专题五 平面向量及其应用、复数

考点20
平面向量的概念及线性运算、平面向量基本定理及坐标表示

经典3+2

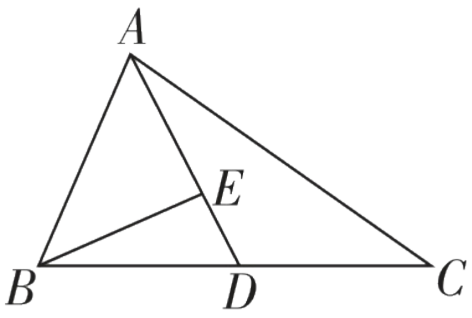
1.[2024广东湛江统考]已知向量$\boldsymbol{a}=(-1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,$\boldsymbol{c}=(2,m)$，若$\boldsymbol{b}//(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，则$m=$(**B**)

A.-1　　B.-2　　C.1　　D.2

【解析】由$\boldsymbol{a}=(-1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,$\boldsymbol{c}=(2,m)$，得$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-4,6-m)$，因为$\boldsymbol{b}//(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，所以$-(6-m)+8=0$，解得$m=-2$.故选B.

2.[2024贵州贵阳摸底]如图，在△ ABC中，点D为线段BC的中点，点E是线段AD上靠近D的三等分点，则$\overrightarrow{BE}$ =(　A　)

A.$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B.$-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　C.$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D.$\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$



【解析】

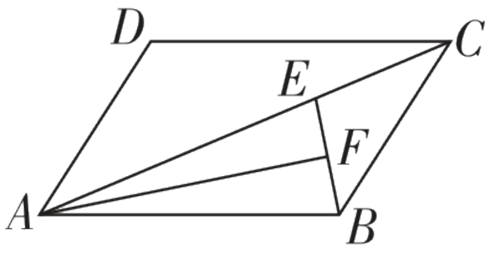
找准基底$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$

抓住几何关系 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

→ 结果$\overrightarrow{BE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

→ 选 A

3.[2024江西部分学校联考]如图，在平行四边形$ABCD$中，E是对角线AC上靠近点C的三等分点，点F为BE的中点，若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$x+y=$(A)



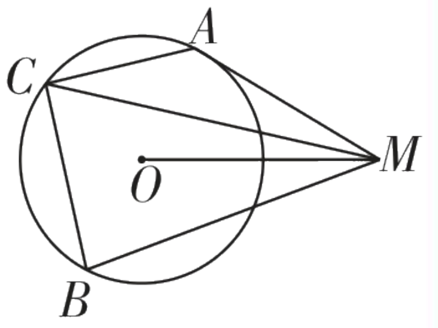
A.$\frac{7}{6}$ B.$\frac{4}{5}$ C.$\frac{5}{6}$ D.$\frac{6}{7}$

【解析】$\because$ 点F为BE的中点，且E是对角线AC上靠近点C的三等分点，

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=$

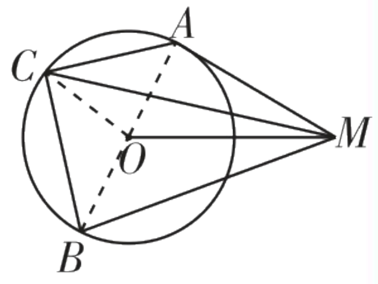
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,$\therefore x=\frac{5}{6}$,$y=\frac{1}{3}$,$\therefore x+y=\frac{7}{6}$，故选A.

4.**较难**[2024浙江宁波段考]如图，A，B，C三点在半径为1的圆O上运动，且$AC \perp BC$，M是圆O外一点，$OM = 2$，则$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$的最大值是(C)



A.5　　B.8　　C.10　　D.12

【解析】连接AB，OC,如图所示,因为$AC \perp BC$，所以AB为圆O的一条直径，故O为AB的中点，所以$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$，所以

