2023 年高考数学模拟试卷

请考生注意：

1．请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0．5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作双曲线 C 的一条弦 AB，且 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$，若以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A． $\sqrt{2}$　　**B．** $\sqrt{3}$　　**C．** 2　　**D．** $\sqrt{5}$

2．“$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$”的（　　）

A． 充分不必要条件　　**B．** 必要不充分条件

C． 充要条件　　**D．** 既不充分又不必要条件

3．已知定义在 R 上的可导函数 $f\left(x\right)$ 满足 $\left(1-x\right)\cdot f\left(x\right)+x\cdot f^{'}\left(x\right)>0$，若 $y=f(x+2)-e^3$ 是奇函数，则不等式 $x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$ 的解集是（　　）

A． $\left(-\infty,2\right)$　　**B．** $\left(-\infty,1\right)$　　**C．** $\left(2,+\infty\right)$　　**D．** $\left(1,+\infty\right)$

4．已知集合 $A=\{x\,|\,\log_2(x-1)<2\},B=N,$则 $A\cap B=$（　　）

A． $\{2,3,4,5\}$　　**B．** $\{2,3,4\}$　　**C．** $\{1,2,3,4\}$　　**D．** $\{0,1,2,3,4\}$

5．设 a、$b\in R^+$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a\cdot a_n^2+b$，$n\in \mathbf{N}^*$，则（　　）

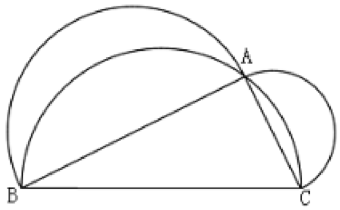
A． 对于任意 a，都存在实数 M，使得 $a_n<M$ 恒成立

B． 对于任意 b，都存在实数 M，使得 $a_n<M$ 恒成立

C． 对于任意 $b\in\left(2-4a,+\infty\right)$，都存在实数 M，使得 $a_n<M$ 恒成立

D． 对于任意 $b\in\left(0,2-4a\right)$，都存在实数 M，使得 $a_n<M$ 恒成立

6．如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB,AC.已知以直角边 AC,AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$，记 $\angle ABC=\alpha$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）



A．$\frac{9}{25}$　　B．$\frac{12}{25}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

7．设 x、y、z 是空间中不同的直线或平面，对下列四种情形：①x、y、z 均为直线；②x、y 是直线，z 是平面；③z 是直线，x、y 是平面；④x、y、z 均为平面.其中使“$x\perp z$ 且 $y\perp z\Rightarrow x /\!/ y$”为真命题的是（　　）

A．③④　　B．①③　　C．②③　　D．①②

8．已知半径为 2 的球内有一个内接圆柱，若圆柱的高为 2，则球的体积与圆柱的体积的比为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{9}{16}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{16}{9}$

9．已知直线 l：$kx-y-3k+1=0$ 与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A、B 两点，与圆 C_2：$(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 交于 C、D 两点.若存在 $k\in[-2,-1]$，使得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，则椭圆 C_1 的离心率的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$　　B．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1)$　　C．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

10．我国古代数学著作《九章算术》有如下问题:“今有蒲生一日，长三尺莞生一日，长一尺蒲生日自半，莞生日自倍.问几何日而长倍？”意思是：“今有蒲草第 1 天长高 3 尺，莞草第 1 天长高 1 尺以后，蒲草每天长高前一天的一半，莞草每天长高前一天的 2 倍.问第几天莞草是蒲草的二倍？”你认为莞草是蒲草的二倍长所需要的天数是（　　）

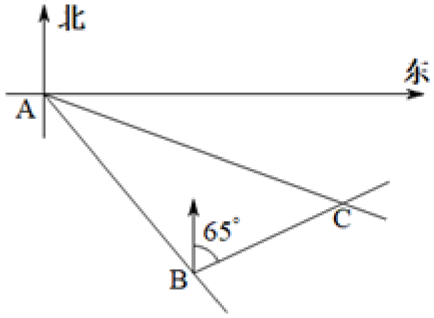
（结果采取“只入不舍”的原则取整数，相关数据：$\lg 3\approx 0.4771$，$\lg 2\approx 0.3010$）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

11．已知点 $M(2,0)$，点 P 在曲线 $y^2=4x$ 上运动，点 F 为抛物线的焦点，则 $\frac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$2(\sqrt{5}-1)$　　C．$4\sqrt{5}$　　D．4

12．一艘海轮从 A 处出发，以每小时 24 海里的速度沿南偏东 40°的方向直线航行，30 分钟后到达 B 处，在 C 处有一座灯塔，海轮在 A 处观察灯塔，其方向是南偏东 70°，在 B 处观察灯塔，其方向是北偏东 65°，那么 B，C 两点间的距离是（　　）



A．6 $\sqrt{2}$ 海里　　B．6$\sqrt{3}$ 海里　　C．8$\sqrt{2}$ 海里　　D．8$\sqrt{3}$ 海里

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．3 张奖券分别标有特等奖、一等奖和二等奖．甲、乙两人同时各抽取 1 张奖券,两人都未抽得特等奖的概率是__________.

