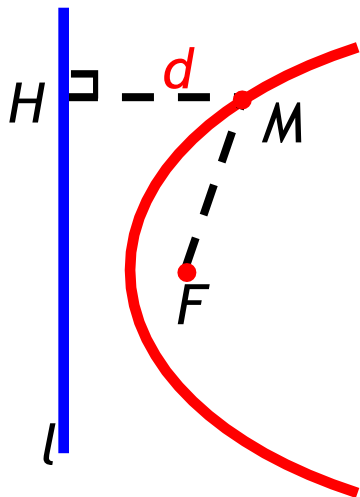
其中定点 $F$ 叫做抛物线的焦点

定直线 $l$ 叫做抛物线的准线

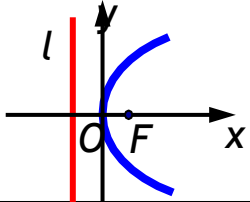
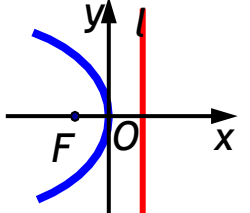
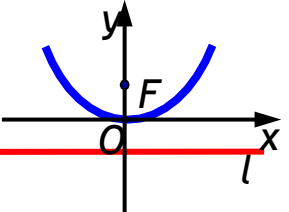
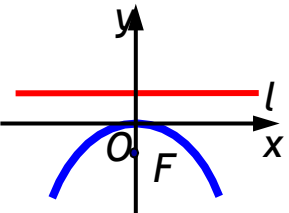
定义告诉我们：

(1)判断抛物线的一种方法

(2)抛物线上任一点的性质： $|MF|=d$



## 2. 四种抛物线及其标准方程

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程	焦点位置
	$y^2=2p$ $x$ $(p>0)$	$F(\frac{P}{2}, 0)$	$x=-\frac{P}{2}$	x轴的正半轴上
	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$F(-\frac{P}{2}, 0)$	$x=\frac{P}{2}$	x轴的负半轴上
	$x^2=2p$ $y$ $(p>0)$	$F(0, \frac{P}{2})$	$y=-\frac{P}{2}$	y轴的正半轴上
	$x^2=-2py$ $(p>0)$	$F(0, -\frac{P}{2})$	$y=\frac{P}{2}$	y轴的负半轴上

## 新知探究

如何研究抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的几何性质?

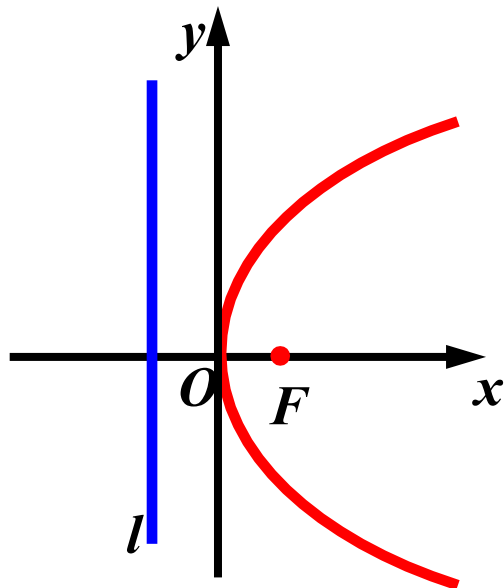
### 1. 范围

由抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{有 } 2px = y^2 \geq 0 \\ p > 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

所以抛物线的范围为  $x \geq 0, y \in R$



## 2.对称性

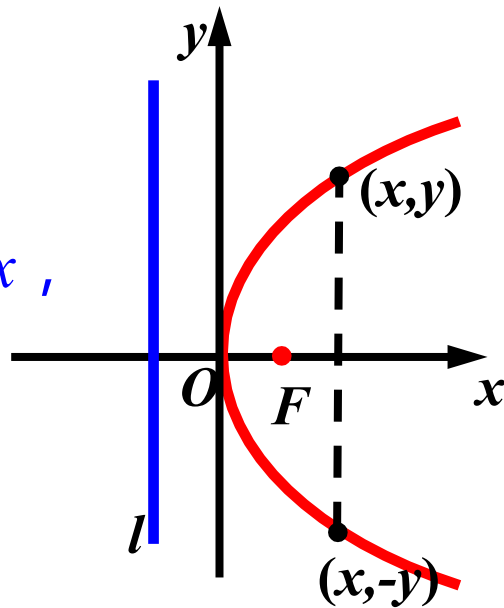
$$Q(x, y) \xleftrightarrow{\text{关于x轴对称}} (x, -y)$$

