专题 9.9　四边形中的最值问题专项训练（30 道）

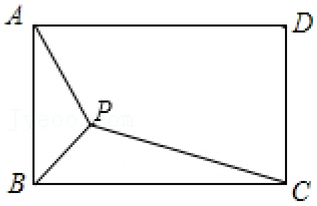
【苏科版】

考卷信息：

本套训练卷共 30 题，选择 10 题，填空 10 题，解答 10 题，题型针对性较高，覆盖面广，选题有深度，可强化学生对四边形中最值问题模型的记忆与理解！

一．选择题（共 10 小题）

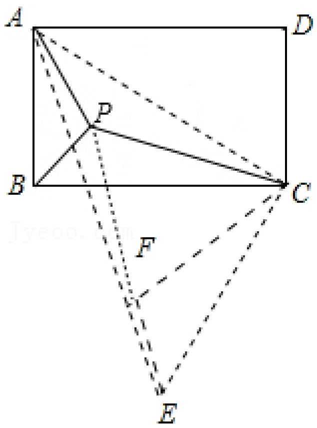
1．（2022 春•重庆期末）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=6$，P 为矩形内一点，连接 PA，PB，PC，则 $PA+PB+PC$ 的最小值是（　　）



A．$4\sqrt{3}+3$　　B．$2\sqrt{21}$　　C．$2\sqrt{3}+6$　　D．$4\sqrt{5}$

【分析】将△BPC 绕点 C 逆时针旋转 60°，得到△EFC，连接 PF、AE、AC，则 AE 的长即为所求．

【解答】解：将△BPC 绕点 C 逆时针旋转 60°，得到△EFC，连接 PF、AE、AC，则 AE 的长即为所求．



由旋转的性质可知：△PFC 是等边三角形，

∴$PC=PF$，

∵$PB=EF$，

∴$PA+PB+PC=PA+PF+EF$，

∴当 A、P、F、E 共线时，$PA+PB+PC$ 的值最小，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴∠ABC=90°，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{3}$，

∴AC=2AB，

∴∠ACB=30°，AC=2AB=4$\sqrt{3}$，

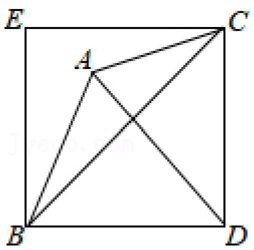
∵∠BCE=60°，

∴∠ACE=90°，

∴$AE=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{21}$，

故选：B．

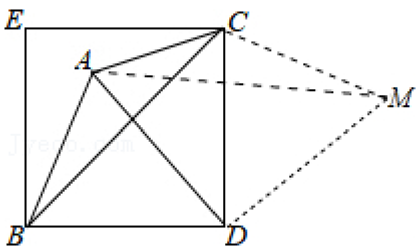
2．（2022•灞桥区校级模拟）如图，平面内三点 A、B、C，AB=4，AC=3，以 BC 为对角线作正方形 $BDCE$，连接 AD，则 AD 的最大值是（　　）



A．5　　B．7　　C．$7\sqrt{2}$　　D．$\frac{7}{2}\sqrt{2}$

【分析】如图将△BDA 绕点 D 顺时针旋转 90°得到△CDM．由旋转不变性可知：AB=CM=4，DA=DM．∠ADM=90°，推出△ADM 是等腰直角三角形，推出 $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AM$，推出当 AM 的值最大时，AD 的值最大，利用三角形的三边关系求出 AM 的最大值即可解决问题；

【解答】解：如图将△BDA 绕点 D 顺时针旋转 90°得到△CDM．



由旋转不变性可知：AB=CM=4，DA=DM．∠ADM=90°，

∴△ADM 是等腰直角三角形，

∴$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AM$，

∴当 AM 的值最大时，AD 的值最大，

∵AM≤AC+CM，

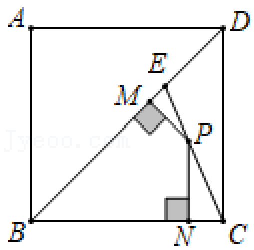
∴$AM \leqslant 7$，

∴AM 的最大值为 7，

∴AD 的最大值为$\frac{7\sqrt{2}}{2}$，

故选：D.