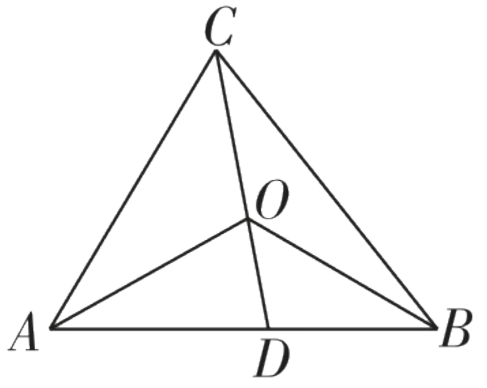


$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MO} + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})| = |4\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{OC}| \leq 4|\overrightarrow{MO}| + 2|\overrightarrow{OC}| = 4 \times 2 + 2 \times 1 = 10$，

当且仅当M,O,C三点共线且$\overrightarrow{MO}$,$\overrightarrow{OC}$同向时，等号成立．因此$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$的最大值是10，故选C.

5.**较难**[2023陕西安康一模]已知O是$\triangle ABC$内一点，$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0$，若$\triangle AOB$与$\triangle ABC$的面积的比值为$\frac{4}{7}$，则实数$m$的值为（ D ）

A.$-\frac{10}{3}$　B.$\frac{10}{3}$　C.$-\frac{20}{3}$　D.$\frac{20}{3}$



【解析】解法一　由$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=-m\overrightarrow{OC}$得$\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}$，设$-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$，则$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$，则$A$，$B$，$D$三点共线，如图所示，$\because \overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OD}$反向共线，$\therefore m>0$，

$\therefore \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{m}{5}$，$\therefore \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\frac{m}{5}}{\frac{m}{5}+1}=\frac{m}{m+5}$，$\therefore \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{m}{m+5}=\frac{4}{7}$,得$m=\frac{20}{3}$．故选D．

解法二　$\because 2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0$,$\therefore$ 由奔驰定理可知$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=2:3:m$，

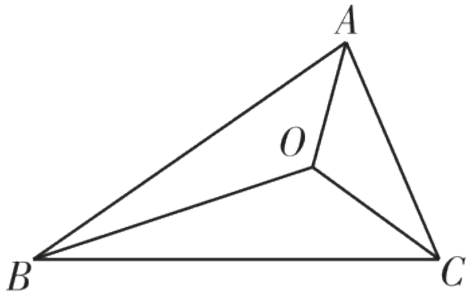
$\therefore S_{\triangle AOB}:S_{\triangle ABC}=m:(2+3+m)$，$\therefore \frac{m}{2+3+m}=\frac{4}{7}$,解得$m=\frac{20}{3}$，故选D.

二级结论

奔驰定理

如图，已知O是$\triangle ABC$内的一点，$\triangle BOC$,$\triangle AOC$,$\triangle AOB$的面积分别为$S_{\triangle OBC}$，$S_{\triangle OAC}$，$S_{\triangle OAB}$，则$S_{\triangle OBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\triangle OAC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\triangle OAB}\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

推论:若O是$\triangle ABC$内的一点，且$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}(xyz\neq 0)$，则$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COA}:S_{\triangle AOB}=x:y:z$.



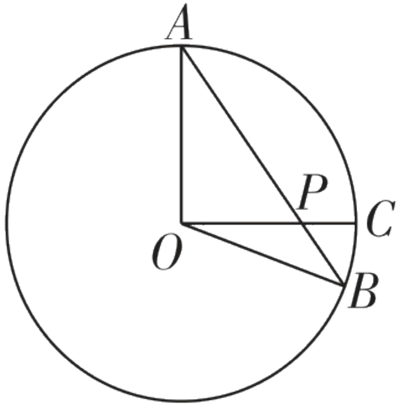
6. [多选] [2023昆明市第一中学模拟]已知向量$\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(m+1,m-2)$，若连接$AB$,$BC$,$AC$能构成三角形，则实数$m$可以是(　ABD　)

A.-2　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.-1

【解析】 由题知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(1,-3)=(1,2)$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+1,m-2)-(1,-3)=(m,m+1)$.假设$A$，$B$，$C$三点共线，则$1\times(m+1)-2m=0$，即$m=1$．所以若连接$AB$,$BC$,$AC$能构成三角形，则$m\neq1$.故选ABD.

