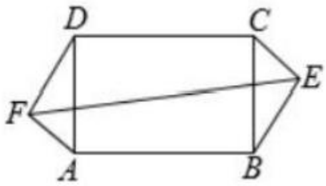
【初中数学竞赛】

专题05 几何竞赛综合-35题真题专项训练

（全国竞赛专用）

一、单选题

1. (2015·全国·九年级竞赛)矩形ABCD中，$AD=5,AB=10$，E、F分别为矩形外的两点，$BE=DF=4,AF=CE=3$，则$EF=($　　$)$



A.$4\sqrt{15}$　　　　B.15　　　　C.$\sqrt{221}$　　　　D.$10\sqrt{2}$

【答案】C

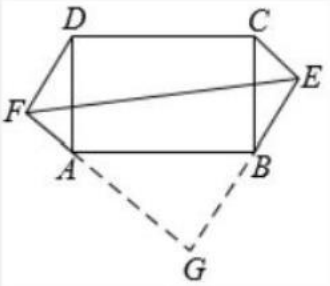
【详解】易知$\angle AFD=\angle BEC=90°$，$\triangle BEC\cong\triangle DFA$，$\therefore\angle DAF=\angle BCE$.

延长FA,EB交于点G.

$\because\angle GAB=90°-\angle DAF=\angle ADF$，$\angle GBA=90°-\angle CBE=\angle BCE=\angle DAF$，

$\therefore\triangle BGA\sim\triangle AFD$，且$\angle AGB=90°$，$\therefore AG=8,BG=6$，

$\therefore GF=11,GE=10$，$\therefore EF=\sqrt{GE^2+GF^2}=\sqrt{221}$.

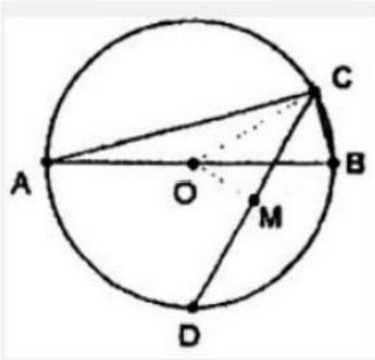


2. (2013·全国·九年级竞赛)已知AB是圆O的直径，C为圆O上一点，$\angle CAB=15°$，$\angle ACB$的平分线交圆O于点D，若$CD=\sqrt{3}$，则$AB=($$)$

A.2　　　　B.$\sqrt{6}$　　　　C.$2\sqrt{2}$　　　　D.3

【答案】A

【详解】连接OC，作$OM\perp CD$于点M，则可得$\angle OCM=45°-15°=30°$，所以$CM=\frac{\sqrt{3}}{2}OC$，所以$AB=2OC=\frac{4}{\sqrt{3}}CM=\frac{2}{\sqrt{3}}CD=2$.



3. (2013·全国·九年级竞赛)矩形ABCD 的边长AD=3, AB=2, E 为AB的中点，F在线段BC上，且BF:FC=1:2, AF 分别与DE, DB 交于点M, N, 则MN=( )

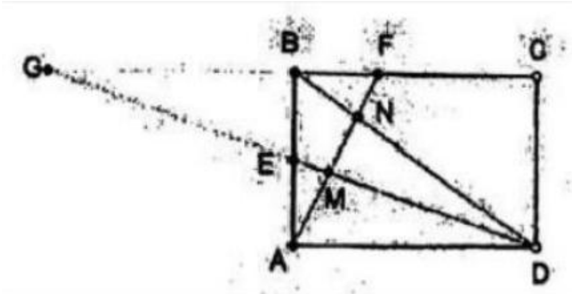
A. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$　B. $\frac{5\sqrt{5}}{14}$　C. $\frac{9\sqrt{5}}{28}$　D. $\frac{11\sqrt{5}}{28}$

【答案】C

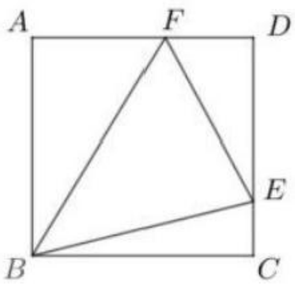
【详解】易知△BNF-△DNA，所以 $\frac{FN}{AN}=\frac{BN}{ND}=\frac{BF}{AD}=\frac{1}{3}$，所以 $FN=\frac{1}{3}AN=\frac{1}{4}AF$.