若点 $(x, y)$ 在抛物线上, 即满足 $y^2 = 2px$ ,

$$\text{则} (-y)^2 = 2px,$$

即点 $(x, -y)$ 也在抛物线上,

故抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 关于x轴对称.

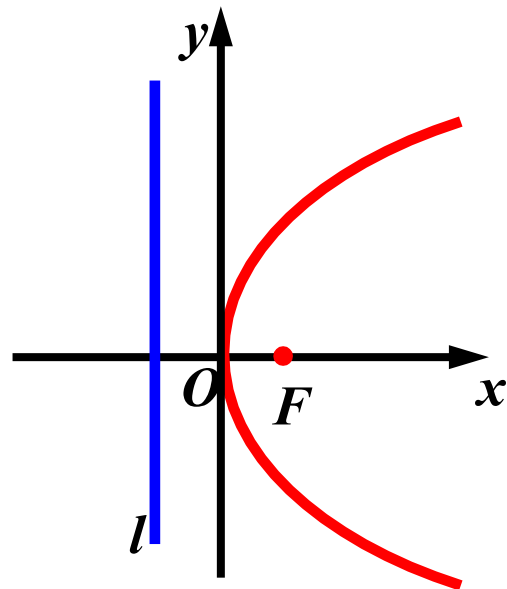


### 3.顶点

定义：抛物线与它的轴的交点叫做抛物线的顶点.

$\therefore y^2 = 2px (p > 0)$ 中，令 $y=0$ ，则 $x=0$ .

即抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点 $(0,0)$ .

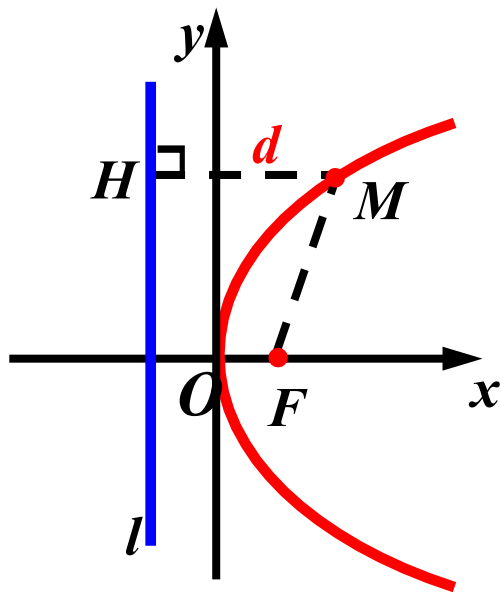




## 4.离心率

抛物线上的点 $M$ 与焦点 $F$ 的距离和它到准线的距离 $d$ 之比 $\frac{|MF|}{d}$ , 叫做抛物线的离心率, 用 $e$ 表示.

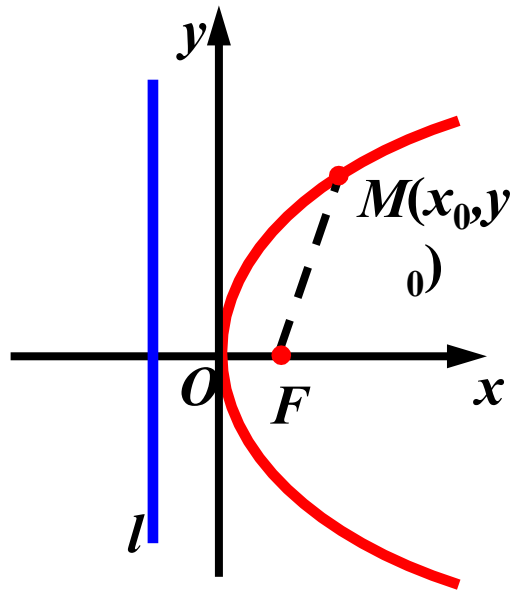
由定义知, 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的离心率为 $e = 1$ .



