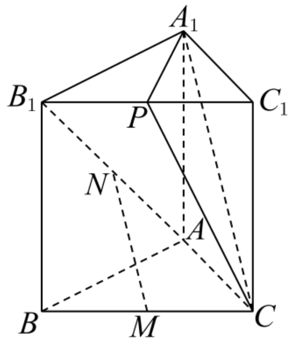
大题　立体几何

题目 1 (2024·黑龙江·二模) 如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长和底面边长均为 2，M 是 BC 的中点，N 是 AB_1 的中点，P 是 B_1C_1 的中点.



(1) 证明：$MN //$ 平面 A_1CP；

(2) 求点 P 到直线 MN 的距离.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\sqrt{3}$

【分析】(1) 建立如图空间直角坐标系 $A-xyz$，设平面 A_1CP 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，利用空间向量法证明 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$ 即可；

(2) 利用空间向量法即可求解点线距.

【详解】(1) 由题意知，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=60^\circ$，而 $AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp AB$，在平面 ABC 内过点 A 作 y 轴，使得 $AB\perp y$ 轴，

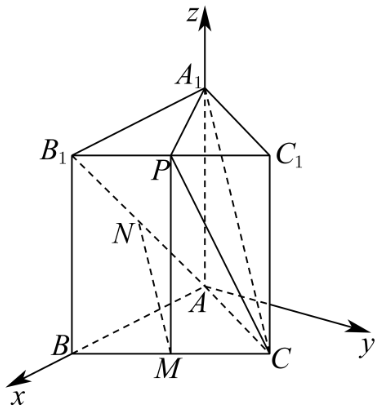
建立如图空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，得 $M\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$N(1,0,1)$，$P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1P}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

设平面 A_1CP 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=x+\sqrt{3}y-2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $y=-\sqrt{3}$，$z=-1$，



所以 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$，

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{2}\times1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-\sqrt{3})+1\times(-1)=0$，

又 MN 不在平面 A_1CP 内

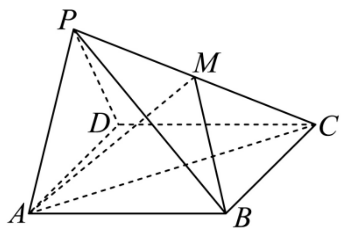
即 $MN //$ 平面 A_1CP；

(2) 如图，连接 PM，由 (1) 得 $\overrightarrow{PM}=(0,0,-2)$，

则 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PM}=-2$，$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PM}|=2$，

所以点 P 到直线 MN 的距离为 $d=\sqrt{|\overrightarrow{PM}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}\right)^2}=\sqrt{3}$.

题目 2 (2024·安徽合肥·二模) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，M 是侧棱 PC 的中点，侧面 PAD 为正三角形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$.



(1) 求三棱锥$M-ABC$的体积；

(2) 求AM与平面PBC所成角的正弦值.

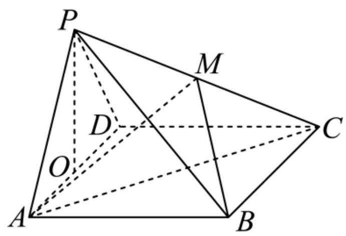
【答案】(1)$\frac{1}{2}$

(2)$\frac{\sqrt{33}}{11}$.

【分析】(1) 作出辅助线，得到线线垂直，进而得到线面垂直，由中位线得到M到平面$ABCD$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，进而由锥体体积公式求出答案；

(2) 证明出$BO\perp AD$，建立空间直角坐标系，求出平面的法向量，进而由法向量的夹角余弦值的绝对值求出线面角的正弦值.

【详解】(1) 如图所示，取AD的中点O，连接PO.



因为$\triangle PAD$是正三角形，所以$PO\perp AD$.

又因为平面$PAD\perp$底面$ABCD$，$PO\subset$平面PAD，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$PO\perp$平面$ABCD$，且$PO=\sqrt{3}$.

又因为M是PC的中点，M到平面$ABCD$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$，

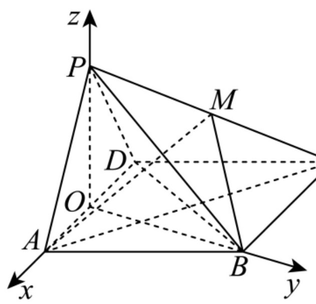
所以三棱锥$M-ABC$的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

(2) 连接BO,BD，因为$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

所以$\triangle ABD$为等边三角形，所以$BO\perp AD$，

以O为原点，OA,OB,OP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，



所以$M\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ -2x=0\end{cases}$，解得 $x=0$，取 $z=1$，则 $y=1$，

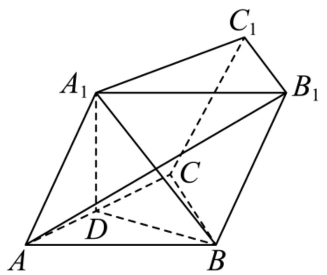
所以 $\vec{n}=(0,1,1)$.

设 AM 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(0,1,1)\right|}{\sqrt{4+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

即 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

题目 3 **(2023·福建福州·模拟预测)** 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，$AB=AC=BC=AA_1=2$，$A_1B=\sqrt{6}$.



(1) 设 D 为 AC 中点，证明：$AC\perp$ 平面 A_1DB；

(2) 求平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【分析】(1) 根据等边三角形的性质得出 $BD\perp AC$，根据平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC 得出 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，$BD\perp A_1D$，利用勾股定理得出 $AC\perp A_1D$，从而证明 $AC\perp$ 平面 A_1DB；

(2) 建立空间直角坐标系，利用坐标表示向量，求出平面 A_1AB_1 的法向量和平面 ACC_1A_1 的一个法向量，利用向量求平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角余弦值.

【详解】(1) 证明：因为 D 为 AC 中点，且 $AB=AC=BC=2$，

所以在 $\triangle ABC$ 中，有 $BD\perp AC$，且 $BD=\sqrt{3}$，

又平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，且平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$BD\subset$ 平面 ABC，

所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，

又 $A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1，则 $BD\perp A_1D$，

由 $A_1B=\sqrt{6}$，$BD=\sqrt{3}$，得 $A_1D=\sqrt{3}$，

因为 $AD=1$，$AA_1=2$，$A_1D=\sqrt{3}$，所以由勾股定理，得 $AC\perp A_1D$，

又 $AC\perp BD$，$A_1D\cap BD=D$，$A_1D,BD\subset$ 平面 A_1DB，所以 $AC\perp$ 平面 A_1DB；

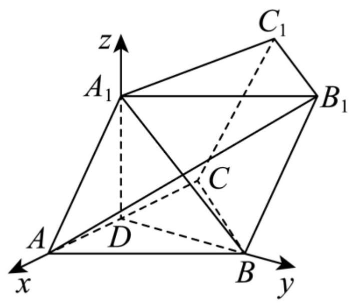
(2) 如图所示，以 D 为原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

可得 $A(1,0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设平面 A_1AB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，得 $y=1$，$z=1$，



所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$,

由 (1) 知, $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1,

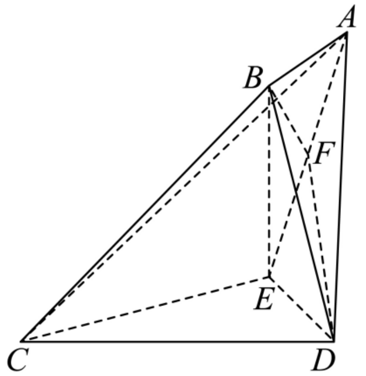
所以平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{3},0)$,

记平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角为 α,

则 $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

所以平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

题目 4 (2024·山西晋中·三模) 如图,在六面体 $ABCDE$ 中, $BC=BD=\sqrt{6}$, $EC\perp ED$,且 $EC=ED=\sqrt{2}$, AB 平行于平面 CDE, AE 平行于平面 BCD, $AE\perp CD$.