延长DE, CB 交于点G，则 △AMD-△FMG，所以 $\frac{AM}{FM}=\frac{AD}{FG}=\frac{3}{4}$，所以 $AM=\frac{3}{4}FM=\frac{3}{7}AF$.

因此 $MN=AP-AM-FN=AF-\frac{3}{7}AF-\frac{1}{4}AF=\frac{9}{28}AF=\frac{9}{28}\sqrt{AB^2+BF^2}=\frac{9\sqrt{5}}{28}$.



4. (2018·全国·九年级竞赛)已知点E, F 分别在正方形ABCD 的边CD, AD 上，$CD=4CE$, $\angle EFB=\angle FBC$, 则$\tan\angle ABF$=( )



A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【详解】不妨设CD=4,则CE=1,DE=3.设DF=x, 则AF=4-x, EF=$\sqrt{x^2+9}$.

作$BH\perp EF$于点H. 因为$\angle EFB=\angle FBC=\angle AFB$, $\angle BAF=90°=\angle BHF$, BF公共,

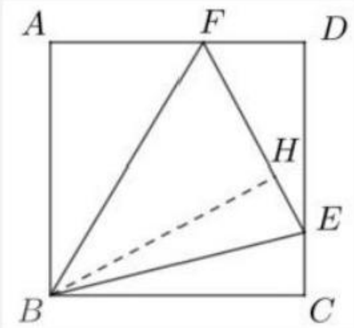
所以△BAF=△BHF，　所以BH=BA=4.

由S四边形ABCD=S△ABF+S△BEF+S△DEF+S△BCE得

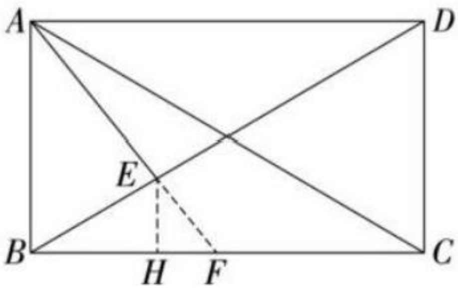
$4^2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4-x)+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1$，

解得 $x=\frac{8}{5}$.

所以 $AF=4-x=\frac{12}{5}$，　$\tan\angle ABF=\frac{AF}{AB}=\frac{3}{5}$.



5. (2018 • 全国 • 九年级竞赛) 如图，在矩形ABCD中，∠BAD 的平分线交BD于点E, AB=1, ∠CAE=15°,　则 BE=()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.√Z-1　　D.√3-1

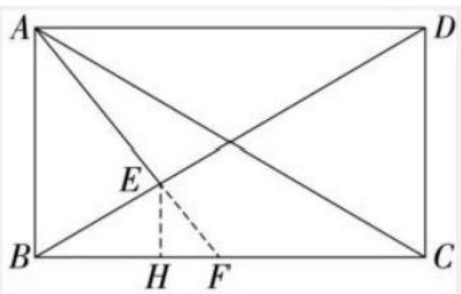
【答案】D

【详解】延长AE 交BC 于 点F,　过点E 作BC 的垂线，垂足为H.

由已知得∠BAF=∠FAD=∠AFB=∠HEF=45°,BF=AB=1, ∠EBH=∠ACB=30°.

设 BE=x,　则 $HF=HE=\frac{x}{2}$，$BH=\frac{\sqrt{3}x}{2}$.

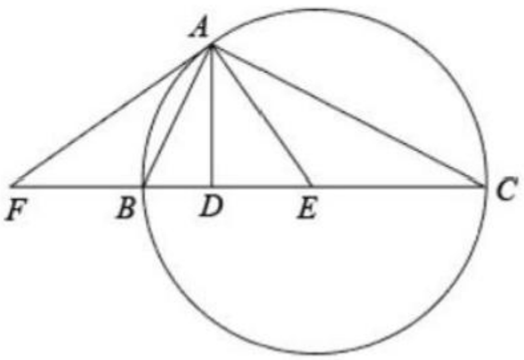
因为BF=BH+HF，所以 $1=\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{x}{2}$，解得x= √3−1. 所以BE= √3−1.