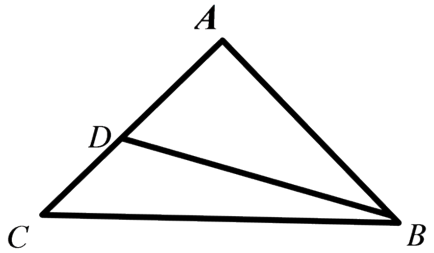
14．学校艺术节对同一类的 A,B,C,D 四项参赛作品，只评一项一等奖，在评奖揭晓前，甲、乙、丙、丁四位同学对这四项参赛作品预测如下：甲说："A 作品获得一等奖"；乙说："C 作品获得一等奖"；丙说："B，D 两项作品未获得一等奖"；丁说："是 A 或 D 作品获得一等奖"，若这四位同学中只有两位说的话是对的，则获得一等奖的作品是___.

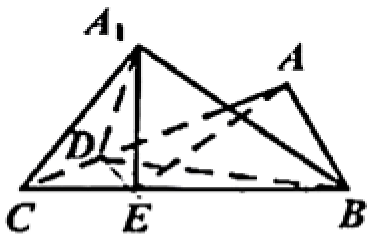
15．点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右支上，其左、右焦点分别为 F_1、F_2，直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、a 为半径的圆相切于点 A，线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2，则该双曲线的渐近线的斜率为__________.

16．设 $a\in R$，若函数 $y=e^x+ax,x\in R$ 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是_____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12 分)如图，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB=AC=3$，D 为 AC 上一点，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，得到三棱锥 A_1-BCD，且使得 A_1 在底面 BCD 的投影 E 在线段 BC 上，连接 AE.



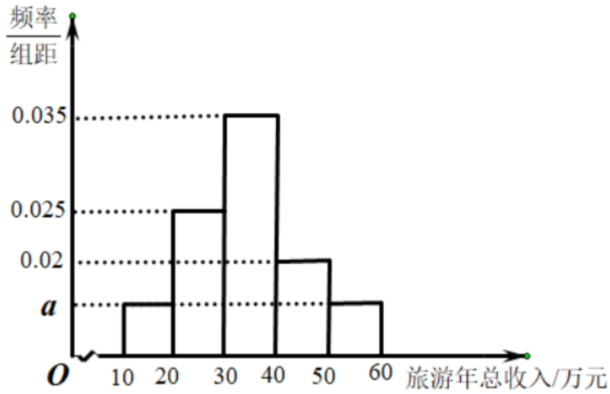


(1)证明：$BD\perp AE$；

(2)若 $\tan\angle ABD=\frac{1}{2}$，求二面角 $C-BA_1-D$ 的余弦值.

18．(12 分)

2019 年 9 月 26 日，携程网发布《2019 国庆假期旅游出行趋势预测报告》，2018 年国庆假日期间，西安共接待游客 1692.56 万人次，今年国庆有望超过 2000 万人次，成为西部省份中接待游客量最多的城市.旅游公司规定：若公司某位导游接待旅客，旅游年总收人不低于 40(单位: 万元)，则称该导游为优秀导游.经验表明，如果公司的优秀导游率越高，则该公司的影响度越高.已知甲、乙家旅游公司各有导游 40 名，统计他们一年内旅游总收入，分别得到甲公司的频率分布直方图和乙公司的频数分布表如下：

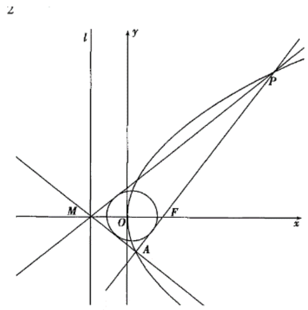


分组	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$
频数	2	b	20	10

（1）求 a，b 的值，并比较甲、乙两家旅游公司，哪家的影响度高？

（2）从甲、乙两家公司旅游总收人在 $[10,20)$ (单位：万元)的导游中，随机抽取 3 人进行业务培训，设来自甲公司的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

19.（12 分）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴交于点 M，点 P 在抛物线上，直线 PF 与抛物线 C 交于另一点 A.