3．（2022 春•中山市期末）如图，在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中，E 是对角线 BD 上一点，且 $BE=BC$，点 P 是 CE 上一动点，则点 P 到边 BD，BC 的距离之和 $PM+PN$ 的值（　　）



A．有最大值 a

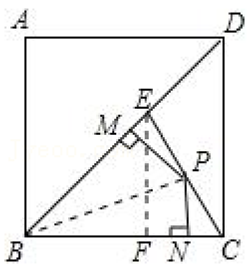
B．有最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

C．是定值 a

D．是定值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

【分析】连接 BP，作 $EF\perp BC$ 于点 F，由正方形的性质可知△BEF 为等腰直角三角形，$BE=a$，可求 EF，利用面积法得 $S_{\triangle BPE}+S_{\triangle BPC}=S_{\triangle BEC}$，将面积公式代入即可．

【解答】解：如图，连接 BP，作 $EF\perp BC$ 于点 F，则$\angle EFB=90°$，



∵正方形的性质可知$\angle EBF=45°$，

∴△BEF 为等腰直角三角形，

∵正方形的边长为 a，

∴$BE=BC=a$，

∴$BF=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

∵$PM\perp BD$，$PN\perp BC$，

∴$S_{\triangle BPE}+S_{\triangle BPC}=S_{\triangle BEC}$，

∴$\frac{1}{2}BE\times PM+\frac{1}{2}BC\times PN=\frac{1}{2}BC\times EF$，

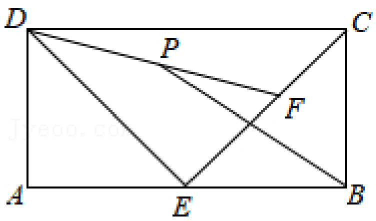
∵$BE=BC$，

∴$PM+PN=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

则点 P 到边 BD，BC 的距离之和 $PM+PN$ 的值是定值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

故选：D.

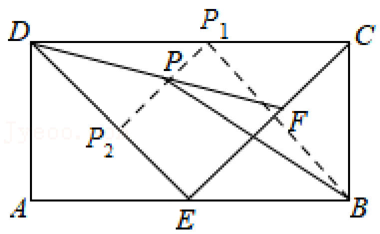
4. （2022春•三门峡期末）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 为 AB 的中点，F 为 EC 上一动点，P 为 DF 中点，连接 PB，则 PB 的最小值是（　　）



A．2　　B．4　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

【分析】根据中位线定理可得出点点 P 的运动轨迹是线段 P_1P_2，再根据垂线段最短可得当 $BP\perp P_1P_2$ 时，PB 取得最小值；由矩形的性质以及已知的数据即可知 $BP_1\perp P_1P_2$，故 BP 的最小值为 BP_1 的长，由勾股定理求解即可.

【解答】解：如图：



当点 F 与点 C 重合时，点 P 在 P_1 处，$CP_1=DP_1$，

当点 F 与点 E 重合时，点 P 在 P_2 处，$EP_2=DP_2$，

∴$P_1P_2\parallel CE$ 且 $P_1P_2=\frac{1}{2}CE$.

当点 F 在 EC 上除点 C、E 的位置处时，有 $DP=FP$.

由中位线定理可知：$P_1P\parallel CE$ 且 $P_1P=\frac{1}{2}CF$.

∴点 P 的运动轨迹是线段 P_1P_2，

∴当 $BP\perp P_1P_2$ 时，PB 取得最小值.

∵矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 为 AB 的中点，

∴△CBE、△ADE、△BCP_1 为等腰直角三角形，$CP_1=1$.

∴∠ADE＝∠CDE＝∠CP_1B＝45°，∠DEC＝90°．

∴∠DP_2P_1＝90°．

∴∠DP_1P_2＝45°．

∴∠P_2P_1B＝90°，即 $BP_1 \perp P_1P_2$，

∴BP 的最小值为 BP_1 的长．

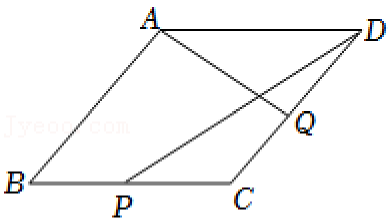
在等腰直角 BCP_1 中，CP_1＝BC＝1．

∴$BP_1=\sqrt{2}$．

∴PB 的最小值是$\sqrt{2}$．

故选：C．

5．（2022春•滨湖区期末）如图，已知菱形 $ABCD$ 的面积为 20，边长为 5，点 P、Q 分别是边 BC、CD 上的动点，且 PC＝CQ，连接 PD、AQ，则 $PD+AQ$ 的最小值为（　　）



A．$4\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{89}$　　C．10　　D．$7\sqrt{2}$

【分析】过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，延长 AM 到点 A'，使 $A'M$＝AM，根据菱形的性质和勾股定理可得 BM＝3，以点 B 为原点，BC 为 x 轴，垂直于 BC 方向为 y 轴，建立平面直角坐标系，可得 B（0，0），A（3，4），C（5，0），D（8，4），A'（3，－4），然后证明△ABP≌△ADQ（SAS），可得 AP＝AQ＝$A'P$，连接 $A'D$，AP，$A'P$，由 $A'P+PD$＞$A'D$，可得 A'，P，D 三点共线时，$PD+A'P$ 取最小值，所以 $PD+AQ$ 的最小值＝$PD+A'P$ 的最小值＝$A'D$，利用勾股定理即可解决问题．

【解答】解：如图，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，延长 AM 到点 A'，使 $A'M$＝AM，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴AB＝BC＝AD＝5，∠ABC＝∠ADC，