## 5.焦半径

连接抛物线任意一点与焦点的线段叫做抛物线的焦半径.

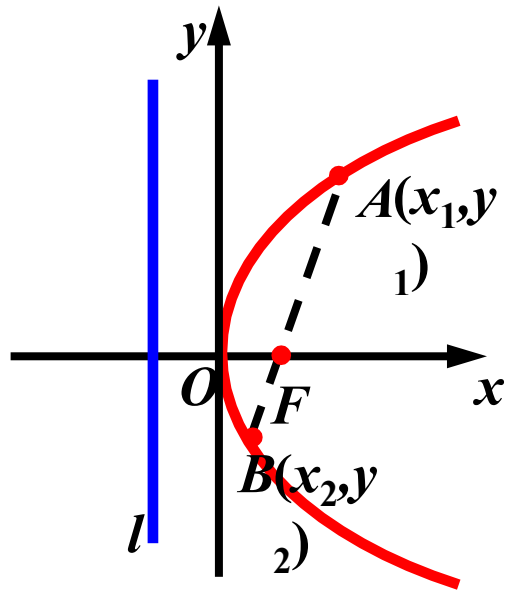
$$\text{焦半径公式 } |MF| = x_0 + \frac{p}{2}$$



## 6.焦点弦

过抛物线的焦点的线段，  
叫做抛物线的**焦点弦**。

焦点弦公式： $|AB| = x_1 + x_2 + p$

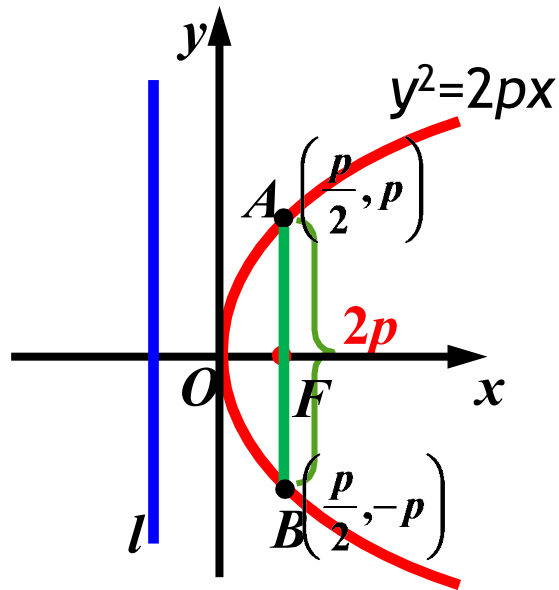


## 7.通径

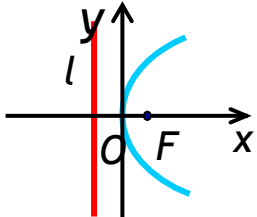
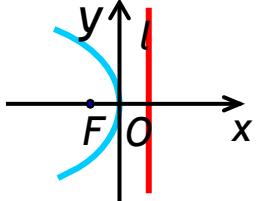
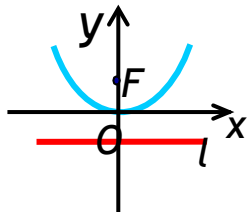
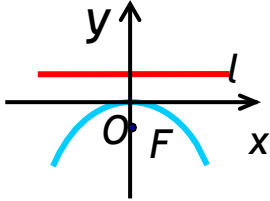
过焦点而垂直于对称轴的弦 $AB$ ，称为抛物线的通径。  
 $|AB|=2p$

