湖南省名师网络工作室精品课

2.3.3点到直线的距离公式

年　级：高二年级　　学　科：数学（人教A版）

主讲人：周学鹏　　学　校：湖南省株洲市第八中学

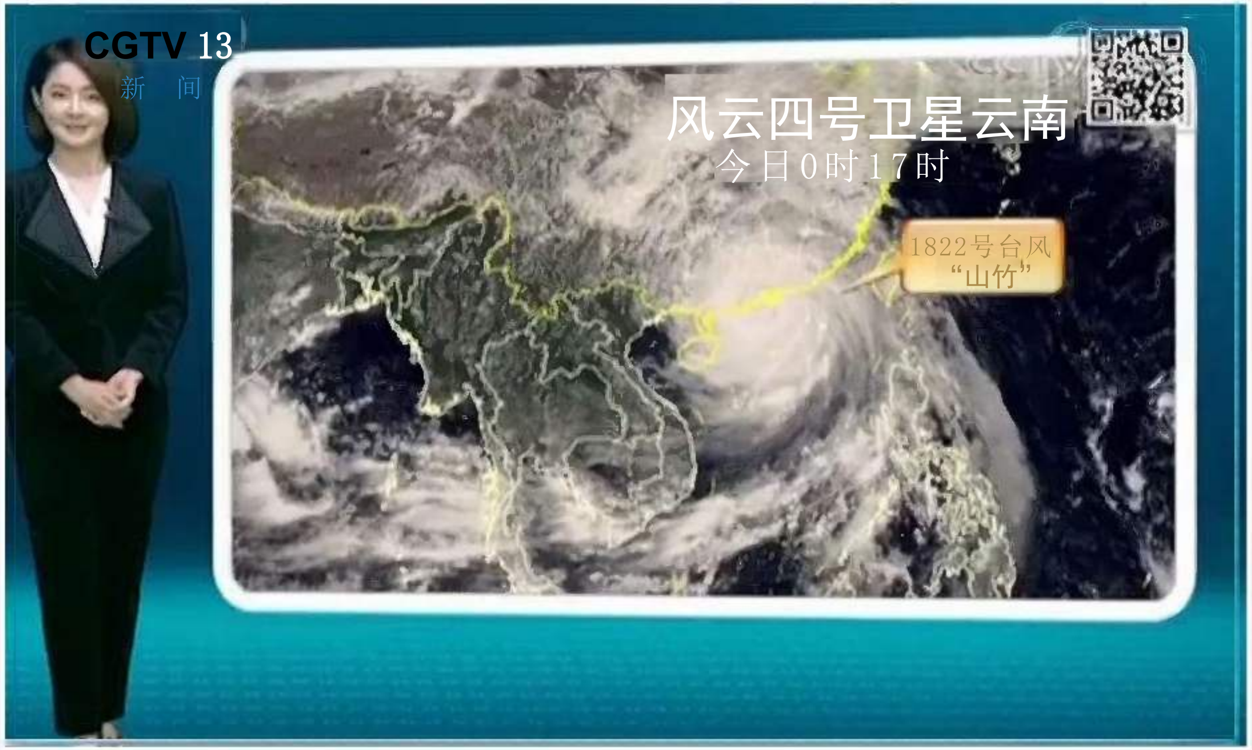
湖南省名师网络工作室精品课

2.3.3点到直线的距离公式

年　级：高二年级　　学　科：数学(人教A版)

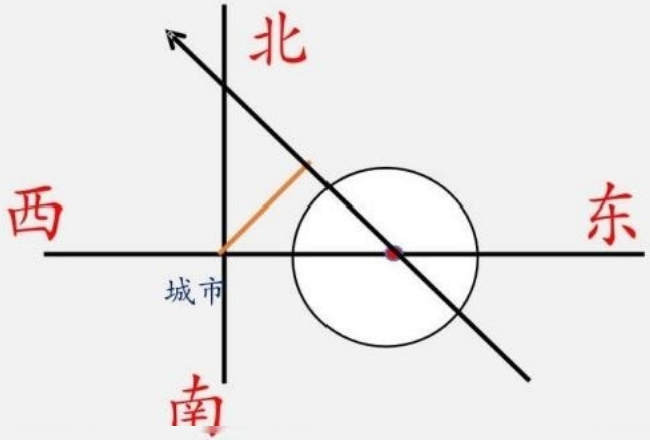
主讲人：周学鹏　　学　校：株洲市第八中学

情景引入



情景引入

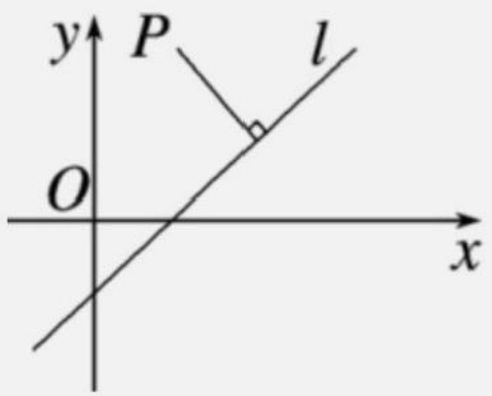
据预测，台风中心位于我市的正东方向200km 的海平面上，正向西北方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，半径为100km。 问：未来我市会受到台风的影响吗？