7.**较难** [多选] [2023辽宁部分学校联考]如图所示，点A，B，C是圆O上的三点，线段OC与线段AB交于圆内一点P，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OC}=\mu\overrightarrow{OA}+3\mu\overrightarrow{OB}$，则(AC)



A.当P为线段OC的中点时，$\mu=\frac{1}{2}$

B.当P为线段OC的中点时，$\mu=\frac{1}{3}$

C.无论μ 取何值，恒有$\lambda=\frac{3}{4}$

D.存在$\mu\in\mathbf{R}$，$\lambda=\frac{1}{2}$

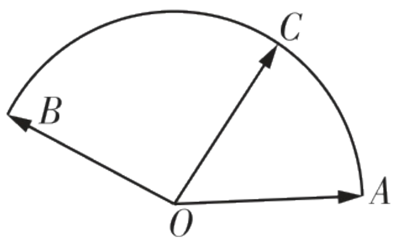
【解析】由题知，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，因为$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OC}$共线，$\overrightarrow{OC}=\mu\overrightarrow{OA}+3\mu\overrightarrow{OB}$,所以$\frac{1-\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{3\mu}$，得$\lambda=\frac{3}{4}$，故C正确，D错误；当$P$为线段$OC$的中点时，

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则$\begin{cases}1-\lambda=\frac{1}{2}\mu,\\ \lambda=\frac{1}{2}\times 3\mu,\end{cases}$得$\begin{cases}\mu=\frac{1}{2},\\ \lambda=\frac{3}{4},\end{cases}$故A正确，B错误.故选AC.

8.[2024江西宜春部分学校联考]已知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则非零向量$\boldsymbol{a}$的坐标为$\underline{(-2,-4)}$.

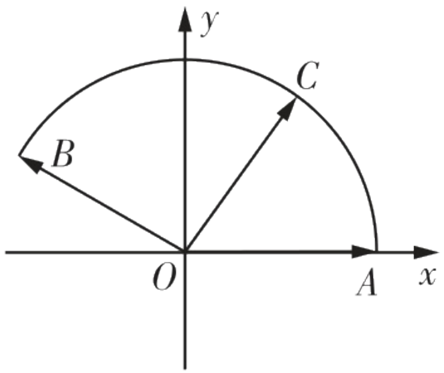
【解析】 $\because \boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{a}$为非零向量，$\therefore$ 存在实数$\lambda \neq 0$，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$成立，又$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\therefore \boldsymbol{a}=(\lambda,2\lambda)$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda+1,2\lambda+2)$，$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\lambda+1)^2+(2\lambda+2)^2}=\sqrt{5}$，解得$\lambda=-2$或$\lambda=0$（舍去），则非零向量$\boldsymbol{a}$的坐标为$(-2,-4)$.

9.[2023安徽合肥部分学校联考]给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为$\frac{5\pi}{6}$．如图所示，点C在以点O为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动．若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$，$y\in\mathbf{R}$，则$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$的取值范围是$\underline{[-1,\frac{1}{2}]}$．

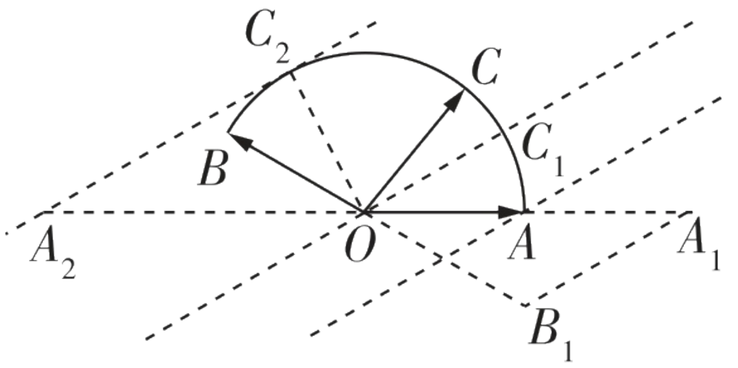


【解析】

解法一 如图，分别以直线OA，过点O的OA的垂线为x轴，y轴，O为坐标原点，建立平面直角坐标系xOy，设$\angle AOC=\theta$ ，则$C(\cos\theta,\sin\theta)$.因为$A(1,0)$,$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{OA}=(1,0)$,$\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=(\cos\theta,\sin\theta)$.由$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$得，$x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\cos\theta$,且$\frac{1}{2}y=\sin\theta$.于是$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.点$C$在圆弧