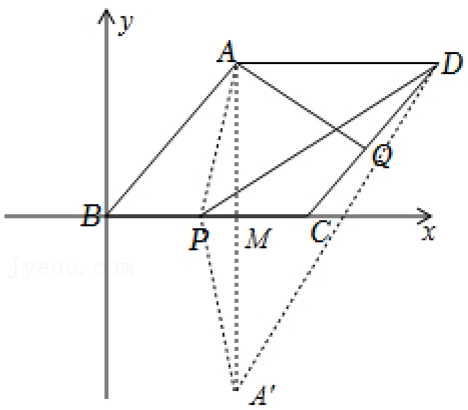
∵菱形 $ABCD$ 的面积为 20，边长为 5，

∴AM＝4，

在 Rt△ABM 中，根据勾股定理得：

$BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=3$，

以点 B 为原点，BC 为 x 轴，垂直于 BC 方向为 y 轴，建立平面直角坐标系，



∴B（0，0），A（3，4），C（5，0），D（8，4），A'（3，﹣4），

∵$PC=CQ$，$BC=CD$，

∴$BP=DQ$，

在△ABP和△ADQ中，

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle ABC=\angle ADC,\\ BP=DQ\end{cases}$$

∴△ABP≌△ADQ（SAS），

∴$AP=AQ=A'P$，

连接$A'D$，AP，$A'P$，

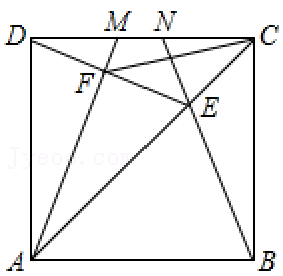
∵$A'P+PD>A'D$，

∴A'，P，D三点共线时，$PD+A'P$取最小值，

∴$PD+AQ$的最小值$=PD+A'P$的最小值$=A'D=\sqrt{(8-3)^2+(4+4)^2}=\sqrt{89}$．

故选：B．

6．（2022•泰山区一模）如图，M、N是正方形$ABCD$的边CD上的两个动点，满足$AM=BN$，连接AC交BN于点E，连接DE交AM于点F，连接CF，若正方形的边长为2，则线段CF的最小值是（　　）



A．2　　B．1　　C．$\sqrt{5}-1$　　D．$\sqrt{5}-2$

【分析】根据正方形的性质可得 $AD=BC=CD$，$\angle ADC=\angle BCD$，$\angle DCE=\angle BCE$，然后利用"HL"证明 Rt△ADM 和 Rt△BCN 全等，根据全等三角形对应角相等可得$\angle 1=\angle 2$，利用"SAS"证明△DCE 和△BCE 全等，根据全等三角形对应角相等可得$\angle 2=\angle 3$，从而得到$\angle 1=\angle 3$，然后求出$\angle AFD=90°$，取 AD 的中点 O，连接 OF、OC，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $OF=\frac{1}{2}AD=1$，利用勾股定理列式求出 OC，然后根据三角形的三边关系可知当 O、F、C 三点共线时，CF 的长度最小.

【解答】解：在正方形 $ABCD$ 中，$AD=BC=CD$，$\angle ADC=\angle BCD$，$\angle DCE=\angle BCE$，

在 Rt△ADM 和 Rt△BCN 中，

$\begin{cases}AD=BC\\AM=BN\end{cases}$，

∴Rt△ADM≌Rt△BCN（HL），

∴$\angle 1=\angle 2$，

在△DCE 和△BCE 中，

$\begin{cases}BC=CD\\\angle DCE=\angle BCE\\CE=CE\end{cases}$，

∴△DCE≌△BCE（SAS），

∴$\angle 2=\angle 3$，

∴$\angle 1=\angle 3$，

∵$\angle ADF+\angle 3=\angle ADC=90°$，

∴$\angle 1+\angle ADF=90°$，

∴$\angle AFD=180°-90°=90°$，

取 AD 的中点 O，连接 OF、OC，

则 $OF=DO=\frac{1}{2}AD=1$，

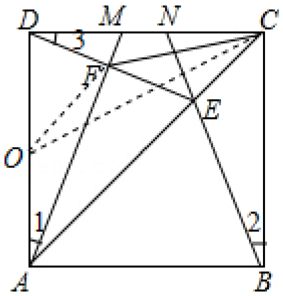
在 Rt△ODC 中，$OC=\sqrt{DO^2+DC^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

根据三角形的三边关系，$OF+CF>OC$，

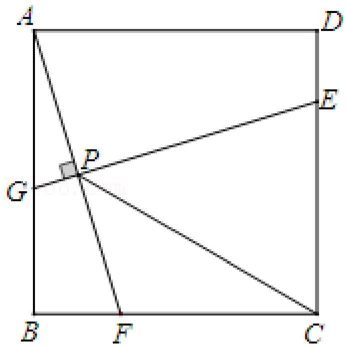
∴当 O、F、C 三点共线时，CF 的长度最小，

最小值$=OC-OF=\sqrt{5}-1$.