利用抛物线的顶点、通径的两个端点可较准确画出反映抛物线基本特征的草图。

$2p$ 越大，抛物线张口越大



# 抛物线的简单几何性质

方程	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
图形				
范围	$x \geq 0, y \in R$	$x \leq 0, y \in R$	$x \in R, y \geq 0$	$x \in R, y \leq 0$
对称性	关于x轴对称		关于y轴对称	
顶点	$(0,0)$			
焦半径	$\frac{p}{2} + x_0$	$\frac{p}{2} - x_0$	$\frac{p}{2} + y_0$	$\frac{p}{2} - y_0$
焦点弦	$x_1 + x_2 + p$	$-(x_1 + x_2) + p$	$y_1 + y_2 + p$	$-(y_1 + y_2) + p$
通径	$2p$			



# 1. 求抛物线标准方程

---

## 典例1

已知抛物线关于x轴对称，它的顶点在坐标原点，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$ ，求它的标准方程.

**解：**由已知可设抛物线的标准方程为 $y^2=2px$  ( $p>0$ )

则将M点代入得 $(-2\sqrt{2})^2 = 2p \times 2$  解得： $p=2$

因此所求方程为： $y^2=4x$

**变式：**顶点在坐标原点,对称轴是坐标轴,并且过点 $M(2, -2\sqrt{2})$ 的抛物线有几条,求它的标准方程,

$$y^2=4x \text{ 或 } x^2=-\sqrt{2}y$$

**解惑提高** 当焦点在x轴上,开口方向不定时,设为 $y^2=2mx$  ( $m \neq 0$ ),

当焦点在y轴上,开口方向不定时,设为 $x^2=2my$  ( $m \neq 0$ ),可避免讨论.

## 练一练

1. 设抛物线 $y=mx^2(m\neq 0)$ 的准线与直线 $y=1$ 的距离为3,求抛物线的标准方程.

错解:由 $y=mx^2(m\neq 0)$ 可知其准线方程为 $y=-\frac{m}{4}$ .

由题意知 $-\frac{m}{4}=-2$ ,解得 $m=8$ ,

故所求抛物线的标准方程为 $y=8x^2$ .

错因分析本题在解答过程中容易出现两个错误:一是不能正确理解抛物线标准方程的形式,错误地将所给方程看成是抛物线的标准方程,得到准线方程为 $y=-\frac{m}{4}$ ;

二是得到准线方程后,只分析其中的一种情况,而忽略了另一种情况,只得到了一个解.



正解:  $y=mx^2(m\neq 0)$  可化为  $x^2=\frac{1}{m}y$ , 其准线方程为  $y=-\frac{1}{4m}$ . 由题意知-

$$\frac{1}{4m}=-2 \text{ 或 } -\frac{1}{4m}=4,$$

$$\text{解得 } m=\frac{1}{8} \text{ 或 } m=-\frac{1}{16},$$

故所求抛物线的标准方程为  $x^2=8y$  或  $x^2=-16y$ .



## 2. 求焦点弦长

---

## 典例2

斜率为1的直线经过抛物线  $y^2=4x$  的焦点  $F$ ，且与抛物线相交于两点  $A$ 、 $B$ ，求焦点弦长  $AB$  的长。

解：方法一：由抛物线的标准方程可知，抛物线焦点的坐标为  $F(1, 0)$ ，

所以直线  $AB$  的方程为  $y = x - 1$ ，即  $x - y - 1 = 0$  ①

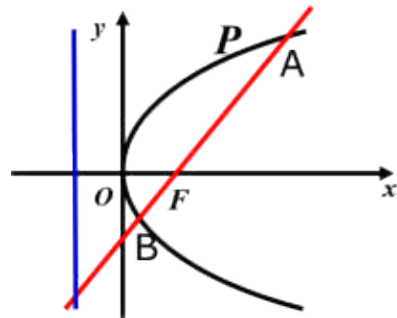
将方程①代入抛物线方程  $y^2 = 4x$ ，化简得  $x^2 - 6x + 1 = 0$ ，

解这个方程，得  $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ， $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ ，

将  $x_1, x_2$  代入方程①中，

得  $y_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ ， $y_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ ，即  $A(3 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ ， $B(3 - 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$ ，

$\therefore |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 8$ 。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/498044002070007004>