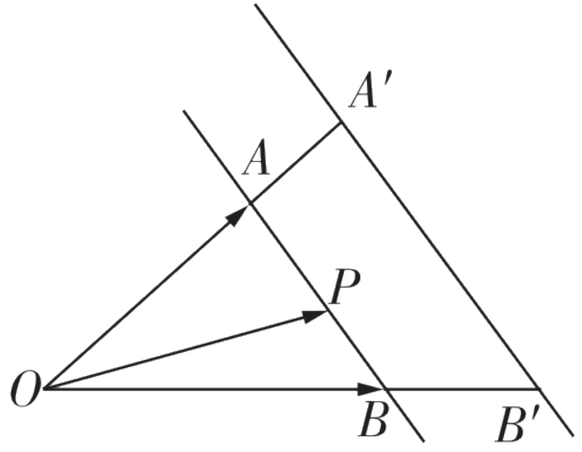
解法二 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\frac{x}{2}(2\overrightarrow{OA})+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}\right)$,如图，令$\overrightarrow{OA_1}=2\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB_1}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}$，连接$A_1B_1$,易得$A_1B_1=OB_1$,则$\angle OA_1B_1=\frac{\pi}{6}$.令$\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y=k$，过点$O$作$A_1B_1$的平行线交$\overset{\frown}{AB}$于点$C_1$，由等和线知识知，当点$C$在$\overset{\frown}{AC_1}$上运动时，$k\geq 0$；当点$C$在$\overset{\frown}{BC_1}$（不包含点$C_1$）上运动时，$k<0$.所以当点$C$与点$A$重合时，$k$取得最大值，此时$k=\frac{OA}{OA_1}=\frac{1}{2}$.当与$A_1B_1$平行的直线与$\overset{\frown}{AB}$相切时，$k$取得最小值，设切点为$C_2$,切线与线段$OA$的反向延长线交于$A_2$,连接$OC_2$,则$OC_2\perp A_2C_2$,且$OC_2=1$.因为$\angle OA_1B_1=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle OA_2C_2=\frac{\pi}{6}$，所以$OA_2=2$，此时$k=-\frac{OA_2}{OA_1}=-1$.综上，$k\in[-1,\frac{1}{2}]$，即$\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y\in[-1,\frac{1}{2}]$.



二级结论

等和线

如图所示，对于表示这一平面内所有向量的一个基底$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，若点$P$在直线$AB$上或在平行于$AB$的直线$A'B'$上，则$\lambda+\mu=k$（定值），反之也成立．我们称直线$AB$以及与直线$AB$平行的直线$A'B'$为等和线．等和线有如下6个性质：



（1）当等和线$A'B'$恰为直线AB时，$k=1$.

（2）当等和线$A'B'$在点O和直线AB之间时，$k\in(0,1)$.

（3）当直线AB在点O和等和线$A'B'$之间时，$k\in(1,+\infty)$.

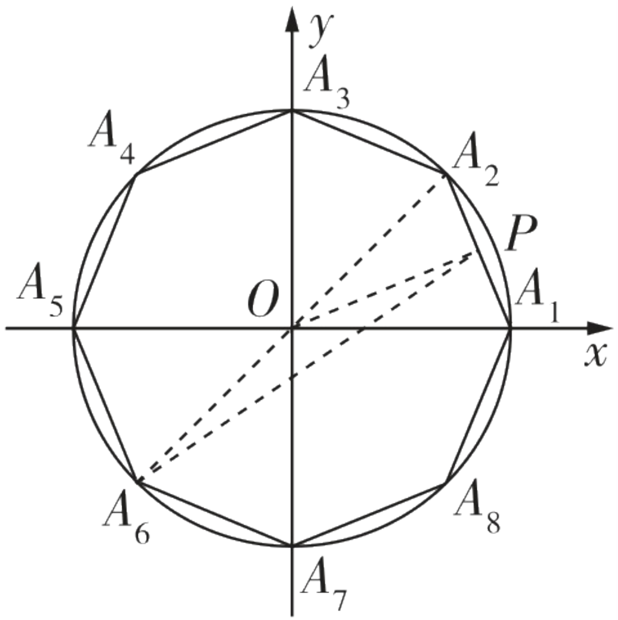
（4）当等和线$A'B'$过点O时，$k=0$.