(1) 证明:平面 $ABE\perp$ 平面 CDE;

(2) 若点 A 到直线 CD 的距离为 $2\sqrt{2}$, F 为棱 AE 的中点,求平面 BDF 与平面 BCD 夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$

【分析】(1) 设平面 ABE 与直线 CD 交于点 M,使用线面平行的性质,然后用面面垂直的判定定理即可;

(2) 证明 $BE\perp$ 平面 CDE,然后构造空间直角坐标系,直接用空间向量方法即可得出结果.

【详解】(1) 设平面 ABE 与直线 CD 交于点 M,连接 ME,MB,则平面 ABE 与平面 CDE 的交线为 ME,平面 ABE 与平面 BCD 的交线为 MB,因为 AB 平行于平面 CDE, $AB\subset$ 平面 ABE,平面 ABE 和平面 CDE 的交线为 ME,所以 $AB/\!/ME$. 同理 $AE/\!/MB$,所以四边形 $ABME$ 是平行四边形,故 $AE/\!/MB$, $AB/\!/ME$.

因为 $CD\perp AE$, $AE/\!/MB$,所以 $CD\perp MB$,又 $BC=BD=\sqrt{6}$,所以 M 为棱 CD 的中点

在 $\triangle CDE$ 中, $EC=ED$, $MC=MD$,所以 $CD\perp ME$,由于 $AB/\!/ME$,故 $CD\perp AB$.

而 $CD\perp AE$, $AB\cap AE=A$, $AB,AE\subset$ 平面 ABE,所以 $CD\perp$ 平面 ABE,

又 $CD\subset$ 平面 CDE,所以平面 $ABE\perp$ 平面 CDE.

(2) 由 (1) 可知, $CD\perp$ 平面 $ABME$,又 $AM\subset$ 平面 $ABME$,所以 $CD\perp AM$.

而点 A 到直线 CD 的距离为 $2\sqrt{2}$,故 $AM=2\sqrt{2}$.

在等腰直角三角形 CDE 中,由 $EC=ED=\sqrt{2}$,得 $CD=2,MC=MD=ME=1$.

在等腰三角形 BCD 中,由 $MC=MD=1$, $BC=BD=\sqrt{6}$,得 $BM=\sqrt{5}$.

在平行四边形 $ABME$ 中, $AE=BM=\sqrt{5}$, $AB=EM=1$, $AM=2\sqrt{2}$,

由余弦定理得 $\cos\angle MEA=\dfrac{EM^2+AE^2-AM^2}{2EM\cdot AE}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

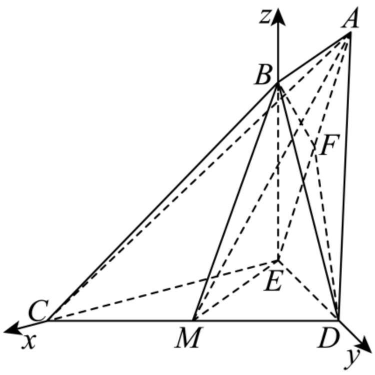
所以 $\cos\angle BME=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $BE=\sqrt{BM^2+EM^2-2BM\cdot EM\cos\angle BME}=2$.

因为 $BE^2+ME^2=2^2+1^2=(\sqrt{5})^2=BM^2$，所以 $BE\perp ME$.

因为平面 $ABME\perp$ 平面 CDE，平面 $ABME$ 和平面 CDE 的交线为 ME，BE 在平面 $ABME$ 内.

所以 $BE\perp$ 平面 CDE.

如图，以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EB}$ 分别为 x,y,z 轴正方向，建立空间直角坐标系.



则 $E(0,0,0),C(\sqrt{2},0,0),D(0,\sqrt{2},0),B(0,0,2),A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right),F\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},1\right)$.

所以 $\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{DB}=(0,-\sqrt{2},2),\overrightarrow{FB}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},1\right)$.

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0\\ -\sqrt{2}y_1+2z_1=0\end{cases}$.

则可取 $x_1=2$，得 $\vec{m}=(2,2,\sqrt{2})$.

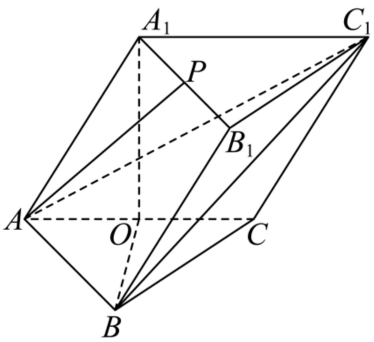
设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{4}x_2+\frac{\sqrt{2}}{4}y_2+z_2=0\\ -\sqrt{2}y_2+2z_2=0\end{cases}$.

取 $z_2=1$，则 $\vec{n}=(-3\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.

设平面 BDF 与平面 BCD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\left|\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{10}\times\sqrt{21}}\right|=\frac{\sqrt{105}}{35}$.

所以平面 BDF 与平面 BCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{35}$.

题目 5 **(2024·辽宁·二模)** 棱长均为2的斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，A_1 在平面 ABC 内的射影 O 在棱 AC 的中点处，P 为棱 A_1B_1(包含端点) 上的动点.



(1) 求点 P 到平面 ABC_1 的距离；

(2) 若 $AP\perp$ 平面 α，求直线 BC_1 与平面 α 所成角的正弦值的取值范围.

【答案】(1) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$；

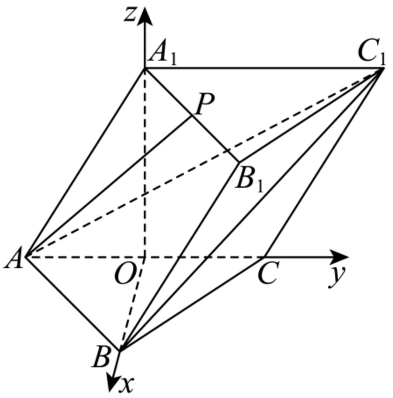
(2) $\left[\frac{2}{5},\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$.

【分析】(1) 以 O 为原点建立空间直角坐标系，求出平面 ABC_1 的法向量，再利用点到平面距离的向量求法求解即得.

(2) 由向量共线求出向量 $\overrightarrow{AP}$ 的坐标，再利用线面角的向量求法列出函数关系，并求出函数的值域即可.

