专题四　圆的证明与计算

方法指导

计算圆中的线段长或线段比,通常与勾股定理、垂径定理与三角形的全等、相似等知识结合,形式复杂,无规律性.分析时要重点注意观察已知线段间的关系,选择定理进行线段或者角的转化.特别是要借助圆的相关定理进行弧、弦、角之间的相互转化,找出所求线段与已知线段的关系,从而化未知为已知,解决问题.其中重要而常见的数学思想方法有:

(1)构造思想:

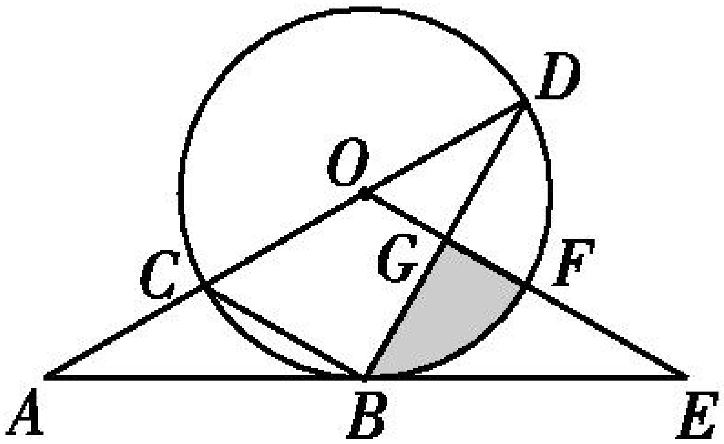
如:①构建矩形转化线段;

②构建“射影定理”基本图研究线段(已知任意两条线段长可求其他所有线段长);
③构造垂径定理模型:弦长一半、弦心距、半径;
④构造勾股定理模型(已知线段长度);
⑤构造三角函数(已知有角度的情况);
⑥找不到,找相似.
(2)方程思想:设出未知数表示关键线段,通过线段之间的关系,特别是发现其中的相等关系建立方程,解决问题;

(3)建模思想:借助基本图形的结论发现问题中的线段关系,把问题分解为若干基本图形的问题,通过基本图形的解题模型快速发现图形中的基本结论,进而找出隐藏的线段之间的数量关系.

类型一 圆基本性质的证明与计算

[典型例题1] 如图所示，AB是⊙O的切线，B为切点，直线AO交⊙O于C，D两点，连接BC，BD，过圆心O作BC的平行线，分别交AB的延长线，⊙O及BD于点E，F，G.



(1)求证:∠D=∠E;

(1)证明:连接OB,如图所示.

∵AB是⊙O的切线,CD为直径,

∴∠OBE=∠CBD=90°.

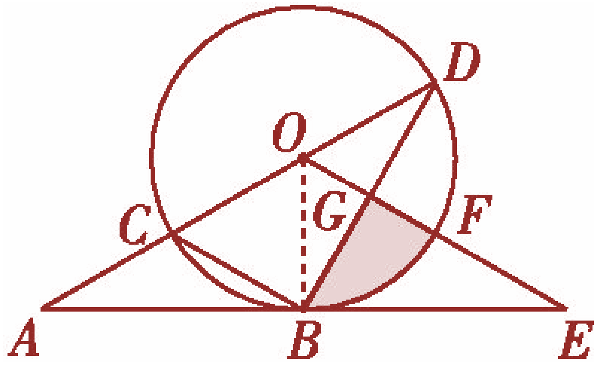
∴∠OBE-∠OBD=∠CBD-∠OBD,即∠DBE=∠OBC.

∵OE//BC,∴∠DOF=∠OCB.

∵OC=OB,∴∠OCB=∠OBC.∴∠DOG=∠EBG.

在△ODG和△BEG中,

∵∠DGO=∠BGE,∠DOG=∠EBG,∴∠D=∠E.



(2)若点F是OE的中点，⊙O的半径为3，求阴影部分的面积.

(2)解：∵F 是 OE 的中点，⊙O 的半径为 3，∴OB=OF=EF=3. ∴OE=6.

在 Rt△OBE 中，∵sin $E=\frac{OB}{OE}=\frac{1}{2}$，∴∠E=30°=∠D. ∴∠BOE=60°.

∵OE∥BC，∠CBD=90°，∴∠OGD=90°.

