第四章　整数规划

- 整数规划的数学模型及解的特点
- 解纯整数规划的割平面法
- 分支定界法
- 0-1型整数规划
- 指派问题

应用案例

- 投资组合问题
- 背包问题

■ 投资组合问题背景

- **证券投资**：把一定的资金投入到合适的有价证券上以规避风险并获得最大的利润
- **项目投资**：财团或银行把资金投入到若干项目中以获得中长期的收益最大。

■ 投资组合问题案例

- 某财团有B万元的资金，经考察选中 n 个投资项目，每个项目只能投资一个。其中第 j 个项目需投资金额为 b_j 万元，预计5年后获利 c_j 万元 $j=1,2\ldots,n$ ，问应如何选择项目使得5年后总收益最大？

投资组合问题模型

- 变量—每个项目是否投资，x_j=1---第j个项目投资，x_j=0---第j个项目不投资
- 约束—总金额不超过限制
- 目标—总收益最大

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le B \\ x_j = 1,0;\ j = 1,2\ldots,\ n \end{cases}$$

背包问题

- **邮递包裹**----把形状可变的包裹用尽量少的车辆运走
- **旅行背包**----容量一定的背包里装尽可能的多的物品

■ 例1：背包问题实例

- 有三个旅行包，容积大小分别为1000毫升、1500毫升和2000毫升。根据需要，必带物品共有7件，其体积大小分别为400、300、150、250、450、760、190(单位毫升)。尚有10件可带可不带，如果不带将在目的地购买，通过网络查询得知其在目的地的价格（单位元）。这些物品的容量及价格分别见下表，试给出一个合理的安排方案（未带物品购买费用最小）把物品放在三个旅行包里。

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	200	350	500	430	320	120	700	420	250	100
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

■ 背包问题模型

变量设计：

- 对每个物品，确定是否要带，同时还要确定放在哪个包裹里。
- 若增加一个虚拟的包裹，把不带的物品放在里面，则问题就转化为确定每个物品放在哪个包裹里。
- 因此，可设变量为第 i 个物品是否放在第 j 个包裹中

$$x_{ij} = 1,0;\ i = 1,2...,17,\ j = 1,2,3$$

设：r_j ---为包裹 j 的容量限制

c_i ---为每 I 个物体的体积

背包问题

- **约束**

  包裹容量限制：

  $$\sum_{i=1}^{17} c_i x_{ij} \le r_j ; j = 1,2,3$$

  必带物品限制：

  $$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1; i = 1,2...,7$$

  选带物品限制：

  $$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le 1; i = 8,9...,17$$

- **目标函数**

  末带物品购买费用最小

  - p_i表示第i种物品的价格

$$\min \sum_{i=8}^{17} p_i (1 - \sum_{j=1}^{3} x_{ij})$$

末带物品（值为0）

四川农业大学

背包问题模型

$$\min \sum_{i=8}^{17} p_i (1 - \sum_{j=1}^{3} x_{ij})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{17} c_i x_{ij} \le r_j ; j = 1,2,3 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1; i = 1,2\ldots,7 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le 1; i = 8,9\ldots,17 \\ x_{ij} = 1,0; i = 1,2\ldots,17, j = 1,2,3 \end{cases}$$

整数规划数学模型

线性整数规划模型概述

- **特征**—变量整数性要求；
- **来源**
  问题本身的要求；
  引入的逻辑变量的需要；
- **性质—**可行域是离散集合；

线性整数规划模型分类

- 一般整数规划模型（纯整数）
- 0-1整数规划模型
- 混合整数规划模型

■ 一般整数线性规划模型（纯整数）

- 模型的一般形式为

$$\max(\text{或}\min)=\sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{或}=\text{，}\ \text{或}\ge)b_i(i=1,2,..,m)\\ x_j \ge 0(j=1,2,..,n)\\ x_1,x_2,\ldots,x_n\text{中全部取整数}\end{cases}$$

整数规划数学模型

■ 0-1整数规划模型

$$\max(\text{或}\min)=\sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{或}=\text{，}\quad\text{或}\ge) b_i (i=1,2,..,m) \\ x_j=0,1(j=1,2,..,n) \end{cases}$$

■ 混合整数规划模型

$$\max(\text{或}\min)=\sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{或}=\text{，}\quad\text{或}\ge) b_i (i=1,2,..,m) \\ x_j \ge 0 (j=1,2,..,n) \\ x_1,x_2,...,x_n\text{中部分取整数} \end{cases}$$

- 例2（建模示例）：现有资金总额为B。可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预期收益分别为a_j和c_j(j=1,2,…，n)。此外，由于种种原因，有三个附加条件：
  - （1）若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之，则不一定；
  - （2）项目3和项目4中至少选择一个；
  - （3）项目5、项目6和项目7中恰好选择两个。

应当怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大?

