线性代数复习要点

第一部分　行列式

1. 排列的逆序数

2. 行列式按行（列）展开法则

3. 行列式的性质及行列式的计算

行列式的定义

1. 行列式的计算：

① **(定义法)** $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

思考题：用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：用树图分析

-1 — 1 — 3 —— -1　$\tau(2134)=1$

-1 — 1 — 1 —— -2　$\tau(2143)=2$

-1 — 3 — 2 —— -2　$\tau(2413)=3$

-1 — 3 — 3 —— -1　$\tau(2431)=4$

故 $D=-3+2-12+9=-4$

② **(降阶法) 行列式按行（列）展开定理：**

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j, \\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

③ **(化为三角型行列式)上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.**

$$|A|=\begin{vmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}=b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$$

④ **若 A与B 都是方阵（不必同阶），则**

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

⑤ **关于副对角线：**

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n1}$$

⑥ **范德蒙德行列式：**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

⑦ **$a-b$ 型公式：**

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

⑧ **(升阶法)**在原行列式中增加一行一列，保持原行列式不变的方法.

⑨ **(递推公式法)** 对 n 阶**行列式** D_n **找出** D_n 与 D_{n-1} **或** D_{n-1}**，**D_{n-2} **之间的一种**关系——称为递**推公式，其中**

D_n，D_{n-1}，D_{n-2} **等结构相同，再由**递**推公式求出** D_n **的方法**称为递**推公式法.**

(拆分法) 把某一行（或列）的元素写成两数和的形式，再利用行列式的性质将**原行列式写成两行列式之和，**

使问题**简化以例**计**算.**

⑩ **(数学归纳法)**

2. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k \lambda^{n-k}$，其中 S_k 为 k 阶主子式；

3. 证明 $|A| = 0$ 的方法：

①、$|A| = -|A|$；

②、反证法；

③、构造齐次方程组 $Ax = 0$，证明其有非零解；

④、利用秩，证明 $r(A) < n$；

⑤、证明 0 是其特征值.

4. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$　　　$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

第二部分　矩阵

1. 矩阵的运算性质

2. 矩阵求逆

3. 矩阵的秩的性质

4. 矩阵方程的求解

1. 矩阵的定义 **由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m \times n$ **矩阵.**

记作：$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ **或** $A_{m \times n}$

① 同型矩阵：两个矩阵的行数相等、列数也相等.

② 矩阵相等: 两个矩阵同型，且对应元素相等.

③ 矩阵运算

a. 矩阵加（减）法：两个同型矩阵，对应元素相加（减）.

b. 数与矩阵相乘：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

c. 矩阵与矩阵相乘：设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$，$B = (b_{ij})_{s \times n}$，则 $C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$，

其中