（5）若两等和线关于点O对称，则它们对应的定值k互为相反数.

（6）定值k与点O到等和线的距离有关，$|k|=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$.

10.[2022浙江卷]设点P在单位圆的内接正八边形$A_1A_2\cdots A_8$的边A_1A_2上，则$\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$的取值范围是$\underline{[12+2\sqrt{2},16]}$.

【解析】 记正八边形$A_1A_2\cdots A_8$的中心为O,以O为坐标原点,以OA_1,OA_3所在直线分别为x轴，y轴建立如图所示的平面直角坐标系，连接OP，OA_2,OA_6,PA_6，根据题意可得$\overrightarrow{PA}_2^2+\overrightarrow{PA}_6^2=(\overrightarrow{OA}_2-\overrightarrow{OP})^2+(\overrightarrow{OA}_6-\overrightarrow{OP})^2$,易知$\overrightarrow{OA}_6=-\overrightarrow{OA}_2$，所以



$\overrightarrow{PA}_2^2+\overrightarrow{PA}_6^2=2\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OA}_2^2=2\overrightarrow{OP}^2+2$,

同理得，$\overrightarrow{PA}_1^2+\overrightarrow{PA}_5^2=2\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OA}_1^2=2\overrightarrow{OP}^2+2$,

$\overrightarrow{PA}_4^2+\overrightarrow{PA}_8^2=2\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OA}_4^2=2\overrightarrow{OP}^2+2$,

$\overrightarrow{PA}_3^2+\overrightarrow{PA}_7^2=2\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OA}_3^2=2\overrightarrow{OP}^2+2$,

所以$\overrightarrow{PA}_1^2+\overrightarrow{PA}_2^2+\cdots+\overrightarrow{PA}_8^2=8\overrightarrow{OP}^2+8$,

在$\triangle OA_1A_2$中，易知$1\cdot\cos\frac{\pi}{8}\le|\overrightarrow{OP}|\le1$,

所以$12+2\sqrt{2}\le8\overrightarrow{OP}^2+8\le16$，所以$\overrightarrow{PA}_1^2+\overrightarrow{PA}_2^2+\cdots+\overrightarrow{PA}_8^2$的取值范围为$[12+2\sqrt{2},16]$.

考点21 平面向量的数量积及平面向量的应用

经典3+2

1.[2024天星原创]已知向量$\boldsymbol{a}=(\lambda+1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-\lambda)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则向量$\boldsymbol{c}=(1,2)$在向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$上的投影向量为(D)

A.$(3,1)$ B.$(1,3)$ C.$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ D.$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

【解析】**第1步：根据向量垂直求出λ**

依题意得$\boldsymbol{a}=(\lambda+1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-\lambda)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$\lambda+1-2\lambda=0$，解得$\lambda=1$，

第2步：利用向量的坐标运算写出$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的坐标

所以$\boldsymbol{a}=(2,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,1)$，

第3步：根据投影向量的概念求解

则向量$\boldsymbol{c}=(1,2)$在向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{3\times1+1\times2}{\sqrt{3^2+1^2}}\cdot\frac{(3,1)}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{10}(3,1)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.故选D.

2.[2024武汉部分学校调研]两个单位向量$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$满足$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，则向量$\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_2$的夹角为(**D**)

A.30°　　B.60°　　C.120°　　D.150°

【解析】 解法一 因为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是单位向量，所以$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，又$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，所以

$(\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2^2=-\sqrt{3}$，$(\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2)^2=\boldsymbol{e}_1^2-2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_2^2=1+3=4$，所以

$|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|=2$.设$\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_2$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|\cdot|\boldsymbol{e}_2|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$,因为$0°\leq\theta\leq180°$，所以$\theta=150°$，

故选D.