$$令\ x_j=\begin{cases}1 对项目j投资\\0 对项目j不投资\end{cases}(j=1,2,\dots,n)$$

问题模型为：

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\le B$$

$$x_1\le x_2$$

$$x_3+x_4\ge 1$$

$$x_5+x_6+x_7=2$$

$$x_j=0或1（j=1,2,\dots n）$$

整数规划问题解的特点

四川農業大學

整数规划问题：

$$\max \ z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

（IP）问题的松弛问题

整数规划问题解的特点

⑴ IP的可行解域$\subset$ 松弛问题的可行解域

⇒ 若松弛问题无可行解，则IP无可行解

⑵ IP的最优值$\leq$ 松弛问题的最优值

⇒ 松弛问题的最优值是原整数规划的目标函数值的上界。

(3)若松弛问题可以找到一个整数解$\overline{X}$，

则$\overline{X}$的目标函数值是 IP最优值的下界

⑷ 若松弛问题的最优解X^*为整数解

则X^*也是IP的最优解

解纯整数规划的割平面法

■ 割平面法的基本思想

- 若整数规划IP的松弛规划L_0的最优解不是整数解，对L_0增加一个约束条件，得线性规划L_1，此过程缩小了松弛规划的可行解域，在切去松弛规划的最优解的同时，保留松弛规划的任一整数解。
- 整数规划IP的解均在L_1中，若L_1的最优解为整数解，则得IP的最优解。若L_1的最优解不是整数解，重复以上步骤。
- 由于可行解域在不断缩小，且保留IP所有的整数解，总可以在有限次后得到IP的最优解.

■ 割平面法

- 思路----由松弛问题的可行域向整数规划的可行域逼近
- 方法----利用超平面切除
- 要求----**整数解保留**

  松弛问题最优值向最优解逼近
- 目标----得到的新的可行域的某个整数坐标的极点恰好是问题的最优解

解纯整数规划的割平面法

■ 割平面法

对整数规划问题

$$IP: \max \ z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j \text{为整数} \end{cases}$$

■ Gomory 约束

$$\sum_{j \in \bar{N}} f\left(a'_{ij}\right) \geq f\left(b'_i\right)$$

$\bar{N}$ 为非基变量下标集合

符号定义：

$$a'_{ij} = \lfloor a'_{ij} \rfloor + f\left(a'_{ij}\right)$$

$$b'_{ij} = \left[b'_{ij}\right] + f\left(b'_{ij}\right)$$

- 符号 [*] 表示不超过"*"的最大整数，如：[2.6] =2
- f(*) 表示"*"的非负真分数。f(2.6) = 0.6

  [-2.6] = 3，f(-2.6) = 0.4

解纯整数规划的割平面法

对整数规划问题

$$IP:\max\ z=CX$$

$$s.t\begin{cases} AX=b \\ X\geq 0 \\ x_j\text{为整数} \end{cases}$$

其松弛问题 L_0

$$\max\ z=CX$$

$$s.t\begin{cases} AX=b \\ X\geq 0 \end{cases}$$

- 设L_0的最优解 X_0不是整数解
- 不妨设

$$X_0=(b_{10},\cdots b_{i0},\cdots b_{m0},0,\cdots 0)' \quad \text{其中 } b_{i0}\text{是分数}$$

- 即$x_1,\cdots x_i,\cdots x_m$是基变量，$x_{m+1},\cdots,x_n$是非基变量

设L_0的最优解$X_0 = (b_{10}, L\ b_{i0}, L\ b_{m0}, 0, L\ 0)'$ ，b_{i0}是分数

- L_0的最优单纯形表：

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{m+j}	…	x_n	解
检	0	…	0	…	0	λ_1	…	λ_{m+j}	…	λ_n	$z-z_0$
x_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1m+j}	…	a_{1n}	b_{10}
:	:		:		:	:		:		:	:
x_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{im+j}	…	a_{in}	b_{i0}
:	:		:		:	:		:		:	:
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	b_{m0}

b_{i0}所在行的方程为

源方程

$$x_i + a_{im+1}x_{m+1} + L + a_{im+j}x_{m+j} + L + a_{in}x_n = b_{i0}$$

解纯整数规划的割平面法

对源方程: $x_i + a_{im+1}x_{m+1} + \cdots + a_{im+j}x_{m+j} + \cdots + a_{in}x_n = b_{i0}$

$$\Longleftrightarrow x_i + \sum_{j=1}^{n-m} a_{im+j}x_{m+j} = b_{i0}$$

$[a_{im+j}] + f_{im+j}$

$0 \le f_{im+j} < 1$

$[b_{i0}] + f_{i0}$

$0 < f_{i0} < 1$

$$\Longleftrightarrow x_i + \sum_{j=1}^{n-m} ([a_{im+j}] + f_{im+j})x_{m+j} = [b_{i0}] + f_{i0}$$

$$\Longleftrightarrow x_i + \sum_{j=1}^{n-m} [a_{im+j}]x_{m+j} + \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j} = [b_{i0}] + f_{i0}$$

$$\Longleftrightarrow x_i - [b_{i0}] + \sum_{j=1}^{n-m} [a_{im+j}]x_{m+j} = \boxed{f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j}}$$