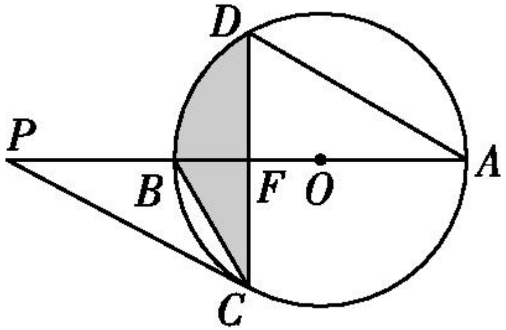
又∵∠BOG=60°，∴∠OBG=30°. ∴$OG=\frac{1}{2}OB=\frac{3}{2}$.

由勾股定理，得 $BG=\sqrt{OB^2-OG^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

∴阴影部分的面积为 $S_{扇形OBF}-S_{\triangle OGB}=\frac{60\pi\times 3^2}{360}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

[强化运用]

如图所示，⊙O的直径AB垂直于弦DC于点F，点P在AB的延长线上，CP与⊙O相切于点C，连接CB.



(1)求证：∠PCB=∠PAD；

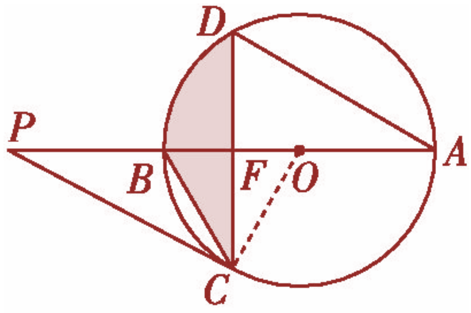
(1)证明：如图①所示，连接OC，

∵OB=OC，∴∠OBC=∠OCB.

由圆周角定理，得∠ADF=∠OBC，∴∠OCB=∠ADF.

∵CP与⊙O相切，∴OC⊥PC. ∴∠PCB+∠OCB=90°.

∵AB⊥DC，∴∠PAD+∠ADF=90°. ∴∠PCB=∠PAD.



图①

(2)若⊙O的直径为4,弦DC平分半径OB,求图中阴影部分的面积.

(2)解:如图②所示,连接 OD,

∵弦 DC 平分半径 OB,∴BF=OF.

在 Rt△ODF 中,$OF=\frac{1}{2}OD$.

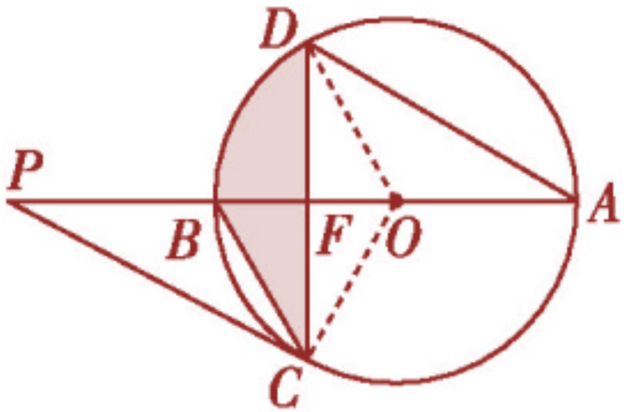
∴∠ODF=30°.∴∠DOF=60°.

∵AB⊥DC,∴DF=FC.

∵BF=OF,AB⊥DC,

∴$S_{\triangle CFB}=S_{\triangle CFO}=S_{\triangle DFO}$.

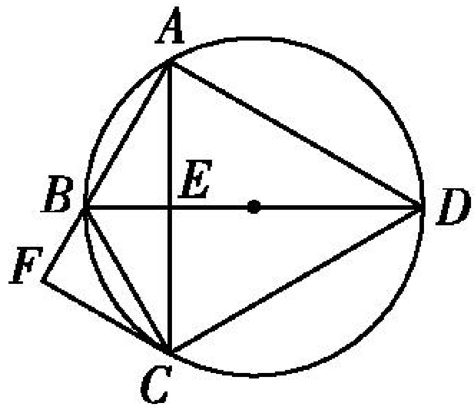
∴$S_{阴影部分}=S_{扇形BOD}=\frac{60\pi\times2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$.



图②

[典型例题2] (2023北京)如图所示,圆内接四边形ABCD的对角线AC,BD交于点E,BD平分∠ABC,∠BAC=∠ADB.