故选：C.



7．（2022•龙华区二模）如图，已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E 为 CD 上一点，且 $DE=1$，F 为射线 BC 上一动点，过点 E 作 $EG\perp AF$ 于点 P，交直线 AB 于点 G．则下列结论中：①$AF=EG$；②若$\angle BAF=\angle PCF$，则 $PC=PE$；③当$\angle CPF=45°$ 时，$BF=1$；④PC 的最小值为$\sqrt{13}-2$．其中正确的有（　　）



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【分析】连接 AE，过 E 作 $EH\perp AB$ 于 H，则 $EH=BC$，根据全等三角形的判定和性质定理即可得到 $AF=EG$，故①正确；根据平行线的性质和等腰三角形的判定和性质即可得到 $PE=PC$；故②正确；连接 EF，推出点 E、P、F、C 四点共圆，根据圆周角定理得到$\angle FEC=\angle FPC=45°$，于是得到 $BF=DE=1$，同理当 F 运动到 C 点右侧时，此时$\angle FPC=45°$，且 $EPCF$ 四点共圆，$EC=FC=3$，故此时 $BF=BC+CF=4+3=7$．因此 $BF=1$ 或 7，故③错误；取 AE 的中点 O，连接 PO，CO，根据直角三角形的性质得到 $AO=PO=\frac{1}{2}AE$，推出点 P 在以 O 为圆心，AE 为直径的圆上，当 OC 最小时，CP 的值最小，根据三角形的三边关系得到 $PC\geqslant OC-OP$，根据勾股定理即可得到结论．

【解答】解：连接 AE，过 E 作 $EH\perp AB$ 于 H，

则 $EH=BC$，

$\because AB=BC$，

$\therefore EH=AB$，

$\because EG\perp AF$，

$\therefore \angle BAF+\angle AGP=\angle BAF+\angle AFB=90°$，

$\therefore \angle EGH=\angle AFB$，

∵$\angle B=\angle EHG=90°$，

∴$\triangle HEG\cong\triangle ABF$（$AAS$），

∴$AF=EG$，故①正确；

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle AGE=\angle CEG$，

∵$\angle BAF+\angle AGP=90°$，$\angle PCF+\angle PCE=90°$，

∵$\angle BAF=\angle PCF$，

∴$\angle AGE=\angle PCE$，

∴$\angle PEC=\angle PCE$，

∴$PE=PC$；故②正确；

连接 EF，

∵$\angle EPF=\angle FCE=90°$，

∴点 E、P、F、C 四点共圆，

∴$\angle FEC=\angle FPC=45°$，

∴$EC=FC$，

∴$BF=DE=1$，

同理当 F 运动到 C 点右侧时，此时$\angle FPC=45°$，且 E、P、C、F 四点共圆，$EC=FC=3$，故此时 $BF=BC+CF=4+3=7$．因此 $BF=1$ 或 7，故③错误；

取 AE 的中点 O，连接 PO，CO，

∴$AO=PO=\frac{1}{2}AE$，

∵$\angle APE=90°$，

∴点 P 在以 O 为圆心，AE 为直径的圆上，

∴当 OC 最小时，CP 的值最小，

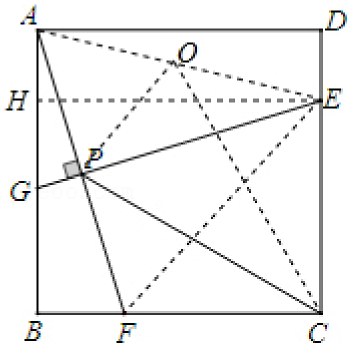
∵$PC\geqslant OC-OP$，

∴PC 的最小值$=OC-OP=OC-\frac{1}{2}AE$，

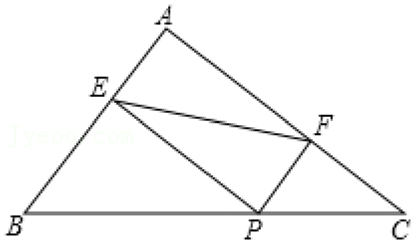
∵$OC=\sqrt{2^2+(\frac{7}{2})^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，

∴PC 的最小值为$\frac{\sqrt{65}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$，故④错误，

故选：B．



8．（2022•南平校级自主招生）如图，在△ABC 中，AB＝6，AC＝8，BC＝10，P 为边 BC 上一动点（且点 P 不与点 B、C 重合），PE⊥AB 于 E，PF⊥AC 于 F．则 EF 的最小值为（　　）



A．4　　B．4.8　　C．5.2　　D．6

【分析】先由矩形的判定定理推知四边形 $PEAF$ 是矩形；连接 PA，则 PA＝EF，所以要使 EF，即 PA 最短，只需 PA⊥CB 即可；然后根据三角形的等积转换即可求得 PA 的值．