6. (2017 • 全国 • 九年级竞赛) 设A是以BC 为直径的圆上的一点， AD⊥BC 于点D,　点 E

在线段 DC 上，点F 在CB 延长线上，满足∠BAF=∠CAE. 已 知BC=15,BF=6,

BD=3, 则AE=()



A.$4\sqrt{3}$

B.$2\sqrt{13}$

C.$2\sqrt{14}$

D.$2\sqrt{15}$

【答案】B

【详解】如图，因为∠BAF=∠CAE, 所以∠BAF+∠BAE=∠CAE+∠BAE, 即

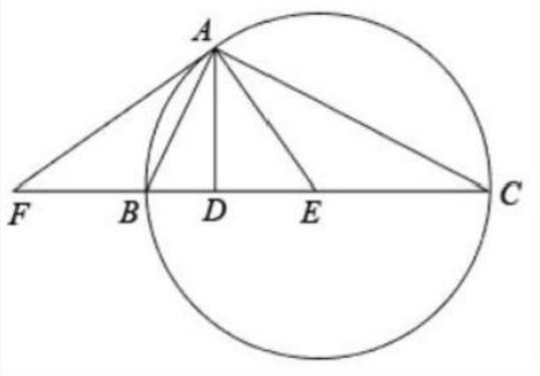
∠FAE=∠CAE=90°.

又因为AD⊥BC, 故$AD^2=DE\cdot DF=DB\cdot DC$.

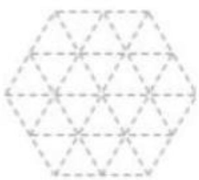
而DF=BF+BD=6+3=9,DC=BC-BD=15-3=12,

所以$AD^2=DE\cdot 9=3.12$, 所 以AD=6,DE=4.

从而AE= $\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.



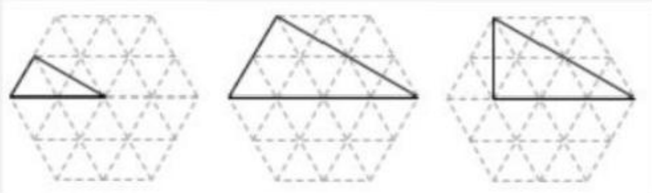
7.(2021·全国·九年级竞赛)如图，已知$_2$DEF 的边长分别为1, $\sqrt{3}$, 2, 正六边形网格由24个边长为2的正三角形组成，以这些正三角形的顶点画ABC, 使得△ABC∽△DEF, 相似比为$\frac{AB}{DE}=k$，那么 k的不同值共有( ) 个 .



A.1　　　　　　B.2　　　　　　C.3　　　　　　D.4

【答案】C

【详解】作图知与。DEF　相似的三角形，而相似比不同的三角形只有如图所示的三种，故选 C.



二、填空题

8.(2016・全国・九年级竞赛)已知ABC 的最大边BC 上的高线AD 和中线AM 恰好把∠BAC 三等分， AD=√3,　则AM= ________

【答案】2

【详解】依题意得∠BAD=∠DAM=∠MAC, ∠ADB=∠ADC=90°,　　故∠ABC≠∠ACB.

(1)若∠ABC>∠ACB时，如答案图1所示，△ADM=△ADB,, $\therefore BD=DM=\frac{1}{2}CM$，

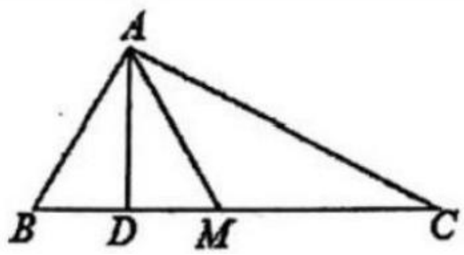
又AM 平分∠DAC, ∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{DM}{CM}=\frac{1}{2}$　在RfVDAC 中，即 $\cos\angle DAC=\frac{1}{2}$，

∴∠DAC=60°,　从而∠BAC=90°,∠ACD=30°.

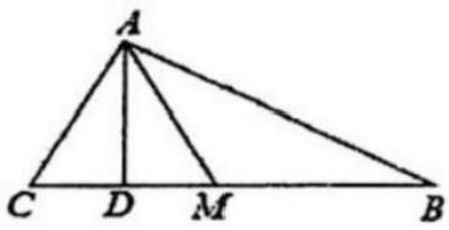
在RADC 中，CD=AD·tan∠DAC=√3·tan60°=3,DM=1.