(1)求证:DB平分∠ADC,并求∠BAD的大小



(1)证明:∵∠BAC=∠ADB,∴$AB=BC$.∴∠ADB=∠CDB,

即DB平分∠ADC.

∵BD平分∠ABC,∴∠ABD=∠CBD.∴$AD=CD$.

∴$AB+AD=BC+CD$,即$BAD=BCD$.

∴BD是直径.∴∠BAD=90°.

(2)过点C作CF∥AD交AB的延长线于点F.若AC=AD, BF=2, 求此圆的半径长.

(2)解:∵∠BAD=90°, CF∥AD, ∴∠F+∠BAD=180°, 则∠F=90°.

∵$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$, ∴AD=DC.

∵AC=AD, ∴AC=AD=CD. ∴△ADC是等边三角形, 则∠ADC=60°.

∵DB平分∠ADC, ∴∠CDB=$\frac{1}{2}$∠ADC=30°.

∵BD是直径, ∴∠BCD=90°, 则BC=$\frac{1}{2}$BD.

∵四边形ABCD是圆内接四边形, ∴∠ADC+∠ABC=180°,

则∠ABC=120°. ∴∠FBC=60°.

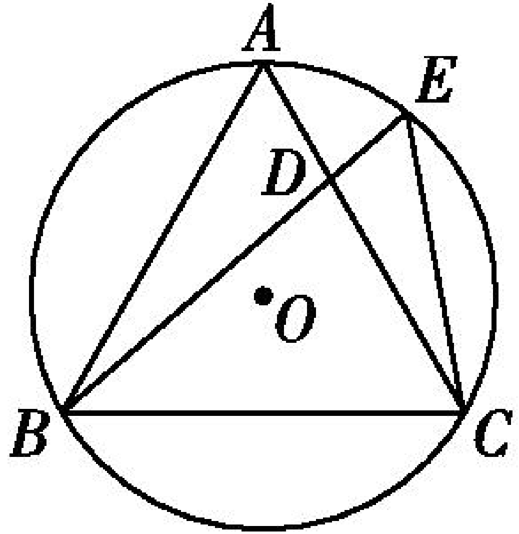
∴∠FCB=90°-60°=30°. ∴FB=$\frac{1}{2}$BC.

∵BF=2, ∴BC=4. ∴BD=2BC=8.

∵BD是直径, ∴此圆半径的长为$\frac{1}{2}$BD=4.

[强化运用]

1.如图所示,边长为6的等边三角形ABC内接于⊙O,点D为AC上的动点(点A,C除外),BD的延长线交⊙O于点E,连接CE.



(1)求证:△CED∽△BAD;

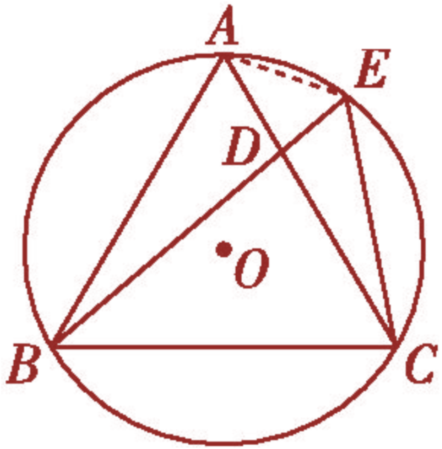
(1)证明:∵$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角是∠A,∠E,

∴∠A=∠E.

又∠BDA=∠CDE,∴△CED∽△BAD.

(2) 当DC=2AD时，求CE的长.

(2)解：∵△ABC是等边三角形，∴AC=AB=BC=6.



∵DC=2AD，∴AC=3AD. ∴AD=2，DC=4.

∵△CED∽△BAD，∴$\frac{AD}{DE}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{CE}$. ∴$\frac{2}{DE}=\frac{BD}{4}$. ∴BD·DE=8.

连接AE，如图所示.

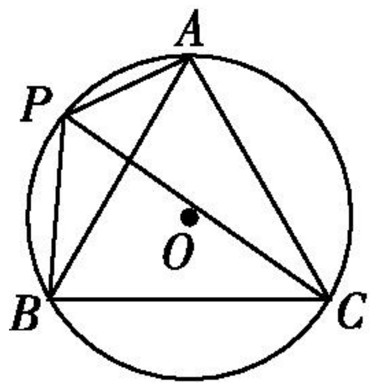
∵AB=BC，∴$AB=BC$. ∴∠BAC=∠BEA.