【详解】(1) 依题意，$A_1O \perp$ 平面 ABC，$OB \perp AC$(底面为正三角形)，且 $A_1O = OB = \sqrt{3}$，

以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图，



则 $O(0,0,0), A(0,-1,0), B(\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), A_1(0,0,\sqrt{3}), C_1(0,2,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AC_1} = (0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC_1} = (-\sqrt{3},2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1} = (0,1,\sqrt{3})$，

由 $A_1B_1 /\!/ AB$，$A_1B_1 \not\subset$ 平面 ABC_1，$AB \subset$ 平面 ABC_1，则 $A_1B_1 /\!/$ 平面 ABC_1，

即点 P 到平面 ABC_1 的距离等于点 A_1 到平面 ABC_1 的距离，

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 ABC_1 的一个法向量，由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 3y + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = -\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，取 $z = 3$，得 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 3)$，

因此点 A_1 到平面 ABC_1 的距离 $d = \dfrac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

所以点 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

(2) 设 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$，$\lambda \in [0,1]$，

则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AA_1} + \lambda \overrightarrow{AB} = (0,1,\sqrt{3}) + \lambda(\sqrt{3},1,0) = (\sqrt{3}\lambda, 1+\lambda, \sqrt{3})$，

由 $AP \perp \alpha$，得 $\overrightarrow{AP}$ 为平面 α 的一个法向量，设直线 BC_1 与平面 α 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AP} \rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{AP}|} = \dfrac{|5-\lambda|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3\lambda^2 + (1+\lambda)^2 + 3}} = \dfrac{5-\lambda}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2\lambda^2 + \lambda + 2}}$，

令 $t = 5 - \lambda$，则 $\lambda = 5 - t$，$t \in [4,5]$，

则 $\sin\theta = \dfrac{t}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2(5-t)^2 + (5-t) + 2}} = \dfrac{t}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2t^2 - 21t + 57}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2 - \frac{21}{t} + \frac{57}{t^2}}} =$

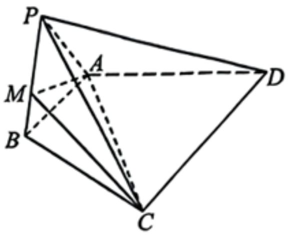
$\dfrac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{57\left(\frac{1}{t} - \frac{7}{38}\right)^2 + \frac{5}{76}}}$，

由 $t \in [4,5]$，得 $\dfrac{1}{t} \in \left[\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}\right]$，于是 $57\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{7}{38}\right)^2 + \dfrac{5}{76} \in \left[\dfrac{2}{25}, \dfrac{5}{16}\right]$，$2\sqrt{5} \cdot \sqrt{57\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{7}{38}\right)^2 + \dfrac{5}{76}} \in$ $\left[\dfrac{2\sqrt{10}}{5}, \dfrac{5}{2}\right]$，则 $\sin\theta \in \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{\sqrt{10}}{4}\right]$，

所以直线 BC_1 与平面 α 所成角的正弦值的取值范围是 $\left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{\sqrt{10}}{4}\right]$.

题目 6 (2024・重庆・模拟预测) 在如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $AB /\!/ CD$，$\angle BAD = 90^{\circ}$，$CD =$

$2AB$，$\triangle PAB$是正三角形，点M在侧棱PB上且使得$PD\parallel$平面AMC.



(1) 证明：$PM=2BM$；

(2) 若侧面$PAB\perp$底面$ABCD$，CM与底面$ABCD$所成角的正切值为$\dfrac{\sqrt{3}}{11}$，求二面角$P-AC-B$的余弦值.

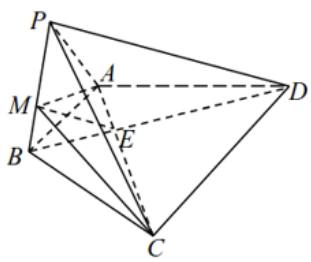
【答案】(1) 证明见解析；

(2)$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

【分析】(1) 连接BD与AC交于点E，连接EM，由已知得$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{EB}{ED}$，由线面平行的性质得$PD\parallel EM$，根据三角形相似可得$\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{BM}{PM}=\dfrac{1}{2}$，即$PM=2BM$

(2) 设AB的中点O，首先由已知得$PO\perp$底面$ABCD$，在$\triangle PAB$中过点M作$MF\parallel PO$交AB于点F，得$MF\perp$底面$ABCD$，则$\angle MCF$为CM与底面$ABCD$所成角，在底面$ABCD$上过点O作$OG\perp AC$于点G，则$\angle PGO$是二面角$P-AC-B$的平面角，根据条件求解即可

【详解】(1) 证明：连接BD与AC交于点E，连接EM，



在$\triangle EAB$与$\triangle ECD$中，$\because AB\parallel CD$，$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{EB}{ED}$，

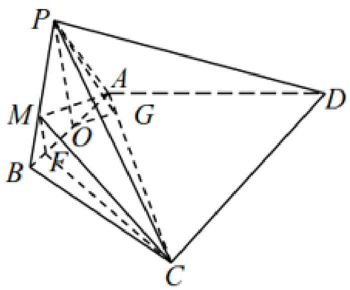
由$CD=2AB$，得$ED=2EB$，又$\because PD\parallel$平面AMC，

而平面$PBD\cap$平面$AMC=ME$，$PD\subset$平面PBD，

$\therefore PD\parallel EM$，

$\therefore$在$\triangle PBD$中，$\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{BM}{PM}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PM=2BM$；

(2) 设AB的中点O，在正$\triangle PAB$中，$PO\perp AB$，



而侧面$PAB\perp$底面$ABCD$，侧面$PAB\cap$底面$ABCD=AB$，且$PO\subset$平面PAB，

$\therefore PO\perp$底面$ABCD$，

在$\triangle PAB$中过点M作$MF\parallel PO$交AB于点F，

$\therefore MF\perp$底面$ABCD$，

$\therefore \angle MCF$为CM与底面$ABCD$所成角，

$\therefore \dfrac{MF}{CF}=\dfrac{\sqrt{3}}{11}$，设$AB=6a$，

则 $MF=\sqrt{3}a$，$\therefore CF=11a$，$BF=\dfrac{MF}{\sqrt{3}}=a$，则在直角梯形 $ABCD$ 中，$AF=5a$，

而 $CD=12a$，则 $AD=\sqrt{(11a)^2-(12a-5a)^2}=6\sqrt{2}a$，

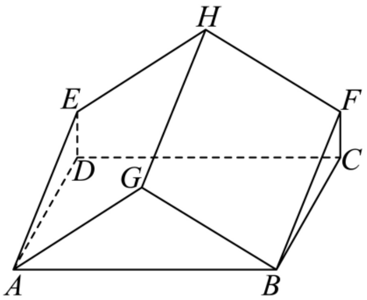
在底面 $ABCD$ 上过点 O 作 $OG\perp AC$ 于点 G，

则 $\angle PGO$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角，易得 $OA=3a$，$AC=6\sqrt{6}a$，

在梯形 $ABCD$ 中，由 $\dfrac{OA}{OG}=\dfrac{AC}{AD}\Rightarrow\dfrac{3a}{OG}=\dfrac{6\sqrt{6}a}{6\sqrt{2}a}$，得 $OG=\sqrt{3}a$，

在 $Rt\triangle POG$ 中，$PG=\sqrt{30}a$，$\therefore\cos\angle PGO=\dfrac{OG}{PG}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

题目 7 (2024·安徽·模拟预测) 2023年12月19日至20日，中央农村工作会议在北京召开，习近平主席对"三农"工作作出指示．某地区为响应习近平主席的号召，积极发展特色农业，建设蔬菜大棚．如图所示的七面体 $ABG-CDEHF$ 是一个放置在地面上的蔬菜大棚钢架，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=8m$，$AD=4m$，$ED=CF=1m$，且 ED，CF 都垂直于平面 $ABCD$，$GA=GB=5m$，$HE=HF$，平面 $ABG\perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 求点 H 到平面 $ABCD$ 的距离；

(2) 求平面 $BFHG$ 与平面 $AGHE$ 所成锐二面角的余弦值．

【答案】(1)4

(2)$\dfrac{4}{13}$

【分析】(1) 取 AB,CD 的中点 M,N，证得平面 ADE // 平面 $MNHG$，得到 AE // GH，再由平面 ABG // 平面 $CDEHG$，证得 AG // EH，得到平行四边形 $AGHE$，得到 $GH=AE$，求得 $HN=4$，结合 $HN\perp$ 平面 $ABCD$，即可求解；

(2) 以点 N 为原点，建立空间直角坐标系，分别求得平面 $BFHG$ 和平面 $AGHE$ 的法向量 $\vec{n}=(1,3,4)$ 和 $\vec{m}=(1,-3,4)$，结合向量的夹角公式，即可求解.