在Rt△ADM中，$AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=2$.

(2)若?ABC?ACB　时，如答案图2所示.同理可得AM=2.　综上所述，　AM=2.



(第1题答案图1)



(第1题答案图2)

9.(2016・全国・九年级竞赛)在四边形ABCD　中　，BC//AD,CA　平分∠BCD,O　为对角线的交点，　CD=AO,BC=OD,　　则∠ABC= ________.

【答案】126°

【详解】设∠OCD=a,∠ADO=β,

∵CA 平分∠BCD,∴∠OCD=∠OCB=a,

∵$BC//AD$,

∴$\angle ADO=\angle OBC=\beta$, $\angle DAO=\angle OCB=a$,

∴$\angle OCD=\angle DAO=a$, ∴$AD=CD$, ∵$CD=AO$, ∴$AD=AO$,

∴$\angle ADO=\angle AOD=\angle BOC=\angle OBC=\beta$, ∴$OC=BC$,

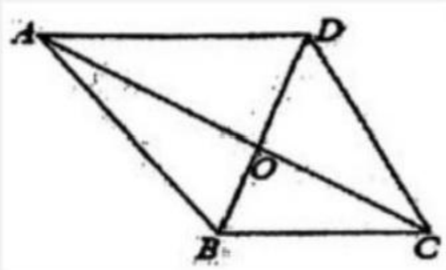
∵$BC=OD$, ∴$OC=OD$, ∴$\angle ODC=\angle OCD=a$,

∵$\angle BOC=\angle ODC+\angle OCD$, $\angle BOC+\angle OBC+\angle OCB=180°$,

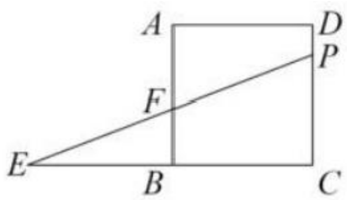
∴$\beta=2a, a+2\beta=180°$,　　　解得 $\alpha=36°$，$\beta=72°$，∴$\angle DBC=\angle BCD=72°$,

∴$BD=CD=AD$,.　∴ $\angle ABD=\angle BAD=\dfrac{180°-\beta}{2}=54°$，

故$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=126°$.



10.(2021-全国·九年级竞赛)如图所示，正方形ABCD 的边长为10cm, 点 E 在边CB的延长线上且EB=10cm, 点 P 在边CD上运动， EP 与 AB的交点为F. 设DP=xcm, △EFB 与四边形AFPD 的面积和为ycm², 那么y 与 x 之间的函数关系式是__________



【答案】y=5x+50(0<x<10)

【详解】解由DP=x 得PC=10-x.

又$\dfrac{BF}{PC}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{1}{2}$，即 $BF=\dfrac{1}{2}(10-x), AF=10-BF=\dfrac{1}{2}(10+x)$，

所以y=S +S 四边形AFPH

$$=\frac{1}{2}\times BE\times BF+\frac{1}{2}(AF+DP)\times AD$$

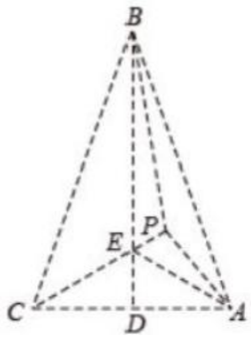
$$=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{1}{2}(10-x)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(10+x)+x\right]\times 10$$

=5x+50(0<x<10).

故应填y=5x+50(0<x<10).

11.(2014·全国·九年级竞赛)已 知P 为等腰。ABC 内一点，AB=BC,∠BPC=108°,D

为AC的中点， BD与PC交于点E， 如果点P为 。ABE的内心(三角形的三条内角平分线的交点)，则∠PAC= ______



【答案】48°

【详解】*由题意可得∠PEA=∠PEB=∠CED=∠AED,*

而∠PEA+∠PEB+∠AED=180°

所以∠PEA=∠PEB=∠CED=∠AED=60°

从而可得∠PCA=30°

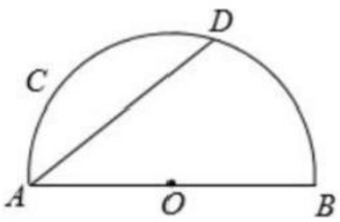
又∠BPC=108°， 所以∠PBE=12°， 从而∠ABD=24°.