解法二 因为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是单位向量，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，所以不妨设$\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，（题眼）所以

$\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2=(1,0)-\sqrt{3}(0,1)=(1,-\sqrt{3})$.设$\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_2$的夹角为$\theta$，则

$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|\cdot|\boldsymbol{e}_2|}=\frac{(1,-\sqrt{3})\cdot(0,1)}{\left|\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\right|\times1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$0°\leq\theta\leq180°$，所以$\theta=150°$，故选D.

3.[2024河南名校联考]已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$,$\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$,则向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为(D)

A.$\frac{\pi}{6}$ B.$\frac{\pi}{3}$ C.$\frac{2\pi}{3}$ D.$\frac{5\pi}{6}$

【解析】因为$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=0$，即$\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ①.因为$\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=0$即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}^2=0$ ②.由①②可得$-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2=3\boldsymbol{b}^2$，所以$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-3\boldsymbol{b}^2}{2\ \sqrt{3}|\boldsymbol{b}|^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$.故选D.

4.[2023湖北武汉质检]已知$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}$为单位向量，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leq 0$，则$\boldsymbol{b}=$(D)

A.$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　B.$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　C.$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　D.$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

【解析】由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leq 0$，可得$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leq 0$，得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+1\leq 0$，得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leq -1$，又$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\geq -1$，所以$\cos\langle a,b\rangle=-1$，得$\langle a,b\rangle=180°$，可知$a$与$b$共线且反向.

通解 不妨设$\boldsymbol{b}=(x,y)$，因为$\boldsymbol{b}$为单位向量，（题眼）所以$|\boldsymbol{b}|=1$.由$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\2x-y=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{5},\\y=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{5}}{5},\\y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$（注意不要漏解）当$\boldsymbol{b}=(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$时，$\boldsymbol{a}=\sqrt{5}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线且同向，不合题意；当$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$时，$\boldsymbol{a}=-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线且反向，符合题意.故选D.

光速解 $\boldsymbol{b}=-\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，故选D.（提示：与$\boldsymbol{a}$共线的单位向量可表示为$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，“$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$”表示与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量，“$-\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$”表示与$\boldsymbol{a}$反向的单位向量）

5.[2023全国乙卷（文）]正方形$ABCD$的边长是2，E是AB的中点，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ =(　**B**　)

A.$\sqrt{5}$　　B.3　　C.$2\sqrt{5}$　　D.5

【解析】 解法一　由题意知，$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，由题意知$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，所以$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=4-1=3$，故选B.

解法二　以点A为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$的方向分别为x,y轴的正方向建立平面直角坐标系，则$E(1,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，则$\overrightarrow{EC}=(1,2)$，$\overrightarrow{ED}=(-1,2)$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=-1+4=3$，故选B.

解后反思

用基底法求向量的数量积时，重点是根据题中的已知条件，看看哪两个向量可以作为表示平面内所有向量的一个基底，然后将所求向量用基底表示出来，从而求得数量积.

拓展变式

变图形[2023武汉市武昌区质检]在△ ABC中,$AB=2$,$BC=1$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,若点M满足$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=$(C)

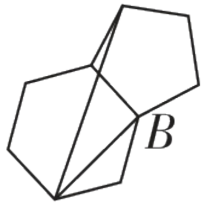
A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.1　　D.$\frac{4}{3}$

【解析】因为在△ ABC中，点M满足$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$,所以$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$,（题眼）又$AB=2$,$BC=1$,

$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=2\times1\times\frac{1}{2}=1$,所以

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=1$,故选C.