【详解】(1) 如图所示，取 AB,CD 的中点 M,N，连接 GM,MN,HN，

因为 $GA=GB$，可得 $GM\perp AB$，

又因为平面 $ABG\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $ABG\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$GM\subset$ 平面 ABG，

所以 $GM\perp$ 平面 $ABCD$，同理可得：$HN\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，所以 ED // HN，

又因为 $ED\not\subset$ 平面 $MNHG$，$HN\subset$ 平面 $MNHG$，所以 ED // 平面 $MNHG$，

因为 MN // AD，且 $AD\not\subset$ 平面 $MNHG$，$MN\subset$ 平面 $MNHG$，所以 AD // 平面 $MNHG$，

又因为 $AD\cap DE=D$，且 AD,$DE\subset$ 平面 ADE，所以平面 ADE // 平面 $MNHG$，

因为平面 $AEHG$ 与平面 ADE 和平面 $MNHG$ 于 AE,GH，可得 AE // GH，

又由 GM // HN，AB // CD，且 $AB\cap GM=M$ 和 $CD\cap HN=N$，

所以平面 ABG // 平面 $CDEHG$，

因为平面 $AEHG$ 与平面 ABG 和平面 $CDEHF$ 于 AG,EH，所以 AG // EH，

可得四边形 $AGHE$ 为平行四边形，所以 $GH=AE$，

因为 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，所以 $GH=\sqrt{17}$，

在直角 $\triangle AMG$，可得 $GM=\sqrt{GB^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

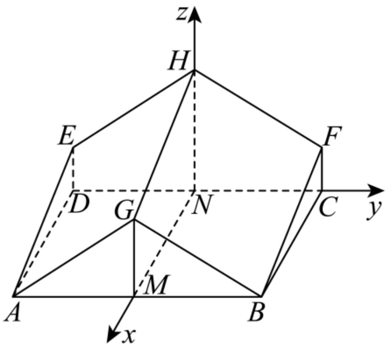
在直角梯形 $GMNH$ 中，可得 $HN=3+\sqrt{17-4^2}=4$，

因为 $HN\perp$ 平面 $ABCD$，所以点 H 到平面 $ABCD$ 的距离为 4.

(2) 解：以点 N 为原点，以 NM,NC,NH 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

如图所示，则 $E(0,-4,1),F(0,4,1),G(4,0,3),H(0,0,4)$，

可得 $\overrightarrow{HE}=(0,-4,-3),\overrightarrow{HF}=(0,4,-3),\overrightarrow{HG}=(4,0,-1)$，



设平面 $BFHG$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{HG}=4x-z=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{HF}=4y-3z=0\end{cases}$，

取 $z=4$，可得 $x=1,y=3$，所以 $\vec{n}=(1,3,4)$，

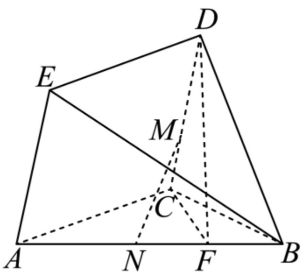
设平面 $AGHE$ 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{HG}=4a-c=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{HE}=-4b-3c=0\end{cases}$，

取 $c=4$，可得 $a=1,b=-3$，所以 $\vec{m}=(1,-3,4)$，

则 $\cos\vec{m},\vec{n}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1-9+16}{\sqrt{1+9+16}\cdot\sqrt{1+9+16}}=\frac{4}{13}$，

即平面 $BFHG$ 与平面 $AGHE$ 所成锐二面角的余弦值 $\frac{4}{13}$.

题目 8 **(2024·重庆·模拟预测)** 如图，$ACDE$ 为菱形，$AC=BC=2$，$\angle ACB=120°$，平面 $ACDE\perp$ 平面 ABC，点 F 在 AB 上，且 $AF=2FB$，M，N 分别在直线 CD，AB 上.



(1) 求证：$CF\perp$ 平面 $ACDE$；

(2) 把与两条异面直线都垂直且相交的直线叫做这两条异面直线的公垂线，若 $\angle EAC=60°$，MN 为直线 CD，AB 的公垂线，求 $\frac{AN}{AF}$ 的值；

(3) 记直线 BE 与平面 ABC 所成角为 α，若 $\tan\alpha>\frac{\sqrt{21}}{7}$，求平面 BCD 与平面 CFD 所成角余弦值的范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{AN}{AF}=\frac{9}{13}$

(3) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

【分析】(1) 先通过余弦定理及勾股定理得到 $CF\perp AC$，再根据面面垂直的性质证明；

(2) 以 C 为原点，CA 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系 $C-xyz$，利用向量的坐标运算根据 $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，列方程求解即可；

(3) 利用向量法求面面角，然后根据 $\tan\alpha > \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 列不等式求解.

【详解】(1) $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB = 12$，$AB = 2\sqrt{3}$，$AF = 2FB$，

所以 $AF = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF}^2 = \dfrac{1}{9}\overrightarrow{CA}^2 + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{CB}^2 + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{4}{3}$，

$AC^2 + CF^2 = 4 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3} = AF^2$，则 $CF \perp AC$，

又因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC，平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$，$CF \subset$ 面 ABC，

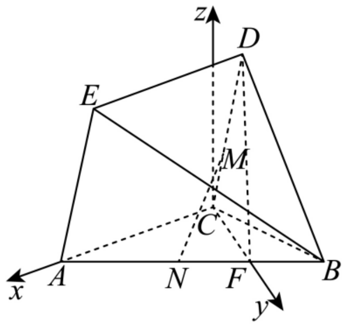
故 $CF \perp$ 平面 $ACDE$；

(2) 以 C 为原点，CA 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系 $C-xyz$，

由 $\angle EAC = 60^\circ$，可得 $\angle DCA = 120^\circ$，$DC = 2$，

所以 $C(0,0,0)$，$D(-1,0,\sqrt{3})$，$A(2,0,0)$，$F\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$

所以 $\overrightarrow{AF} = \left(-2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$，$\overrightarrow{CD} = (-1,0,\sqrt{3})$，



设 $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AF} = \left(-2\lambda,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,0\right)$，则 $N\left(2-2\lambda,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,0\right)$，

设 $\overrightarrow{CM} = \mu\overrightarrow{CD}$，则 $M(-\mu,0,\sqrt{3}\mu)$，$\overrightarrow{MN} = \left(2-2\lambda+\mu,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,-\sqrt{3}\mu\right)$，

由题知，$\begin{cases}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0\\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AF} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\lambda - 2 - \mu - 3\mu = 0\\ 4\lambda - 4 - 2\mu + \frac{4}{3}\lambda = 0\end{cases}$，

解得 $\lambda = \dfrac{9}{13}$，$\mu = -\dfrac{2}{13}$，故 $\dfrac{AN}{AF} = \dfrac{9}{13}$；