所以∠BAD=90°-24°=66°,

$\angle PAE=\frac{1}{2}(\angle BAD-\angle CAE)=\frac{1}{2}(66^\circ-30^\circ)=18^\circ$，

所以∠PAC=∠PAE+∠CAE=18°+30°=48°.

12. (2015·全国·九年级竞赛)C、D两点在以AB为直径的半圆周上，AD平分∠BAC，AB=20,AD=4√15， 则AC的长为__________



【答案】4

【详解】连接OD,OC， 作DE⊥AB于E,OF⊥AC 于F.

∵AD平分∠BAC,∴∠DOB=2∠BAD=∠OAC,

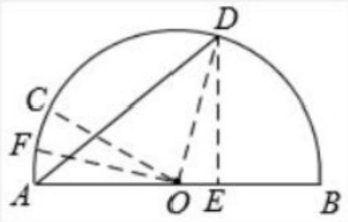
又OA=OD,∴△AOF=△ODE,∴OE=AF,∴AC=2OF=2OE.

设AC=2x， 则OE=AF=x， 在Rt△ODE中，由勾股定理得

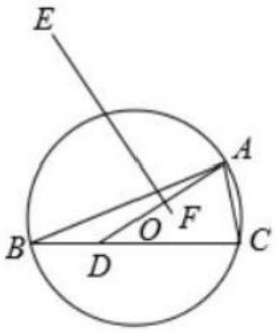
$DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{100-x^2}$.

在Rt△ADE中，$AD^2=DE^2+AE^2$,即$(4\sqrt{15})^2=(100-x^2)+(10+x)^2$,解得x=2.

∴AC=2x=4.



13.(2015·全国·九年级竞赛)已知锐角ABC 的外心为0, AO 交BC 于D,E、F 分别为△ABD、 ACD 的外心，若AB>AC,EF=BC, 则∠C-∠B= __________



【答案】60°

【详解】作EM⊥BC 于点M, FN⊥BC 于点N, FP⊥EM 于点P.

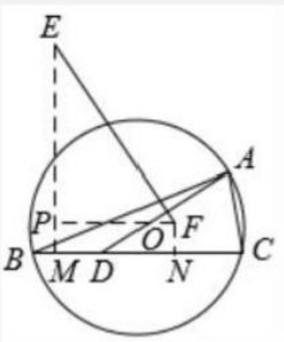
∵E、F 分别为△ABD、AACD 的外心，∴M、N 分别为BD 、CD 的中点. 又EF=BC,

$\therefore PF=MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}EF$，∴∠PEF=30°.

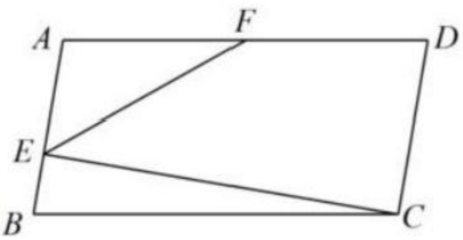
又EFLAD,EM⊥BC, ∴∠ADC=∠PEF=30°.

又 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+\frac{1}{2}(180^{\circ}-2\angle C)=90^{\circ}+\angle B-\angle C$，

∴∠C-∠B=90°-∠ADC=60°.



14.(2018·全国·九年级竞赛)如图，在平行四边形ABCD 中，BC=2AB, CE⊥AB 于E, F 为AD 的中点，若∠AEF=48°, 则∠B= ______



【答案】84°

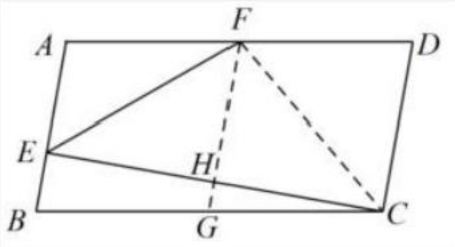
【详解】设BC 的中点为G, 连 接FG 交 CE 于 H, 由题设条件知FGCD 为菱形.