又∠ABD=∠EBA，∴△ABD∽△EBA. ∴$\frac{AB}{BE}=\frac{BD}{AB}$.

∴$AB^2=BD\cdot BE=BD\cdot(BD+DE)=BD^2+BD\cdot DE$. ∴$6^2=BD^2+8$. ∴$BD=2\sqrt{7}$（负值舍去）.

又∵$\frac{AB}{CE}=\frac{BD}{CD}$，∴$\frac{6}{CE}=\frac{2\sqrt{7}}{4}$. 解得$CE=\frac{12}{7}\sqrt{7}$.

2. 如图所示, ⊙O的半径为1, A, P, B, C是⊙O上的四个点, $\angle APC=\angle CPB=60°$.



(1)判断△ABC的形状, 并说明理由.

解:(1)△ABC是等边三角形. 理由如下:

∵$\angle APC=\angle CPB=60°$,

∠BAC和∠CPB是同弧所对的圆周角, ∠ABC和∠APC是同弧所对的圆周角,

∴$\angle BAC=\angle CPB=60°$, $\angle ABC=\angle APC=60°$.

∴$\angle ACB=180°-\angle ABC-\angle BAC=60°$.

∴△ABC是等边三角形.

(2)探究线段PA,PB,PC之间的数量关系,并证明你的结论.

解:(2)PA+PB=PC.

证明如下:

如图①所示,在 PC 上截取 PD,使 PD=PA,连接 AD,

∵ ∠APC=60°,∴△PAD 是等边三角形,

∴PA=AD=PD,∠PAD=60°.

又∵∠BAC=60°,∴∠PAB=∠DAC.

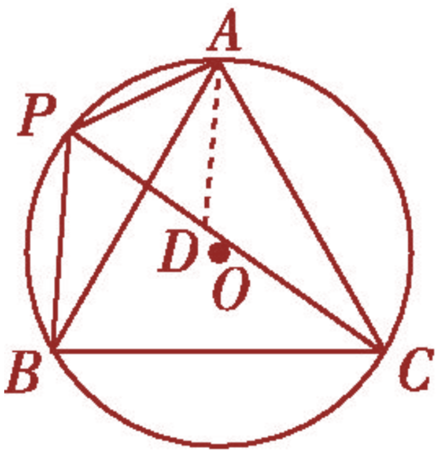
在△PAB 和△DAC 中,

$AP = AD$,

$\angle PAB = \angle DAC$,∴△PAB≌△DAC(SAS).∴PB=DC.

$AB = AC$,

∵PD+DC=PC,∴PA+PB=PC.

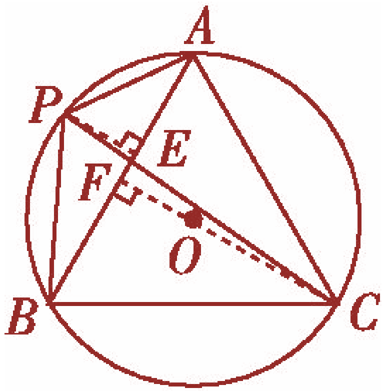


图①

(3) 当点P位于 AB 的什么位置时，四边形APBC的面积最大?求出最大面积.

解: (3) 如图②所示，过点 P 作 $PE \perp AB$，垂足为 E，

过点 C 作 $CF \perp AB$，垂足为 F.



图②

$\because S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB \cdot PE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot CF$，$\therefore S_{四边形APBC}=\frac{1}{2}AB \cdot (PE+CF)$.

当点 P 为 AB 的中点时，$PE+CF=PC$，PC 为⊙O 的直径，此时

四边形 APBC 的面积最大.

又 $\because$ ⊙O 的半径为 1，$\therefore$ 其内接正三角形的边长 $AB=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 四边形 APBC 的最大面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}=\sqrt{3}$.

类型二 与切线有关的证明与计算

题型一 与角平分线相结合的模型

[典型例题1]如图所示，已知△ABC内接于⊙O，AB是⊙O的直径，∠CAB的平分线交BC于点D，交⊙O于点E，连接EB，作∠BEF=∠CAE，交AB的延长线于点F.