(3) $B(-1,\sqrt{3},0)$，设 $\angle EAC = \theta$，

则 $E(2-2\cos\theta,0,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{BE} = (3-2\cos\theta,-\sqrt{3},2\sin\theta)$，

可取平面 ABC 的法向量 $\vec{n} = (0,0,1)$，

则 $\sin\alpha = \cos\vec{n},\overrightarrow{BE} = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BE}\right|} = \dfrac{|2\sin\theta|}{\sqrt{(3-2\cos\theta)^2 + 3 + 4\sin^2\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{4-3\cos\theta}}$，

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{4-3\cos\theta-\sin^2\theta}}{\sqrt{4-3\cos\theta}}$，

则 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{4-3\cos\theta-\sin^2\theta}} > \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

整理得 $10\cos^2\theta - 9\cos\theta + 2 < 0$，故 $\cos\theta \in \left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CF} = \left(0,\dfrac{2}{\sqrt{3}},0\right)$，$\overrightarrow{CD} = (-2\cos\theta,0,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{CB} = (-1,\sqrt{3},0)$，

记平面 CDF 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CD} = 0\\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CF} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x\cos\theta + 2z\sin\theta = 0\\ \frac{2}{\sqrt{3}}y = 0\end{cases}$，

可得 $\overrightarrow{n_1} = (\sin\theta,0,\cos\theta)$，

记平面 CBD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (a,b,c)$，则有 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CD} = 0\\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CB} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2a\cos\theta + 2c\sin\theta = 0\\ -a + \sqrt{3}b = 0\end{cases}$，

可得 $\overrightarrow{n_2} = (\sqrt{3}\sin\theta,\sin\theta,\sqrt{3}\cos\theta)$，

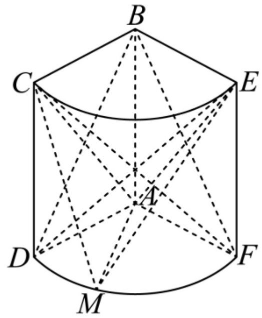
记平面 BCD 与平面 CFD 所成角为 γ，

则 $\cos\gamma = |\cos\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}| = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sin^2\theta}}$，$\cos\theta \in \left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $\sin^2\theta\in\left(\frac{3}{4},\frac{21}{25}\right)$, $\sqrt{3+\sin^2\theta}\in\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$,

故 $\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sin^2\theta}}\in\left(\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

题目 9 (2024·安徽·二模) 将正方形 $ABCD$ 绕直线 AB 逆时针旋转 90°,使得 CD 到 EF 的位置,得到如图所示的几何体.



(1) 求证:平面 $ACF\perp$ 平面 BDE;

(2) 点 M 为 $\overset{\frown}{DF}$ 上一点,若二面角 $C-AM-E$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$,求 $\angle MAD$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\angle MAD=45^\circ$

【分析】(1) 根据面面与线面垂直的性质可得 $BD\perp AF$,结合线面、面面垂直的判定定理即可证明;

(2) 建立如图空间直角坐标系,设 $\angle MAD=\alpha$, $AB=1$,利用空间向量法求出二面角 $C-AM-E$ 的余弦值,建立方程 $\frac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}=\frac{1}{3}$,结合三角恒等变换求出 α 即可.

【详解】(1) 由已知得平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$, $AF\perp AB$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$, $AF\subset$ 平面 $ABEF$,

所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$,又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,故 $BD\perp AF$,

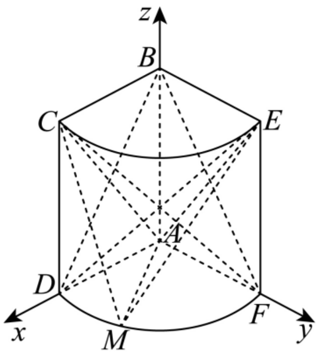
因为 $ABCD$ 是正方形,所以 $BD\perp AC$,

AC, $AF\subset$ 平面 ACF, $AC\cap AF=A$,所以 $BD\perp$ 平面 ACF,

又 $BD\subset$ 平面 BDE,所以平面 $ACF\perp$ 平面 BDE.

(2) 由 (1) 知 AD, AF, AB 两两垂直,

以 AD, AF, AB 所在直线分别为 x, y, z 轴,建立空间直角坐标系,如图.



设 $\angle MAD=\alpha$, $AB=1$,

则 $A(0,0,0)$, $M(\cos\alpha,\sin\alpha,0)$, $C(1,0,1)$, $E(0,1,1)$,

故 $\overrightarrow{AM}=(\cos\alpha,\sin\alpha,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$

设平面 AMC 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

故 $\begin{cases}x_1+z_1=0\\x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=0\end{cases}$,取 $x_1=\sin\alpha$,则 $y_1=-\cos\alpha$, $z_1=-\sin\alpha$

所以 $\vec{m}=(\sin\alpha,-\cos\alpha,-\sin\alpha)$

设平面 AME 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

故 $\begin{cases}y_2+z_2=0\\x_2\cos\alpha+y_2\sin\alpha=0\end{cases}$,取 $x_2=\sin\alpha$,则 $y_2=-\cos\alpha$, $z_2=\cos\alpha$

所以 $\vec{n}=(\sin\alpha,-\cos\alpha,\cos\alpha)$,

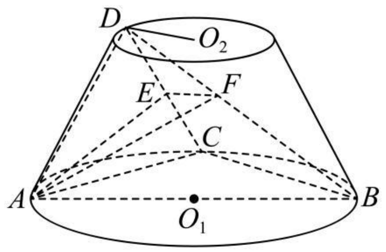
所以 $\cos\vec{m},\vec{n}=\frac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$,

由已知得 $\dfrac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{3}$,

化简得: $2\sin^2 2\alpha-9\sin 2\alpha+7=0$,解得 $\sin 2\alpha=1$ 或 $\sin 2\alpha=\dfrac{7}{2}$(舍去)

故 $\alpha=45°$,即 $\angle MAD=45°$.

题目 10 **(2024·安徽黄山·二模)** 如图,已知 AB 为圆台下底面圆 O_1 的直径,C 是圆 O_1 上异于 A,B 的点,D 是圆台上底面圆 O_2 上的点,且平面 $DAC\perp$ 平面 ABC,$DA=DC=AC=2$,$BC=4$,E 是 CD 的中点,$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$.



(1) 证明:$DO_2 /\!/ BC$;

(2) 求直线 DB 与平面 AEF 所成角的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$

【分析】(1) 取 AC 的中点 O,根据面面垂直的性质定理,可得 $DO\perp$ 平面 ABC,即可求证 $DO_2 /\!/ OO_1$,进而可证矩形,即可根据线线平行以及平行的传递性求解.

(2) 建系,利用向量法,求解法向量 $\vec{n}=\left(1,-\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$ 与方向向量 $\overrightarrow{DB}=(-1,4,-\sqrt{3})$ 的夹角,即可求解.