【解答】解：如图，连接 PA．

∵在△ABC 中，AB＝6，AC＝8，BC＝10，

∴$BC^2=AB^2+AC^2$，

∴$\angle A=90°$．

又∵PE⊥AB 于点 E，PF⊥AC 于点 F．

∴$\angle AEP=\angle AFP=90°$，

∴四边形 $PEAF$ 是矩形．

∴AP＝EF．

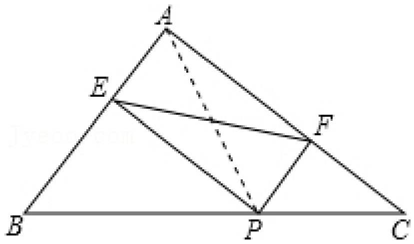
∴当 PA 最小时，EF 也最小，

即当 AP⊥CB 时，PA 最小，

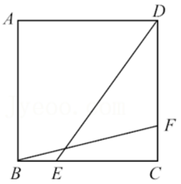
∵$\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AP$，即 $AP=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{6\times8}{10}=4.8$，

∴线段 EF 长的最小值为 4.8；

故选：B．



9．（2022春•崇川区期末）如图，正方形 $ABCD$ 边长为 1，点 E，F 分别是边 BC，CD 上的两个动点，且 $BE=CF$，连接 BF，DE，则 $BF+DE$ 的最小值为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{6}$

【分析】连接 AE，利用△ABE≌△BCF 转化线段 BF 得到 $BF+DE=AE+DE$，则通过作 A 点关于 BC 对称点 H，连接 DH 交 BC 于 E 点，利用勾股定理求出 DH 长即可．

【解答】解：连接 AE，如图 1，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，∠ABE=∠BCF=90°．

又 $BE=CF$，

∴△ABE≌△BCF（SAS）．

∴$AE=BF$．

所以 $BF+DE$ 最小值等于 $AE+DE$ 最小值．

作点 A 关于 BC 的对称点 H 点，如图 2，

连接 BH，则 A、B、H 三点共线，

连接 DH，DH 与 BC 的交点即为所求的 E 点．

根据对称性可知 $AE=HE$，

所以 $AE+DE=DH$．

在 Rt△ADH 中，$AD=1$，$AH=2$，

∴$DH=\sqrt{AH^2+AD^2}=\sqrt{5}$，

∴$BF+DE$ 最小值为$\sqrt{5}$．

故选：C．

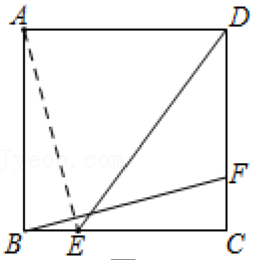


图1

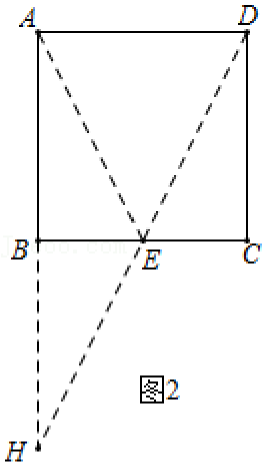
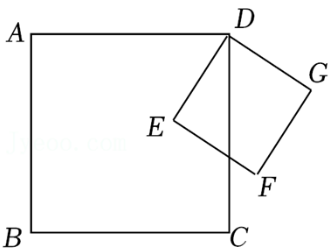


图2

10．（2022•泰州）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为与点 D 不重合的动点，以 DE 为一边作正方形 $DEFG$．设 $DE=d_1$，点 F、G 与点 C 的距离分别为 d_2、d_3，则 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　　B．2　　　C．$2\sqrt{2}$　　　D．4

【分析】连接 AE，那么，$AE=CG$，所以这三个 d 的和就是 $AE+EF+FC$，所以大于等于 AC，故当 $AEFC$ 四点共线有最小值，最后求解，即可求出答案．

【解答】解：如图，连接 AE，

∵四边形 $DEFG$ 是正方形，

∴$\angle EDG=90°$，$EF=DE=DG$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=CD$，$\angle ADC=90°$，

∴$\angle ADE=\angle CDG$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle CDG$（$SAS$），

∴$AE=CG$，

∴$d_1+d_2+d_3=EF+CF+AE$，

∴点 A，E，F，C 在同一条线上时，$EF+CF+AE$ 最小，即 $d_1+d_2+d_3$ 最小，

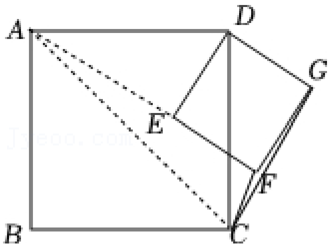
连接 AC，

∴$d_1+d_2+d_3$ 最小值为 AC，

在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，

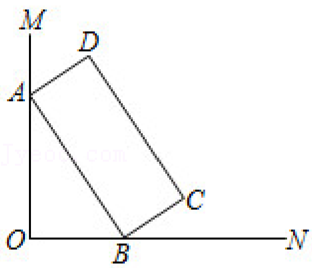
∴$d_1+d_2+d_3$ 最小$=AC=2\sqrt{2}$，

故选：C.