思路：要保证整数解满足该方程，则得出割平面。

令 $f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j}x_{m+j} \le 0$

------对应于生成行 i 的割平面

对整数规划问题

$$IP: \max\ z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \\ x_j 为整数 \end{cases}$$

其松弛问题 L_0

$$\max\ z = CX$$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

线性规划 L_1 : $\max\ z = CX$

$$s.t\begin{cases} AX = b \\ \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

L_0 的最优解 $X_0 = (b_{10}, \cdots b_{i0}, \cdots b_{m0}, 0, \cdots 0)'$ 其中 b_{i0} 是分数

L_0 的最优单纯形表：

	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}				x_n	解
	0	…	0	…	0	λ_1				λ_n	
	1	…	0	…	0	a_{1m+1}				a_{1n}	
:	:		:		:	:				:	
:	:		:		:	:		:		:	:
x_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mm+j}	…	a_{mn}	b_{m0}

生成行

$$[a_{im+j}] + f_{im+j}$$
$$0 \leq f_{im+i} < 1$$
$$j = 1, 2, \cdots n-m$$

$$[b_{i0}] + f_{i0}$$
$$0 < f_{i0} < 1$$

非基变量

对应于生成行i的割平面 : $f_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \leq 0$,即 $\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+j} x_{m+j} \geq f_{i0}$

四川农业大学

■ 割平面计算步骤：

1、用单纯形法解整数问题IP的松弛问题L_0

- 若L_0没有最优解，则IP没有最优解。停止
- 若L_0有最优解X_0:

(1) X_0是整数解，则X_0也是IP的最优解，停止

(2) X_0不是整数解，转第二步

2、求割平面方程

任选X_0的一个非整数分量b_{i0},

由L_0的最优单纯型表中b_{i0}所在的行的数据,

得割平面：$\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1} x_{m+j} \geq f_{i0}$ 即 $-\sum_{j=1}^{n-m} f_{im+1} x_{m+j} + s = -f_{i0}$

■ 割平面计算步骤：

3、将割平面加到L_0得L_1

在L_0的最优单纯型表中增加一行一列，得L_1的单纯型表，解L_1

- 用对偶单纯刑法求解，
- 若其解是整数解，则该解也是原整数规划的最优解

  否则将该解记为X_0，返回第二步

解纯整数规划的割平面法

例3：求解整数线性规划

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2\text{为整数} \end{cases}$$

第一步：解整数规划问题的松弛问题，$x_1=13/7$， $x_2=9/7$；

解纯整数规划的割平面法

四川農業大學

表 4-1

c_j			3	-1	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	2/7
-1	x_2	9/7	0	1	-2/7	0	3/7
0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7
c_j-z_j			0	0	-5/7	0	-3/7

- 第二步：写出割平面方程，选择第一行产生割平面约束，

$$\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_5 \geq \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_5+x_6=-\frac{6}{7}$$

解纯整数规划的割平面法

四川农业大学

表 4-2

		c_j	3	-1	0	0	0	0
c_B	x_{Bi}	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	2/7	0
-1	x_2	9/7	0	1	-2/7	0	3/7	0
0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7	0
0	x_6	-6/7	0	0	-1/7	0	[-2/7]	1
c_j-z_j		-5/2	0	0	-5/7	0	-3/7	0
…								
3	x_2	1	1	0	0	0	0	1
-1	x_1	5/4	0	1	0	-1/4	0	-5/4
0	x_3	5/2	0	0	1	-1/2	0	-11/2
0	x_5	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4
c_j-z_j			0	0	0	-1/4	0	-17/4

解纯整数规划的割平面法

四川农业大学

表 4-3

c_j			3	-1	0	0	0	0	0
c_B	x_{Bi}	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
-1	x_2	2	0	1	0	0	0	-1	-1
0	x_3	4	0	0	1	0	0	-5	-2
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-1	1
0	x_4	3	0	0	0	1	0	1	-4
c_j-z_j		-1	0	0	0	0	0	-4	-1

原整数规划问题的最优解为，$x_1=1, x_2=2, \max z=1$

分支定界法

- **分支定界法**(branch and bound method)是一种隐枚举法(implicit enumeration)或**部分枚举法**，它不是一种有效算法，是枚举法基础上的改进。
- 分支定界法的关键是分支和定界。

- 分枝定界法的基本思路

通过对松弛问题的分枝，不断降低（IP）最优值的上界，提高下界，当上界等于下界时，得到最优解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/515040002320011204