（1）设直线 MP，MA 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1+k_2 常数；

（2）①设 ΔPMA 的内切圆圆心为 $G(a,b)$ 的半径为 r，试用 r 表示点 G 的横坐标 a；

②当 ΔPMA 的内切圆的面积为 $\dfrac{1}{2}\pi$ 时，求直线 PA 的方程.

20．（12 分）已知ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$\left(\sin A-\sin B\right)^{2}=\sin^{2}C-\sin A\sin B$．

（Ⅰ）求C；

（Ⅱ）若$c=1,\Delta ABC$的周长是否有最大值？如果有，求出这个最大值，如果没有，请说明理由.

21．（12分）设函数$f(x)=|x-a|+|x+\frac{2}{a}|$（$a>0$）.

（1）若不等式$f(x)-|x+\frac{2}{a}|\geq 4x$的解集为$\{x|x\leq 1\}$，求实数$a$的值；

（2）证明：$f(x)\geq 2\sqrt{2}$.

22．（10分）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程是$\rho\cos^2\theta-4\sin\theta=0$，直线$l_1$和直线$l_2$的极坐标方程分别是$\theta=\alpha$（$\rho\in\mathbf{R}$）和$\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$（$\rho\in\mathbf{R}$），其中$\alpha\neq k\pi$（$k\in z$）.

（1）写出曲线C的直角坐标方程；

（2）设直线l_1和直线l_2分别与曲线C交于除极点O的另外点A，B，求ΔOAB的面积最小值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$得$F$是弦$AB$的中点.进而得$AB$垂直于$x$轴，得$\frac{b^2}{a}=a+c$，再结合$a,b,c$关系求解即可

【详解】

因为$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$，所以$F$是弦$AB$的中点.且$AB$垂直于$x$轴.因为以$AB$为直径的圆经过双曲线$C$的左顶点，所以$\frac{b^2}{a}=a+c$，即$\frac{c^2-a^2}{a}=a+c$，则$c-a=a$，故$e=\frac{c}{a}=2$.

故选：C

【点睛】

本题是对双曲线的渐近线以及离心率的综合考查，是考查基本知识，属于基础题.

2、B

【解析】

先求出满足$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$的$\alpha$值，然后根据充分必要条件的定义判断．

【详解】

由$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$得$2\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$，即$\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，因此“$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$”的必要不充分条件．

故选：B．

【点睛】

本题考查充分必要条件，掌握充分必要条件的定义是解题基础．解题时可根据条件与结论中参数的取值范围进行判断．

3、A

【解析】

构造函数$g(x)=\frac{x\cdot f(x)}{e^x}$，根据已知条件判断出$g(x)$的单调性.根据$y=f(x+2)-e^3$是奇函数，求得$f(2)$的值，由此化简不等式$x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$求得不等式的解集.

【详解】

构造函数$g(x)=\frac{x\cdot f(x)}{e^x}$，依题意可知$g'(x)=\frac{(1-x)\cdot f(x)+x\cdot f'(x)}{e^x}>0$，所以$g(x)$在$R$上递增.由于$y=f(x+2)-e^3$是奇函数，所以当$x=0$时，$y=f(2)-e^3=0$，所以$f(2)=e^3$，所以$g(2)=\frac{2\times e^3}{e^2}=2e$.

由$x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$得$g(x)=\frac{x\cdot f(x)}{e^x}<2e=g(2)$，所以$x<2$，故不等式的解集为$(-\infty,2)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查构造函数法解不等式，考查利用导数研究函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

4、B

【解析】

解对数不等式可得集合A，由交集运算即可求解.

【详解】

集合$A=\{x\mid\log_2(x-1)<2\}$,解得$A=\{x|1<x<5\}$,

$B=N$,

由集合交集运算可得 $A\cap B=\{x|1<x<5\}\cap N=\{2,3,4\}$，

故选：**B.**

【点睛】

本题考查了集合交集的简单运算，对数不等式解法，属于基础题.

5、D

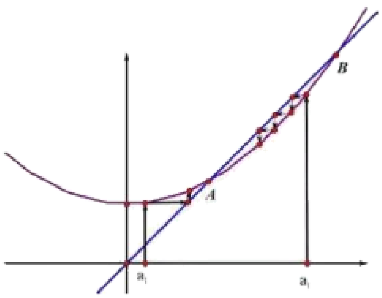
【解析】

取 $a=b=1$，可排除 **AB**；由蛛网图可得数列 $\{a_n\}$ 的单调情况，进而得到要使 $a_n<M$，只需 $2<\dfrac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a}$，由此可得到答案.