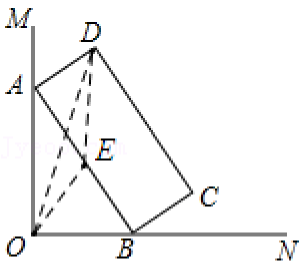
二．填空题（共 10 小题）

11．（2022 春•江城区期末）如图，$\angle MON=90°$，矩形 $ABCD$ 的顶点 A、B 分别在边 OM、ON 上，当 B 在边 ON 上运动时，A 随之在 OM 上运动，矩形 $ABCD$ 的形状保持不变，其中 $AB=6$，$BC=2$．运动过程中点 D 到点 O 的最大距离是 ___$3+\sqrt{13}$___.



【分析】取 AB 的中点 E，连接 OD、OE、DE，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $OE=\frac{1}{2}AB$，利用勾股定理列式求出 DE，然后根据三角形任意两边之和大于第三边可得 OD 过点 E 时最大.

【解答】解：如图：取线段 AB 的中点 E，连接 OE，DE，OD，



∵$AB=6$，点 E 是 AB 的中点，$\angle AOB=90°$，

∴$AE=BE=3=OE$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD=BC=2$，$\angle DAB=90°$，

∴$DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=\sqrt{13}$，

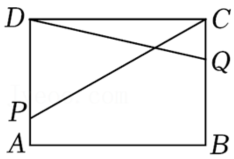
∵$OD\leqslant OE+DE$，

∴当点 D，点 E，点 O 共线时，OD 的长度最大.

∴点 D 到点 O 的最大距离$=OE+DE=3+\sqrt{13}$，

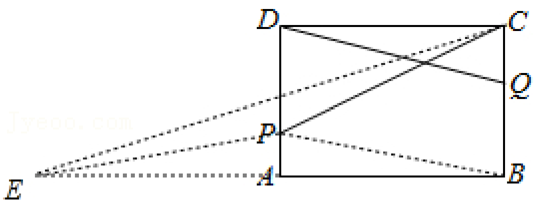
故答案为：$3+\sqrt{13}$.

12．（2022•东莞市校级一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=5$，点 P 在 AD 上，点 Q 在 BC 上，且 $AP=CQ$，连接 CP，QD，则 $PC+DQ$ 的最小值为 __13__.



【分析】连接 BP，在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，连接 PE，CE，$PC+QD=PC+PB$，则 $PC+QD$ 的最小值转化为 $PC+PB$ 的最小值，在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，则 $PC+QD=PC+PB=PC+PE\geqslant CE$，根据勾股定理可得结果.

【解答】解：如图，连接 BP，



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

∵$AP=CQ$，

∴$AD-AP=BC-CQ$，

∴$DP=QB$，$DP\parallel BQ$，

∴四边形 $DPBQ$ 是平行四边形，

∴$PB\parallel DQ$，$PB=DQ$，

∴$PC+QD=PC+PB$，

∴$PC+QD$ 的最小值转化为 $PC+PB$ 的最小值，

如图，在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，连接 PE，CE，

∵$PA\perp BE$，

∴PA 是 BE 的垂直平分线，

∴$PB=PE$，

∴$PC+PB=PC+PE$，

∴$PC+QD=PC+PB=PC+PE\geqslant CE$，

∵$BE=2AB=12$，$BC=AD=5$，

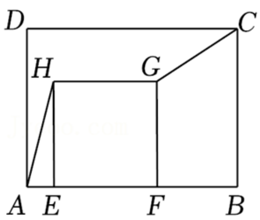
∴$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=13$．

∴$PC+PB$ 的最小值为 13．

∴$PC+DQ$ 的最小值为 13．

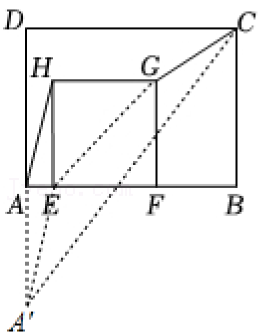
故答案为：13．

13．（2022•钱塘区一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中，线段 EF 在 AB 边上，以 EF 为边在矩形 $ABCD$ 内部作正方形 $EFGH$，连结 AH，CG．若 $AB=10$，$AD=6$，$EF=4$，则 $AH+CG$ 的最小值为 __$6\sqrt{2}$__．