6.[2023苏北四市调研]足球是由12个正五边形和20个正六边形组成的.如图，将足球上的一个正六边形和跟它相邻的正五边形展开放平，若正多边形边长为a，A，B，C分别为正多边形的顶点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$(A)

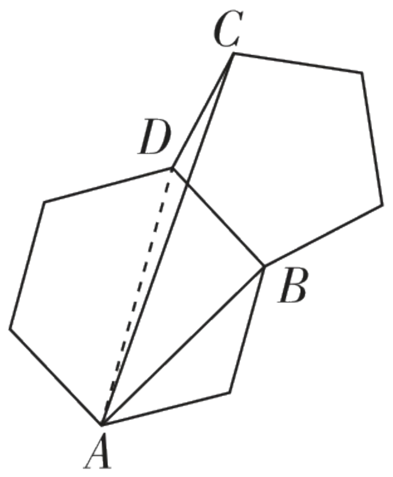


A.$(3+\sqrt{3}\cos 18^{\circ})a^2$　B.$(\sqrt{3}+\cos 18^{\circ})a^2$　C.$(3+\sqrt{2}\cos 18^{\circ})a^2$　D.$(3\sqrt{3}+3\cos 18^{\circ})a^2$

【解析】如图，设两个正多边形的公共边的另一个顶点为D，连接AD，则$<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}> = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$,$AB = \sqrt{3}a,BD = a,AB \perp BD$,$\therefore <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}> = 30^\circ$.又

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$,

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 2\sqrt{3}a^2\cos 30^\circ + \sqrt{3}a^2\cos 18^\circ = (3 + \sqrt{3}\cos 18^\circ)a^2$.故选A.



规律总结

生活中的向量问题，难点是找准它们的相对位置，找准夹角和长度——

长度多用平面几何知识，夹角多用勾股定理或正、余弦定理求解.本题中关键是找角，正六边形和正五边形的内角是熟知的，结合平面几何知识就能找到向量的夹角.

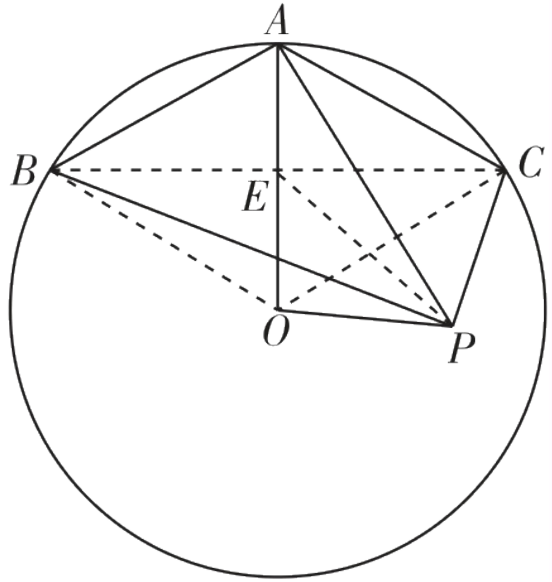
7.**较难**[2024四川南充部分学校联考]已知半径为2的圆O上有三点A,B,C,满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=0$,点$P$是圆内一点,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围是(A)

A.$[-4,14)$　　B.$(-4,14]$　　C.$[-4,4)$　　D.$(-4,4]$

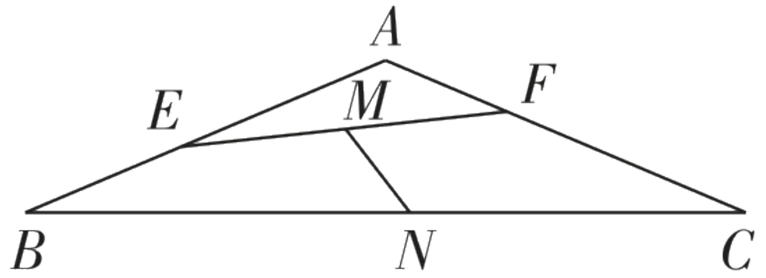
【解析】 由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}$,如图，连接$OB,OC$,则四边形$ABOC$为平行四边形,又$OB=OC$,所以四边形$ABOC$为菱形,连接$BC$,交$AO$于点$E$,则$BC=2\sqrt{3}$.连接$PE$,由极化恒等式得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{PE}^2-1$,

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PE}^2-3$,$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}^2-4$,$\because P$是圆内一点,

$\therefore 0\le|\overrightarrow{PE}|<3$,$\therefore -4\le 2\overrightarrow{PE}^2-4<14$,即$-4\le\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}<14$,选A.