自主探究

探究一：用坐标法推导点到直线的距离公式

问题1：如图，平面直角坐标系中，已知点P(xo,Yo)，直线l：Ax+By+C=0(A≠0,B≠0)，怎样求出点P到直线l的距离呢？

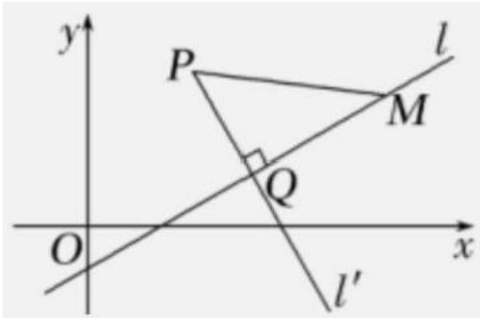


提示：两点间的距离公式

设点P到直线l的垂线为 l',垂足为Q,

由l⊥l'可知l'的斜率为 $\frac{B}{A}$

∴l'的方程为$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$



与l联立方程组，可得

$$\begin{cases} y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0) \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - y_0 = \dfrac{B}{A}(x - x_0) \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ay - Ay_0 = Bx - Bx_0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ABy - ABy_0 - B^2x + B^2x_0 = 0 \\ A^2x + ABy + AC = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (A^2+B)x=-ABy,-AC+Bx,$$

$$\therefore x = \frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}$$

$$y = \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}$$

$$Q\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)$$

∴由两点间的距离公式有：

$$|PQ|^2=\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2$$

$$|PQ|^2=\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2$$

$$=\left(\frac{\cancel{B^2x_0}-ABy_0-AC\cancel{-B^2x_0}-A^2x_0}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{\cancel{A^2y_0}-ABx_0-BC-B^2y_0\cancel{-A^2y_0}}{A^2+B^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{A^2x_0+ABy_0+AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{B^2y_0+ABx_0+BC}{A^2+B^2}\right)^2$$

$$=\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(By_0+Ax_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(A^2+B^2)}(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^{\cancel{2}}}$$

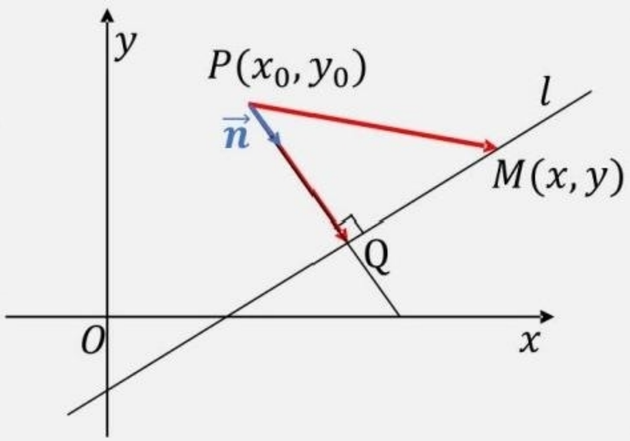
$$=\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$$

$$\therefore |PQ|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

问题2：通过刚才的运算，我们发现把点线距离转化为两点间的距离思路顺畅，但是计算繁琐。我们知道向量是解决距离和夹角问题的有力工具，怎样用向量投影的办法求点到直线的距离？

$|PQ=|\vec{PQ}=\ I\ 1$

$=|\vec{PM}\cdot n\ |$



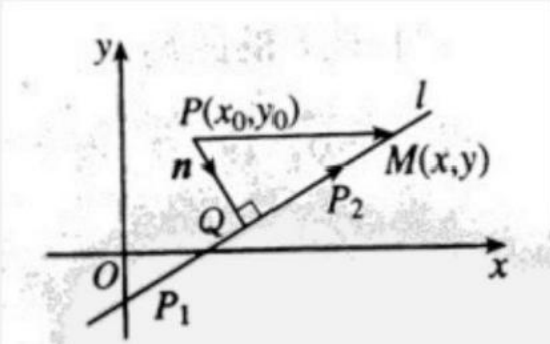
设$P_1(x_1,y_1)$，　$P_2(x_2,y_2)$　是直线$l:Ax+By+C=0$上的任意两点，则$P_1P_2$2=(x_2-xj, y_2-y_1)　是直线l的方向向量.

把$Ax_1+By_1+C=0$, $Ax_2+By_2+C=0$　两式相减，

得$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$

由平面向量的数量积运算可知，ü =(A,B)与

$P_1P_2=(x_2-x_1,y_2-y_1)$　垂直.



则$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A,B)$

就是与直线l 的方向向量垂直的一个单位向量.

从而$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=(x-x_0,y-y_0)\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A,B)$

$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}[A(x-x_0)+B(y-y_0)]$

$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Ax+By-Ax_0-By_0)$

因为点M(x, y) 在直线l上，所以Ax+By +C=0

所以Ax+By=-C

代入上式得 $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-Ax_0-By_0-C)$

因此$|PQ|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$