Thanks

第一章　三角函数

§6　函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质与图象

第2课时　函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质

学习与目标

1．掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期、单调性及最值的求法．

2．理解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的对称性．

自主通道

填 一 填

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$的性质

定义域	**R**
值域	$\boxed{1}$ $[-A,\ A]$
周期	$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

奇偶性	$\varphi=$ 2 __$k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$__时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$是奇函数；$\varphi=$ 3 __$k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$__时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$是偶函数
对称轴方程	由 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$求得
对称中心	由 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$求得
单调性	单调递增区间由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$求得； 单调递减区间由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$求得

【点睛】　周期性：$y=A\cos(\omega x+\varphi)(A，\omega\neq 0)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.还需注意：根据图象可得，$y=A|f(\omega x+\varphi)|(A，\omega，\varphi$ 为常数，且 $A\neq 0，\omega\neq 0)$，f 为 sin，cos 时，其最小正周期都是$\frac{\pi}{|\omega|}$.

判 一 判

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)

1．函数 $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$的振幅是$-2$.(　×　)

2．函数 $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的初相是$\frac{\pi}{4}$.(　×　)

3．函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象的对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.(　√　)

探究通道

类型一　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的最值问题

【例】　求下列函数的最大值、最小值，以及取得最大值、最小值时相应 x 的取值集合.

(1)$y=-3\sin 2x$；

(2)$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，最小正周期是 π.

[解] (1)函数 $y=-3\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 3，最小值是 -3.

令 $z=2x$，使函数 $y=-3\sin z$，$z\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 z 的集合是 $\left\{z\,\middle|\,z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.因此使函数 $y=-3\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最大值的 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.同理，使函数 $y=-3\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$ 取得最小值的 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，则函数 $f(x)$的最大值为 2，此时 $2x+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，即自变量 x 的取值集合是 $\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；函数 $f(x)$的最小值为-2，此时 $2x+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即自变量 x 的取值集合是$\left\{x\middle|x=k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

方法总结

求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in[m,n]$的值域的步骤：

(1)换元，令 $u=\omega x+\varphi$，并求 u 的取值范围；

(2)作出 $y=\sin u$(注意 u 的取值范围)的图象；

(3)结合图象求出值域.

[跟踪训练]　函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[0,\ \pi]$取得最大值时自变量 x 的值为$\underline{\ \frac{\pi}{12}\ }$.

解析　当函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取得最大值时，$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $x\in[0,\ \pi]$，故 $x=\frac{\pi}{12}$.

类型 二　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质及应用(自主探究)

1．若函数 $y=\sin(x+\varphi)(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$是 **R** 上的偶函数，则 $\varphi=$(　C　)

A．0　B.$\frac{\pi}{4}$　C.$\frac{\pi}{2}$　D．π

解析　因为函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$在 $\varphi=k\pi\pm\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时为偶函数，且 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R}，\omega>0)$的最小正周期为 π，将 $y=f(x)$的图象向左平移$|\varphi|$个单位长度，所得图象对应的函数为偶函数，则 φ 的一个值是(D)

A.$\frac{\pi}{2}$　B.$\frac{3\pi}{8}$　C.$\frac{\pi}{4}$　D.$\frac{\pi}{8}$

解析 因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R}，\omega>0)$的最小正周期为 π，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以将 $y=f(x)$的图象向左平移$|\varphi|$个单位长度，得到的图象对应的函数解析式为 $y=\sin\left[2(x+|\varphi|)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+2|\varphi|+\frac{\pi}{4}\right)$.因为所得函数为偶函数，所以 $2|\varphi|+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得$|\varphi|=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，所以当 $k=0$ 时，$|\varphi|=\frac{\pi}{8}$.

故 φ 的一个值是$\frac{\pi}{8}$.

3．求下列函数的最小正周期：

(1)$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$；

(2)$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$.

解 (1)$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

4．求下列函数的单调递减区间．

(1)$f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(2)$g(x)=\cos\left(-2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

解 (1)令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi+\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间是$\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},\ k\pi+\frac{7\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)函数 $g(x)=\cos\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore g(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\pi+\frac{7\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

方法总结

1．关于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的对称性与奇偶性

①将 $\omega x+\varphi$ 看作整体，代入到 $y=\sin x$ 的对称中心、对称轴的表达式可以求出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的对称中心、对称轴．

②若函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$为奇函数，则 $\varphi=\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，若函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$为偶函数，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

2．求解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的单调区间的四个步骤

①将 ω 化为正值.