【详解】(1) 证明:取 AC 的中点为 O,连接 DO, OO_1, O_1O_2,

$\because DA=DC$, O 为 AC 中点, $\therefore DO\perp AC$,

又平面 $DAC\perp$ 平面 ABC,且平面 $DAC\cap$ 平面 $ABC=AC$, $DO\subset$ 平面 DAC,

$\therefore DO\perp$ 平面 ABC, $\therefore DO /\!/ O_1O_2$, $DO=O_1O_2$,故四边形 DOO_1O_2 为矩形,

$\therefore DO_2 /\!/ OO_1$,又 O, O_1 分别是 AC, AB 的中点,

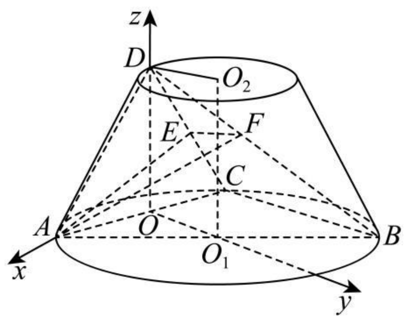
$\therefore OO_1 /\!/ BC$,

$\therefore DO_2 /\!/ BC$;

(2) $\because C$ 是圆 O_1 上异于 A, B 的点,且 AB 为圆 O_1 的直径,

$\therefore BC\perp AC$, $\therefore OO_1\perp AC$,

$\therefore$ 如图以 O 为原点建立空间直角坐标系,由条件知 $DO=\sqrt{3}$,



$\therefore A(1,0,0),B(-1,4,0),C(-1,0,0),D(0,0,\sqrt{3})$, $\therefore E\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

设 $F(x,y,z)$, $\therefore \overrightarrow{BF}=(x+1,y-4,z)$, $\overrightarrow{FD}=(-x,-y,\sqrt{3}-z)$,

由 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$,得 $F\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\therefore \overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{DB}=(-1,4,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

设平面 AEF 法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

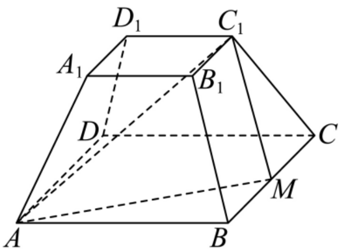
则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-\frac{4}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1+\frac{2\sqrt{3}}{3}z_1=0\end{cases}$,取 $\vec{n}=\left(1,-\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$,

设直线 BD 与平面 AEF 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DB}>|=\dfrac{6}{2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$

$\therefore$ 直线 BD 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$.

题目 11 (2024·黑龙江哈尔滨·一模) 正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面边长为 $2\sqrt{2}$，$A_1B_1=\dfrac{1}{2}AB$，M 为 BC 中点，已知点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\lambda\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AA_1}$，其中 $\lambda\in(0,1)$.



(1) 求证 $D_1P\perp AC$；

(2) 已知平面 AMC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$，当 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时，求直线 DP 与平面 AMC_1 所成角的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析

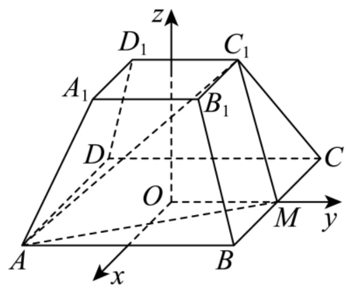
(2) $\dfrac{24\sqrt{13}}{91}$

【分析】(1) 方法一运用空间向量的线性运算，进行空间位置关系的向量证明即可.

方法二：建立空间直角坐标系，进行空间位置关系的向量证明即可.

(2) 建立空间直角坐标系，利用线面角的向量求法求解即可.

【详解】(1) 方法一：



$\because A_1B_1=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$.

$\because \overrightarrow{D_1A}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$

$\therefore \overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{2}\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD}+(\lambda-1)\overrightarrow{AA_1}$

$\therefore \overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{AC}=\left[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{2}\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD}+(\lambda-1)\overrightarrow{AA_1}\right]\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\left(\dfrac{1}{2}\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD}^2+(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+(\lambda-1)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=8(1-\lambda)+8\left(\dfrac{1}{2}\lambda-\dfrac{1}{2}\right)+4(\lambda-1)=0$.

$\therefore \overrightarrow{D_1P}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $D_1P\perp AC$.

方法二：以底面 $ABCD$ 的中心 O 为原点，以 OM 方向为 y 轴，过 O 点平行于 AD 向前方向为 x 轴，以过点 O 垂直平面 $ABCD$ 向上方向为 z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，设正四棱台的高度为 h，则有 $A(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$C(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

$D(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$A_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},h\right)$，$C_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},h\right)$，

$D_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},h\right)$，$M(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$

$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)(0,2\sqrt{2},0)+\dfrac{1}{2}\lambda(-2\sqrt{2},0,0)+\lambda\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\lambda,2\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\lambda,\lambda h\right)$

$\overrightarrow{D_1A}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-h\right)$,

$\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda+\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda+\frac{3\sqrt{2}}{2},\lambda h-h\right)$.

故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{D_1P}=0$,所以 $D_1P\perp AC$.

(2) 设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$,

设平面 AMC_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{AC_1}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},h\right)$,

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0\\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y+hz=0\end{cases}$,

令 $x=2\sqrt{2}h$,则 $\vec{m}=(2\sqrt{2}h,\sqrt{2}h,3)$.

又题意可得 $\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\frac{3}{\sqrt{8h^2+2h^2+9}}=\frac{3}{7}$,可得 $h=2$.

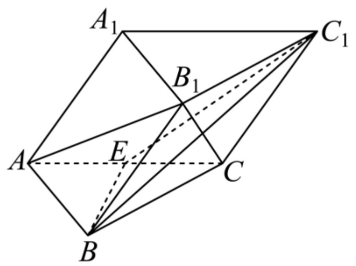
因为 $\lambda=\frac{2}{3}$,经过计算可得 $P\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$, $D_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$, $\overrightarrow{D_1P}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{4}{3}\right)$.

将 $h=2$ 代入,可得平面 AMC_1 的法向量 $\vec{m}=(4\sqrt{2},2\sqrt{2},3)$.

设直线 DP 与平面 AMC_1 所成角的为 θ

$\sin\theta=\left|\cos\overrightarrow{DP},\vec{m}\right|=\left|\frac{8+4+4}{\sqrt{2+2+\frac{16}{9}}\sqrt{32+8+9}}\right|=\frac{24\sqrt{13}}{91}$.

题目 12 **(2024·辽宁·三模)** 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 $ACC_1A_1\perp$ 底面 ABC, $AC=AA_1=2$, $AB=1$, $BC=\sqrt{3}$,点 E 为线段 AC 的中点.



(1) 求证: $AB_1 /\!/$ 平面 BEC_1;

(2) 若 $\angle A_1AC=\frac{\pi}{3}$,求二面角 $A-BE-C_1$ 的余弦值.

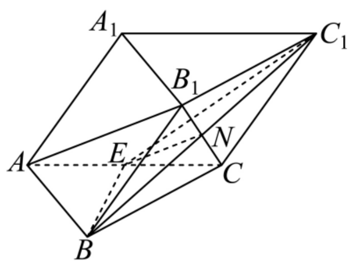
【答案】(1) 证明见详解

(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】(1) 连接 BC_1,交 B_1C 于点 N,连接 NE,利用线面平行的判定定理证明;

(2) 由已知可知, $\triangle AA_1C$ 为等边三角形,故 $A_1E\perp AC$,利用面面垂直的性质定理可证得 $A_1E\perp$ 底面 ABC,进而建立空间直角坐标系,利用向量法即可求二面角余弦值.

【详解】(1) 连接 BC_1,交 B_1C 于点 N,连接 NE,



因为侧面 BCC_1B_1 是平行四边形,

所以 N 为 B_1C 的中点,又因为点 E 为线段 AC 的中点,

所以 $NE /\!/ AB_1$,

因为 $AB_1\not\subset$ 面 BEC_1, $NE\subset$ 面 BEC_1,

所以 $AB_1 /\!/$ 面 BEC_1.