【详解】

取 $a=b=1$，$a_{n+1}=a_n^2+1$，数列 $\{a_n\}$ 恒单调递增，且不存在最大值，故排除 **AB** 选项；

由蛛网图可知，$ax^2+b=x$ 存在两个不动点，且 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a}$，



因为当 $0<a_1<x_1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，则 $a_n<x_1$；

当 $x_1<a_1<x_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，则 $x_1<a_n\le a_1$；

所以要使 $a_n<M$，只需要 $0<a_1<x_2$，故 $2<\dfrac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a}$，化简得 $b<2-4a$ 且 $b>0$.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查递推数列的综合运用，考查逻辑推理能力，属于难题.

6、D

【解析】

由半圆面积之比，可求出两个直角边 AB,AC 的长度之比，从而可知 $\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，结合同角三角函数的基本关系，即可求出 $\sin\alpha,\cos\alpha$，由二倍角公式即可求出 $\sin 2\alpha$.

【详解】

解：由题意知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，以 AB 为直径的半圆面积 $S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$，

以 AC 为直径的半圆面积 $S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$，则 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{1}{4}$，即 $\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了同角三角函数的基本关系，考查了二倍角公式.本题的关键是由面积比求出角的正切值.

7、C

【解析】

①举反例，如直线 x、y、z 位于正方体的三条共点棱时②用垂直于同一平面的两直线平行判断.③用垂直于同一直线的两平面平行判断.④举例，如 x、y、z 位于正方体的三个共点侧面时.

【详解】

①当直线 x、y、z 位于正方体的三条共点棱时,不正确；

②因为垂直于同一平面的两直线平行,正确；

③因为垂直于同一直线的两平面平行,正确；

④如 x、y、z 位于正方体的三个共点侧面时，不正确.

故选:C.

【点睛】

此题考查立体几何中线面关系，选择题一般可通过特殊值法进行排除，属于简单题目.

8、D

【解析】

分别求出球和圆柱的体积，然后可得比值.

【详解】

设圆柱的底面圆半径为r，则$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以圆柱的体积$V_1=\pi\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\times 2=6\pi$.又球的体积

$V_2=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$，所以球的体积与圆柱的体积的比$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{32\pi}{3}}{6\pi}=\frac{16}{9}$，故选 **D.**

【点睛】

本题主要考查几何体的体积求解，侧重考查数学运算的核心素养.

9、**A**

【解析】

由题意可知直线过定点即为圆心，由此得到A,B坐标的关系，再根据点差法得到直线的斜率k与A,B坐标的关系，由此化简并求解出离心率的取值范围.

【详解】

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，且线$l:kx-y-3k+1=0$过定点$\left(3,1\right)$即为$C_2$的圆心，

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=x_C+x_D=2\times 3=6\\ y_1+y_2=y_C+y_D=2\times 1=2\end{cases}$，

又因为$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$，所以$b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)=-a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)$，

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以$k=-\frac{3b^2}{a^2}\in\left[-2,-1\right]$，

所以$\frac{b^2}{a^2}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，所以$\frac{a^2-c^2}{a^2}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，所以$\left(1-e^2\right)\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，

所以$e\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查椭圆与圆的综合应用，着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用，难度一般.通过运用点差法达到“设而不求”的目的，大大简化运算.

10、**C**

【解析】

由题意可利用等比数列的求和公式得莞草与蒲草n天后长度，进而可得：$2\times\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2-1}$，解出即可得出.

【详解】

由题意可得莞草与蒲草第 n 天的长度分别为 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n=1\times 2^{n-1}$

据题意得：$2\times\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2-1}$， 解得 $2^n=12$，

$\therefore n=\frac{lg12}{lg2}=2+\frac{lg3}{lg2}\approx 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式与求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

11、D

【解析】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N，交 y 轴于 Q，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$，设 $P(x,y)$， $x>0$，则

$\frac{|PM|^2}{|PF|-1}=x+\frac{4}{x}$，利用均值不等式得到答案.

【详解】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N，交 y 轴于 Q，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$，

设 $P(x,y)$， $x>0$，则 $\frac{|PM|^2}{|PF|-1}=\frac{|PM|^2}{|PQ|}=\frac{(x-2)^2+y^2}{x}=\frac{(x-2)^2+4x}{x}=x+\frac{4}{x}\geq 4$，

当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立.

故选：D.