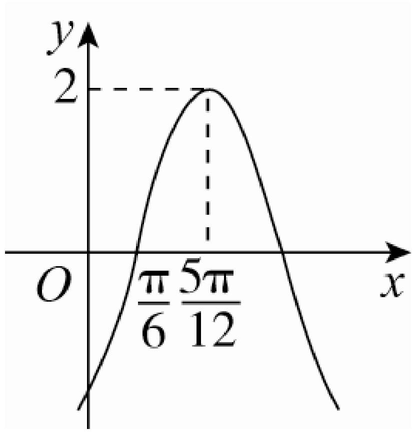
②根据 A 的符号确定应代入 $y=\sin x$ 的单调递增区间，还是单调递减区间.

③将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体，代入到上述的单调区间中解出 x 的取值范围，即为函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调区间.

④如果要求函数在给定区间上的单调区间，则给 k 赋值求单调区间.

类型 三　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质的综合应用

【例】　函数 $h(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0，\omega>0，|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示．若把函数 $h(x)$的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $f(x)$的图象．



(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)若函数 $y=f(x+\varphi')\left(0<\varphi'<\dfrac{\pi}{2}\right)$是奇函数，求函数 $g(x)=\cos(2x-\varphi')$在$[0,2\pi]$上的单调递减区间．

[解]　(1)由图象可知 $A=2$，最小正周期 $T=4\times\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$，$\therefore h(x)=2\sin(2x+\varphi)$．又 $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，$\therefore 2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$\therefore h(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.由题意得，函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)$\because y=f(x+\varphi')=2\sin\left(x+\varphi'-\frac{\pi}{3}\right)$是奇函数，$\therefore\varphi'-\frac{\pi}{3}=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi'=\frac{\pi}{3}+n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$.

又$\because 0<\varphi' <\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi' =\frac{\pi}{3}$，$\therefore g(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2m\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2m\pi+\pi$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $m\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant m\pi+\frac{2\pi}{3}$，$m\in\mathbf{Z}$.

令 $m=0$，得$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$；

令 $m=1$，得$\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$.

$\therefore$函数 $g(x)$在$[0,2\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{3}\right]$.

方法总结

三角函数图象与性质综合问题的求解思路

(1)将函数整理成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(\omega>0)$的形式；

(2)把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体；

(3)借助正弦函数 $y=\sin x$ 的图象与性质(如定义域、值域、最值、周期性、对称性、单调性等)解决相关问题.

[跟踪训练] 设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

(1)求 φ 的值;

(2)求函数 $f(x)$的单调递增区间.

解 (1)$\because x=\frac{\pi}{8}$是函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$图象的一条对称轴，$\therefore 2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.又$-\pi<\varphi<0$，$\therefore\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$的单调递增区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{8}, k\pi+\frac{5\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

探 究 窗 破解有关三角函数单调性的参数问题

解决这类与单调性有关的参数问题，一是直接先求出括号内整体的取值范围，然后列不等式求解；二是先求出 $f(x)$的单调区间，则所给区间为该区间子集，将问题转化为集合间的关系解决.

【典例】 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$上单调递减，则 ω 的取值范围是(　　)

A.$\left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right]$ B.$\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]$ C.$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ D．$(0,2)$

[解析]　由$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，$\omega>0$，

得$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}$.

又因为 $y=\sin x$ 在$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，

所以$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2},\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$　解得$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，故选 A.

[答案]　A

[跟踪训练]　已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)$对称，且在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调，求 φ 和 ω 的值.

解　由 $f(x)$是偶函数，得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\because 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{2}$.

由 $f(x)$的图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)$对称，得 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$.

$\because f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\omega\pi}{4}$,

$\therefore \cos\frac{3\omega\pi}{4}=0$.

又$\because \omega>0$，$\therefore \frac{3\omega\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{N}$，

即 $\omega=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}k$，$k\in\mathbf{N}$.

当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，

此时 $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)$在$\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减；

当 $k=1$ 时，$\omega=2$，此时 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减；

当 $k\geqslant2$ 时，$\omega\geqslant\frac{10}{3}$，此时 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上不单调.

综上，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\omega=\frac{2}{3}$或 $\omega=2$.

巩固通道

1．函数 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$是(　A　)

A．最小正周期为 π 的奇函数　B．最小正周期为 π 的偶函数

C．最小正周期为 2π 的奇函数　D．最小正周期为 2π 的偶函数

解析　函数 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\sin 2x$，故为奇函数且最小正周期为 π，故选 A.