(2) 连接 A_1C, A_1E,因为 $\angle A_1AC=\frac{\pi}{3}$, $AC=AA_1=2$,

所以$\triangle AA_1C$为等边三角形，$A_1C=2$，

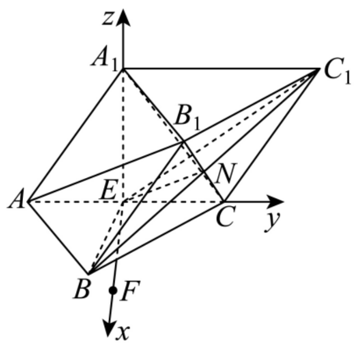
因为点E为线段AC的中点，

所以$A_1E\perp AC$，

因为侧面$ACC_1A_1\perp$底面ABC，平面$ACC_1A_1\cap$平面$ABC=AC$，$A_1E\subset$平面ACC_1A_1，

所以$A_1E\perp$底面ABC，

过点E在底面ABC内作$EF\perp AC$，如图以E为坐标原点，分布以$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA_1}$的方向为$x,y,z$轴正方向建立空间直角坐标系，



则$E(0,0,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$C_1(0,2,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,2,\sqrt{3})$，

设平面BEC_1的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC_1}=2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$y=\sqrt{3},z=-2$，

所以平面BEC_1的法向量为$\vec{m}=(1,\sqrt{3},-2)$，

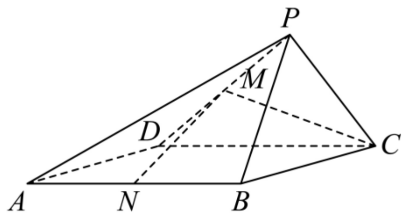
又因为平面ABE的法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，

则$\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{-2}{\sqrt{1+3+4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

经观察，二面角$A-BE-C_1$的平面角为钝角，

所以二面角$A-BE-C_1$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

题目 13 (2024·广东广州·一模) 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\triangle DCP$是等边三角形，$\angle DCB=\angle PCB=\frac{\pi}{4}$，点$M$，$N$分别为$DP$和$AB$的中点.



(1) 求证：$MN\parallel$平面PBC；

(2) 求证：平面$PBC\perp$平面$ABCD$；

(3) 求CM与平面PAD所成角的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 证明见解析；

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【分析】(1) 取PC中点E，由已知条件，结合线面平行的判断推理即得.

(2) 过P作$PQ\perp BC$于点Q，借助三角形全等，及线面垂直的判定、面面垂直的判定推理即得.

(3) 建立空间直角坐标系，利用线面角的向量求法求解即得.

【详解】(1) 取PC中点E，连接ME,BE，由M为DP中点，N为AB中点，得$ME\parallel DC,ME=\frac{1}{2}DC$，

又$BN\parallel CD,BN=\frac{1}{2}CD$，则$ME\parallel BN,ME=BN$，因此四边形$BEMN$为平行四边形，

于是$MN\parallel BE$，而$MN\not\subset$平面$PBC,BE\subset$平面PBC，

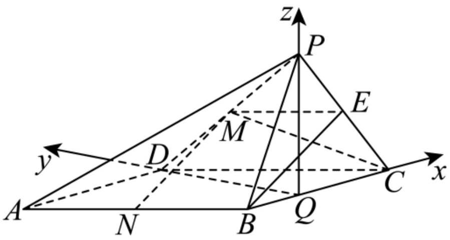
所以 $MN /\!/$ 平面 PBC.

(2) 过 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q, 连接 DQ, 由 $\angle DCB=\angle PCB=\frac{\pi}{4}$, $CD=PC$, $QC=QC$, 得 $\triangle QCD\cong\triangle QCP$,

则 $\angle DQC=\angle PQC=\frac{\pi}{2}$, 即 $DQ\perp BC$, 而 $PQ=DQ=\sqrt{2}$, $PQ^2+DQ^2=4=PD^2$,

因此 $PQ\perp DQ$, 又 $DQ\cap BC=Q$, $DQ,BC\subset$ 平面 $ABCD$, 则 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$, $PQ\subset$ 平面 PBC,

所以平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$.



(3) 由 (2) 知, 直线 QC,QD,QP 两两垂直,

以点 Q 为原点, 直线 QC,QD,QP 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

则 $C(\sqrt{2},0,0)$, $P(0,0,\sqrt{2})$, $D(0,\sqrt{2},0)$, $M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A(-2,\sqrt{2},0)$,

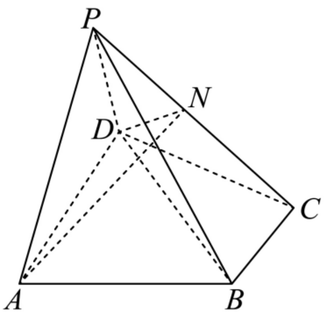
$\overrightarrow{CM}=\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{DP}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

设平面 PAD 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=2x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$, 令 $y=1$, 得 $\vec{n}=(0,1,1)$,

设 CM 与平面 PAD 所成角为 θ, $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CM},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CM}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 CM 与平面 PAD 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

题目 14 **(2024·广东梅州·二模)** 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\triangle PAD$ 为等边三角形, $AD /\!/ BC$, $AD\perp AB$, $AD=AB=2BC=2$.



(1) 求证: $AD\perp PC$;

(2) 点 N 在棱 PC 上运动, 求 $\triangle ADN$ 面积的最小值;

(3) 点 M 为 PB 的中点, 在棱 PC 上找一点 Q, 使得 $AM /\!/$ 平面 BDQ, 求 $\frac{PQ}{QC}$ 的值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

(3) 4

【分析】(1) 取 AD 的中点 H, 连接 PH, CH, 依题意可得四边形 $ABCH$ 为矩形, 即可证明 $CH\perp AD$, 再由

$PH\perp AD$,即可证明 $AD\perp$ 平面 PHC,从而得证;

(2) 连接 AC 交 BD 于点 G,连接 MC 交 BQ 于点 F,连接 FG,即可得到 $\frac{CG}{AG}=\frac{1}{2}$,再根据线面平行的性质得到 $\frac{CF}{FM}=\frac{1}{2}$,在 $\triangle PBC$ 中,过点 M 作 $MK/\!/PC$,即可得到 $\frac{MK}{CQ}=2$,最后由 $PQ=2MK$ 即可得解.

【详解】(1) 取 AD 的中点 H,连接 PH, CH,则 $AH/\!/BC$ 且 $AH=BC$,

又 $AD\perp AB$,

所以四边形 $ABCH$ 为矩形,

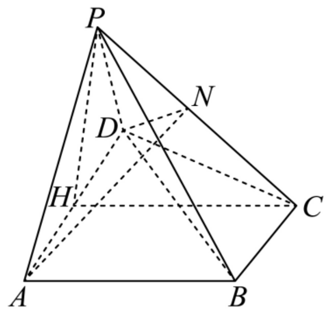
所以 $CH\perp AD$,又 $\triangle PAD$ 为等边三角形,

所以 $PH\perp AD$, $PH\cap CH=H$, $PH,CH\subset$ 平面 PHC,

所以 $AD\perp$ 平面 PHC,

又 $PC\subset$ 平面 PHC,

所以 $AD\perp PC$.