由AB//FG //DC 及 F 为 AD 的中点，知H 为 CE 的中点.

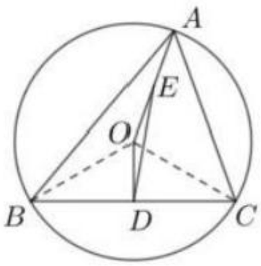
又CE⊥AB, 所 以CE⊥FG, 所以FH 垂直平分CE,

故∠DFC=∠GFC=∠EFG=∠AEF=48°.

所以∠B=∠FGC=180º-2×48°=84°.



15.(2017·全国·九年级竞赛)设O 是锐角三角形ABC 的 外 心，D,E 分别为线段BC, *OA的中点， ∠ACB=7ZOED, ∠ABC=5ZOED, 则∠OED=* __________



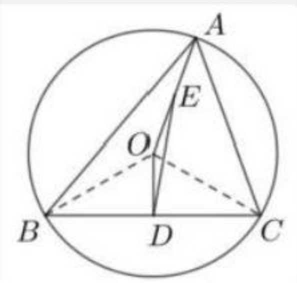
【答案】 10

【详解】如图，设∠OED=x, 则 ∠ABC=5x,∠ACB=7x,

∠DOC=∠BAC=180º-12x,∠AOD=10x, 所以∠AOD=180º-2x,

∠ODE=180º-x-(180º-2x)=x，所以 $OD=OE=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OC$，

所以∠DOC=60°, 从而可得x=10°.



16.(2021全国·九年级竞赛)某广场地面铺满了边长为36cm 的正六边形地砖，现向上抛掷半径为6 √3cm的圆碟，圆碟落地后与地面不相交的概率大约是__________

【答案】 $\frac{4}{9}$

【详解】解要使圆碟与地砖的边缘不相交的条件是落地后圆碟的中心到正六边形地砖

ABCDEF的任何一边的距离不小于圆的半径6√3cm，也就是圆碟的中心必落在与地砖ABCDEF同中心且边与地砖边彼此平行、距离为6√3的小正六边形$ABCD_1EF$内（图

6-1）.

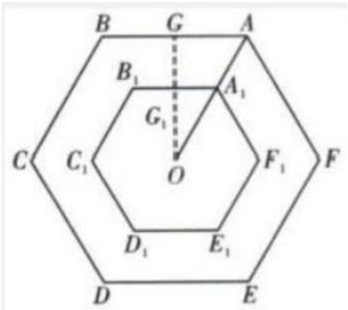


图 6 - 1

作OG⊥AB 于G， 交AB 于G;且GG=6√3cm， 所以

$OG=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 36=18\sqrt{3}$，$OA_1=\frac{2}{\sqrt{3}}OG_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\times 12\sqrt{3}=24$,OG=0G-CG=18√3-6√3=12√3.

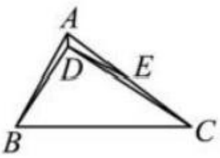
而$OG_1=\frac{\sqrt{3}}{2}OA_1$，所 以　　，故AB=OA=24.

设正六边形ABCDEF和ABC_1DE_1F 的面积分别为S 和S_1， 则所求概率为 $p=\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}=\frac{24^2}{36^2}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$

故应填 $\frac{4}{9}$

17.（2018-全国•九年级竞赛）已知D 是 。ABC 内 一 点，E 是AC 的中点，AB=6,BC=10,

∠BAD=ZBCD,　ZEDC=ZABD,　则DE ______________



【答案】4

【分析】延长CD至F， 使 DF=DC， 则有A,F,B,D 四点共圆，得到△BCF 是等腰三角形，利用三线合一可得∠FAB=90°，进而用勾股定理求出AF=8， 再利用中位线性质求出DE=4

【详解】延长CD 至 F， 使DF=DC， 则 DE//AF 且 $DE=\frac{1}{2}AF$，

∴*∠AFD=∠EDC=∠ABD,*

∴A, F, B, D 四点共圆，

∴*∠BFD=∠BAD=∠BCD,*

∴*BF=BC=10,*

∴*BD⊥FC,*

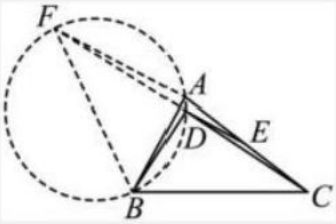
∴∠FAB=∠FDB=90°.