【分析】方法一：延长 DA 至 A'，使 $A'A=EH=EF=4$，连接 $A'E$，EG，可得四边形 $AA'EH$ 是平行四边形，所以 $A'E=AH$，则 $AH+CG$ 的最小值即为 $A'E+CG$ 的最小值，根据勾股定理即可解决问题．方法二：过点 G 作 $GA'\parallel AH$ 交 AF 于点 A'，可得四边形 $AHGA'$ 是平行四边形，进而可以解决问题．

【解答】解：方法一：如图，延长 DA 至 A'，使 $A'A=EH=EF=4$，连接 $A'E$，EG，



∵$HE\perp AB$，$AA'\perp AB$，

∴AA' // EH，

∵$A'A=EH$，

∴四边形 $AA'EH$ 是平行四边形，

∴$A'E=AH$，

则 $AH+CG$ 的最小值即为 $A'E+CG$ 的最小值，

∵四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴$EF=FG=4$，

∴$EG=4\sqrt{2}$，

∵$A'D=AD+AA'=6+4=10$，

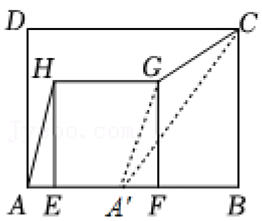
在 Rt△$A'DC$ 中，$DC=AB=10$，

∴$A'C=\sqrt{A'D^2+DC^2}=10\sqrt{2}$，

∴$A'E+CG=A'C-EG=6\sqrt{2}$.

则 $AH+CG$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

方法二：如图，过点 G 作 GA' // AH 交 AF 于点 A'，



∴四边形 $AHGA'$ 是平行四边形，

∴$AA'=HG=4$，$A'G=AH$，

∴$A'B=AB-AA'=6$，

∵$BC=6$，

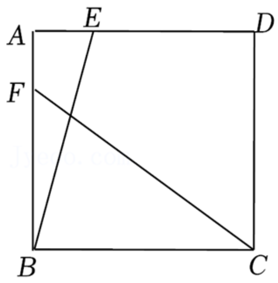
∴$A'C=6\sqrt{2}$，

∴$AH+CG=A'G+CG\geqslant A'C$，

则 $AH+CG$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

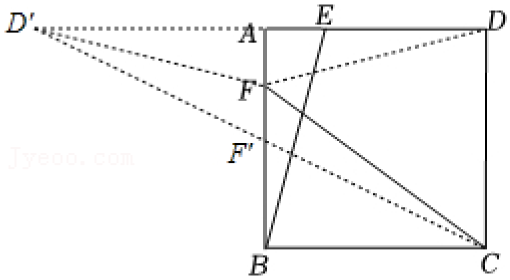
故答案为：$6\sqrt{2}$.

14．（2022 春•东城区期中）在正方形 $ABCD$ 中，$AB=5$，点 E、F 分别为 AD、AB 上一点，且 $AE=AF$，连接 BE、CF，则 $BE+CF$ 的最小值是 __$5\sqrt{5}$__.



【分析】连接 DF，根据正方形的性质证明△ADF≌△ABE（SAS），可得 $DF=BE$，作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 CD' 交 AB 于点 F'，连接 $D'F$，则 $DF=D'F$，可得 $BE+CF=DF+CF=D'F+CF\geqslant CD'$，所以当点 F 与点 F' 重合时，$D'F+CF$ 最小，最小值为 CD' 的长，然后根据勾股定理即可解决问题．

【解答】解：如图，连接 DF，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=AB$，$\angle BAE=\angle DAF=90°$，

在△ADF 和△ABE 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle FAD = \angle EAB, \\ AF = AE \end{cases}$$

∴△ADF≌△ABE（SAS），

∴$DF=BE$，

作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 CD' 交 AB 于点 F'，连接 $D'F$，则 $DF=D'F$，

∴$BE+CF=DF+CF=D'F+CF\geqslant CD'$，

∴当点 F 与点 F' 重合时，$D'F+CF$ 最小，最小值为 CD' 的长，

在 Rt△CDD' 中，根据勾股定理得：

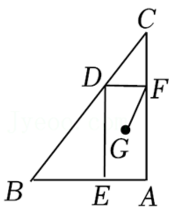
$CD' = \sqrt{CD^2 + DD'^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$，

∴$BE+CF$ 的最小值是 $5\sqrt{5}$．

故答案为：$5\sqrt{5}$．

15．（2022 春•虎林市期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，且 $BA=12$，$AC=16$，点 D 是斜边 BC

上的一个动点，过点 D 分别作 $DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，点 G 为四边形 $DEAF$ 对角线交点，则线段 GF 的最小值为 $\underline{\quad\frac{24}{5}\quad}$.



【分析】由勾股定理求出 BC 的长，再证明四边形 $DEAF$ 是矩形，可得 $EF=AD$，根据垂线段最短和三角形面积即可解决问题.