(2) 连接 HN,由 $AD\perp$ 平面 PHC,

又 $HN\subset$ 平面 PHC,

所以 $AD\perp HN$,所以 $S_{\triangle ADH}=\frac{1}{2}AD\cdot HN=HN$,

要使 $\triangle ADN$ 的面积最小,即要使 HN 最小,

当且仅当 $HN\perp PC$ 时 HN 取最小值,

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,

$PH\subset$ 平面 PAD,

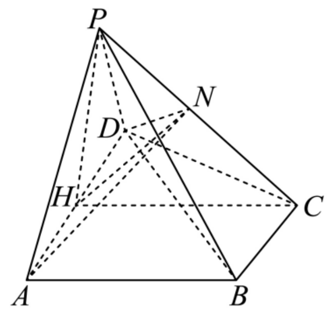
所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$,

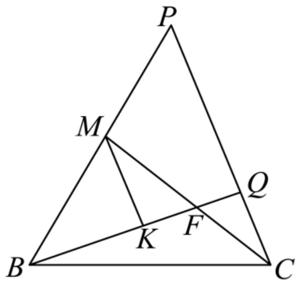
又 $HC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PH\perp HC$,

在 $Rt\triangle HPC$ 中, $CH=2$, $PH=\sqrt{3}$,所以 $PC=\sqrt{CH^2+PH^2}=\sqrt{7}$,

当 $HN\perp PC$ 时 $HN=\frac{PH\cdot CH}{PC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\triangle ADN$ 面积的最小值为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.





(3) 连接 AC 交 BD 于点 G,连接 MC 交 BQ 于点 F,连接 FG,

因为 $AD/\!/BC$ 且 $AD=2BC=2$,所以 $\triangle CGB\backsim\triangle AGD$,

所以 $\frac{CG}{AG}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$,

因为 $AM/\!/$ 平面 BDQ,又 $AM\subset$ 平面 ACM,

平面 $BDQ\cap$ 平面 $ACM=GF$,

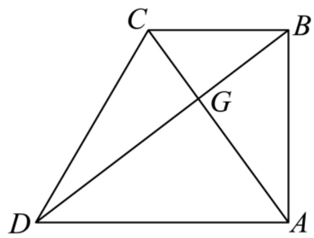
所以 $GF/\!/AM$,

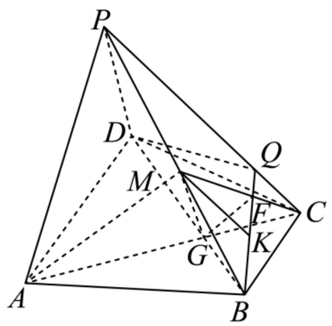
所以 $\frac{CF}{FM}=\frac{CG}{AG}=\frac{1}{2}$,

在 $\triangle PBC$ 中,过点 M 作 $MK/\!/PC$,

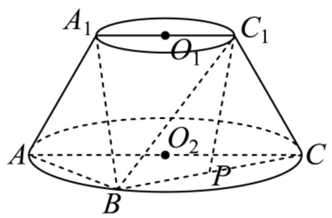
则有 $\frac{MK}{CQ}=\frac{MF}{CF}=2$,所以 $PQ=2MK$,

所以 $PQ=2MK=4CQ$,即 $\frac{PQ}{QC}=4$





题目 15 **(2024·广东广州·模拟预测)** 如图所示，圆台 O_1O_2 的轴截面 A_1ACC_1 为等腰梯形，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，B 为底面圆周上异于 A,C 的点，且 $AB=BC$，P 是线段 BC 的中点.



(1) 求证：C_1P // 平面 A_1AB.

(2) 求平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值.

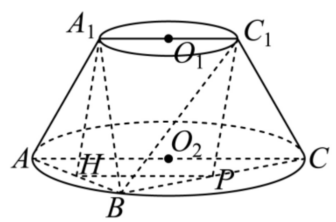
【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{1}{7}$

【分析】(1) 取 AB 的中点 H，连接 A_1H，PH，证明四边形 A_1C_1PH 为平行四边形，进而得 C_1P // A_1H，即可证明；

(2) 建立空间直角坐标系，求两平面的法向量，利用平面夹角公式求解.

【详解】(1) 取 AB 的中点 H，连接 A_1H，PH，如图所示，



因为 P 为 BC 的中点，所以 PH // AC，$PH=\frac{1}{2}AC$.

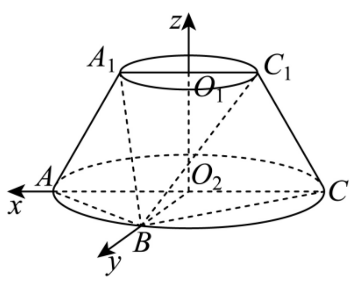
在等腰梯形 A_1ACC_1 中，A_1C_1 // AC，$A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，

所以 HP // A_1C_1，$HP=A_1C_1$，所以四边形 A_1C_1PH 为平行四边形，

所以 C_1P // A_1H，又 $A_1H\subset$ 平面 A_1AB，$C_1P\not\subset$ 平面 A_1AB，

所以 C_1P // 平面 A_1AB.

(2) 因为 $AB=BC$，故 $O_2B\perp AC$，以直线 O_2A，O_2B，O_2O_1 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，



在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，

此梯形的高为 $h=\sqrt{AA_1^2-\left(\frac{AC-A_1C_1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

因为 $A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，A_1C_1 // AC，

则 $O_2(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$A_1(1,0,\sqrt{3})$，$B(0,2,0)$，$C(-2,0,0)$，$C_1(-1,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{BC_1}=(-1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-1,2,-\sqrt{3})$.

设平面 A_1AB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\-x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，得 $\vec{m}=\left(1,1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

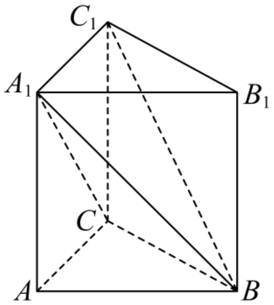
设平面 C_1CB 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}-a-2b+\sqrt{3}c=0,\\-2a-2b=0,\end{cases}$ 令 $a=\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},-1)$.

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\left|\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}\times\sqrt{7}}\right|=\dfrac{1}{7}$.

题目 16 **(2024·广东深圳·二模)** 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $BB_1C_1C\perp$ 底面 ABC，且 $AB=AC$，$A_1B=A_1C$.



(1) 证明：$AA_1\perp$ 平面 ABC；

(2) 若 $AA_1=BC=2$，$\angle BAC=90°$，求平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值.

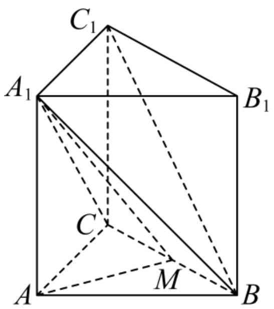
【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

【分析】(1) 取 BC 的中点 M，连结 MA、MA_1，根据等腰三角形性质和线面垂直判定定理得 $BC\perp$ 平面 A_1MA，进而由 $A_1A\,/\!/\,B_1B$ 得 $B_1B\perp BC$，再证明 $B_1B\perp$ 平面 ABC 即可得证.

(2) 建立空间直角坐标系，用向量法求解即可；也可用垂面法作出垂直于 A_1B 的垂面，从而得出二面角的平面角再进行求解即可.

【详解】(1) 取 BC 的中点 M，连结 MA、MA_1.



因为 $AB=AC$，$A_1B=A_1C$，所以 $BC\perp AM$，$BC\perp A_1M$，

由于 AM，$A_1M\subset$ 平面 A_1MA，且 $AM\cap A_1M=M$，

因此 $BC\perp$ 平面 A_1MA，