又AB=6

∴AF=√1O²-6²=8,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AF=4$.

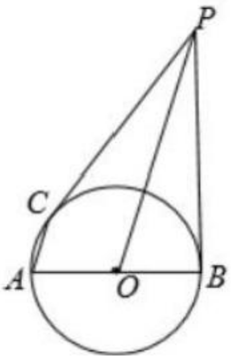
故答案为：4



【点睛】本题考查了三角形中位线定理，四点共圆，圆周角定理，等腰三角形的判定和性质，解题的关键是能够构建四点共圆.

三、解答题

18.(2013·全国·九年级竞赛)已知点C在以AB为直径的圆O上，过点B、C作圆O的切线，交于点P，连AC，若$OP=\frac{9}{2}AC$，求$\frac{PB}{AC}$的值.



【答案】$\frac{PB}{AC}=3\sqrt{2}$

【详解】解：连OC，因为PC,PB为圆O的切线，所以∠POC=∠POB.

又因为OA=OC，所以∠OCA=∠OAC.

又因为∠COB=∠OCA+∠OAC, 所以2∠POB=2∠OAC，所以∠POB=∠OAC，所以OP//AC.

又∠POB=∠OAC，所以△BAC=△POB，所以$\frac{AC}{OB}=\frac{AB}{OP}$.

又$OP=\frac{9}{2}AC$，AB=2r,OB=r(r 为圆O的半径)，代入可求得

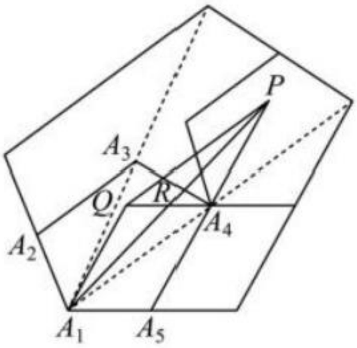
or-3r, $AC=\frac{2}{3}r$

在Ri_2POB中，由勾股定理可求得PB= $\sqrt{0P^2-0B^2}=2\sqrt{Zr}$,

所以 $\frac{PB}{AC}=\frac{2\sqrt{2}r}{\frac{2}{3}r}=3\sqrt{2}$

19.(2021·全国·九年级竞赛)设M_1 是凸五边形AAA_2A_1A, 将 M_1 沿 AA 方向平移，使 A移到A,得到凸五边形M,(i=2,3,4,5). 证明： M,M_2,M_3,M_4,M_5 中至少有两个图形，

它们有公共内点.



【答案】见解析

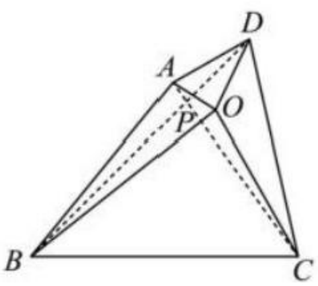
【详解】证明如图，以A,为位似中心，以2:1为相似比作M_1 的位似图形M, 则 M 仍为凸五边形且M_1 在 M 内. 下面我们证明M_2,M_2,M,M_3 都在M 内，例如先证M, 在M 内. 设P 是M_4 内任意一点，它是M_1 内的点Q经过平移得到的，于是QPLAA, 故 AA,PQ 为平行四边形，又R 是 。AA_1PQ 的两条对角线的交点，因Q 和A,属于M_1, 且M_1 是凸五边形，故R 属于M, 而 AR =RP,AP:AR =2:1, 故 P 属于M. 又 P 是M, 内任意一点，所以M_4 包含在M 之内，同理M_2,M_3,Ms 都包含在M 内，设M_1,M_2,M,,M_4,Ms 及

M的面积分别为S;,S_2,S_2,S_4,S_5 及 S, 则$S_1+S_2+S_3+S_4+S_3=5S_1>2^2\cdot S_1=S$.

于是，由图形重叠原理知， M M M M M 中至少有两个图形，它们有公共内点

20.(2017·全国·九年级竞赛)如图，0 为四边形ABCD 内一点，∠0AD=∠0CB,0A⊥0D,

$OB\perp OC$, 求证$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.



【答案】证明见解析