8.**较难**[2023山东青岛二中模拟]如图，在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC=1,\angle BAC=120^\circ$，$E,F$分别是边$AB,AC$上的点，且$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC},\lambda$，$\mu\in(0,1)$,且$\lambda+4\mu=1$，若线段$EF,BC$的中点分别为$M,N$，则向量$\overrightarrow{MN}$的模的最小值为(**C**)



A.$\frac{1}{7}$　　B.$\frac{3}{7}$　　C.$\frac{\sqrt{7}}{7}$　　D.$\frac{3\sqrt{7}}{7}$

【解析】解法一 连接AM,AN，由中线向量的表达式得$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-\mu)\overrightarrow{AC}$.两边平方得$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}(1-\lambda)^2|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(1-\lambda)^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2+\frac{1}{2}(1-\lambda)(1-\mu)\cos 120°$，因为$\lambda+4\mu=1$，所以$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}(4\mu)^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2+\frac{1}{2}(4\mu)(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}\left(\mu-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{7}$，所以当$\mu=\frac{1}{7}$时，$|\overrightarrow{MN}|^2$取得最小值$\frac{1}{7}$，此时$\lambda=\frac{3}{7}$.所以$|\overrightarrow{MN}|$的最小值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

解法二 因为线段EF,BC的中点分别为M,N，所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC})=\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-\mu)\overrightarrow{AC}$,两边平方得$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}(1-\lambda)^2|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(1-\lambda)^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2+\frac{1}{2}(1-\lambda)(1-\mu)\cos 120°$.

因为$\lambda+4\mu=1$，所以$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}(4\mu)^2+\frac{1}{4}(1-\mu)^2+\frac{1}{2}(4\mu)(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}\left(\mu-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{7}$，所以当$\mu=\frac{1}{7}$时，$|\overrightarrow{MN}|^2$取得最小值$\frac{1}{7}$，此时$\lambda=\frac{3}{7}$.所以$|\overrightarrow{MN}|$的最小值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

9.**较难**[2023重庆九龙坡区三模]已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，且夹角为$\frac{\pi}{3}$，若向量$\boldsymbol{c}$满足$(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则$|\boldsymbol{c}|$的最大值为(D)

A.$\frac{7+\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$

【解析】**第1步：统一起点，转化向量条件**

将向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的起点平移到点$O$，设向量$2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的终点分别为$A,B,C$，则$\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$，

$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$，

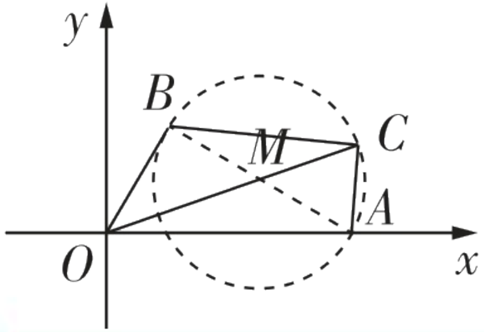
由$(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，连接$AB$,则点$C$在以$AB$为直径的圆上.

第2步：建系写坐标，寻找点C的轨迹

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，且夹角为$\frac{\pi}{3}$，则以$O$为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系，（【解题关键】建立合适的坐标系，一般将坐标原点选在已知长度和夹角的两个向量的起点处）

则$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则$A(2,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以以AB为直径的圆的圆心为$M\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，半径为$\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



第3步：利用圆的几何性质，巧推目标最值

连接OM,则$|OM|=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以$|\boldsymbol{c}|=|OC|\leq|OM|+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.（【会转化】$|\boldsymbol{c}|$可以转化为圆$M$上一点到坐标原点$O$的距离）即$|\boldsymbol{c}|$的最大值为$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$，故选D.

10.**知识综合**[2024安徽合肥八中模拟]如图，已知△ABC是面积为$3\sqrt{3}$的等边三角形，正方形$MNPQ$的面积为2，其各顶点均位于△ABC的内部或三边上，且该正方形可在△ABC内任意旋转，则当$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=0$时，$\left|\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CP}\right|^2=$(A)

A.$2+4\sqrt{3}$　　B.$4+2\sqrt{3}$　　C.$3+2\sqrt{3}$　　D.$2+3\sqrt{3}$