【解答】解：连接 AD、EF，

∵$\angle BAC=90^\circ$，且 $BA=9$，$AC=12$，

∴$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$，

∵$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴$\angle DEA=\angle DFA=\angle BAC=90^\circ$，

∴四边形 $DEAF$ 是矩形，

∴$EF=AD$，

∴当 $AD\perp BC$ 时，AD 的值最小，

此时，$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}BC\times AD$，

∴$12\times16=20AD$，

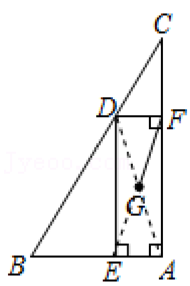
∴$AD=\frac{48}{5}$

∴EF 的最小值为$\frac{48}{5}$，

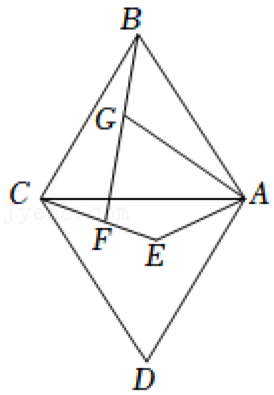
∵点 G 为四边形 $DEAF$ 对角线交点，

∴$GF=\frac{1}{2}EF=\frac{24}{5}$；

故答案为：$\frac{24}{5}$.

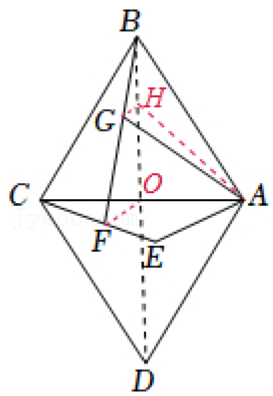


16．（2022•灞桥区校级三模）在菱形 $ABCD$ 中，$\angle D=60°$，$CD=4$，E 为菱形内部一点，且 $AE=2$，连接 CE，点 F 为 CE 中点，连接 BF，取 BF 中点 G，连接 AG，则 AG 的最大值为 ___$\frac{1}{2}+\sqrt{7}$___．



【分析】先根据题目条件中的中点可联想中位线的性质，构造中位线将 OF 和 GH 的长度先求出来，再利用三角形的三边关系判断，当 $AG=AH+HG$ 时最大．

【解答】解：如图所示：连接 BD 交 AC 于点 O，连接 FO，取 OB 的中点 H，连接 HG 和 AH，



∵在菱形 $ABCD$ 中，

∴O 为 AC 中点，

∵F 为 CE 中点，

∴$OF=\frac{1}{2}AE=1$，

当 C、F、E、A 共线时，OF 也为 1，

∵G 为 BF 中点、H 为 OB 中点，

∴$GH=\frac{1}{2}OF=\frac{1}{2}$，

∵在菱形 $ABCD$ 中且 $\angle D=60°$，

∴$\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ADC=30°$，$\angle BOA=90°$，

$\therefore OA = \frac{1}{2}AB = 2$，

$\therefore OB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore OH = \sqrt{3}$，

$\therefore AH = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$，

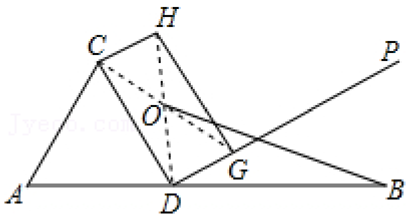
$\because AG \leqslant AH + HG$，

$\therefore AG \leq \frac{1}{2} + \sqrt{7}$，

$\therefore AG$ 的最大值为$\frac{1}{2} + \sqrt{7}$．

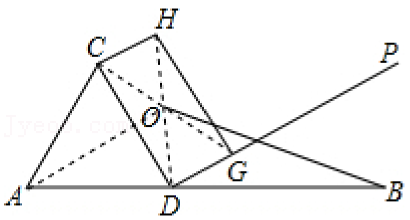
故答案为：$\frac{1}{2} + \sqrt{7}$．

17．（2022 春•靖江市校级期末）如图，线段 AB 的长为 10，点 D 在 AB 上，$\triangle ACD$ 是边长为 3 的等边三角形，过点 D 作与 CD 垂直的射线 DP，过 DP 上一动点 G（不与 D 重合）作矩形 $CDGH$，记矩形 $CDGH$ 的对角线交点为 O，连接 OB，则线段 BO 的最小值为 __5__．



【分析】连接 AO，根据矩形对角线相等且互相平分得：$OC=OD$，再证明$\triangle ACO \cong \triangle ADO$，则$\angle OAB=30°$；点 O 一定在$\angle CAB$ 的平分线上运动，根据垂线段最短得：当 $OB \perp AO$ 时，OB 的长最小，根据直角三角形 30° 角所对的直角边是斜边的一半得出结论．

【解答】解：连接 AO，



$\because$四边形 $CDGH$ 是矩形，

$\therefore CG=DH$，$OC = \frac{1}{2}CG$，$OD = \frac{1}{2}DH$，

$\therefore OC=OD$，

$\because \triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore AC=AD$，$\angle CAD=60°$，