高等数学公式篇

·平方关系：

$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

$\tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)$

$\cot^2(\alpha)+1=\csc^2(\alpha)$

·积的关系：

$\sin\alpha=\tan\alpha*\cos\alpha$

$\cos\alpha=\cot\alpha*\sin\alpha$

$\tan\alpha=\sin\alpha*\sec\alpha$

$\cot\alpha=\cos\alpha*\csc\alpha$

$\sec\alpha=\tan\alpha*\csc\alpha$

$\csc\alpha=\sec\alpha*\cot\alpha$

·倒数关系：

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$,

·两角和与差的三角函数：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)$

$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)$

·辅助角公式：

$A\sin\alpha+B\cos\alpha=(A^2+B^2)^{(1/2)}\sin(\alpha+t)$，其中

$\sin t=B/(A^2+B^2)^{(1/2)}$

$\cos t=A/(A^2+B^2)^{(1/2)}$

$\tan t=B/A$

$A\sin\alpha+B\cos\alpha=(A^2+B^2)^{(1/2)}\cos(\alpha-t)$，$\tan t=A/B$

·倍角公式：

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2/(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)$

$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/[1-\tan^2(\alpha)]$

·半角公式：

$\sin(\alpha/2)=\pm\sqrt{((1-\cos\alpha)/2)}$

$\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{((1+\cos\alpha)/2)}$

$\tan(\alpha/2)=\pm\sqrt{((1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha))}=\sin\alpha/(1+\cos\alpha)=(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$

·降幂公式

$\sin^2(\alpha)=(1-\cos(2\alpha))/2=\mathrm{versin}(2\alpha)/2$

$\cos^2(\alpha)=(1+\cos(2\alpha))/2=\mathrm{covers}(2\alpha)/2$

$\tan^2(\alpha)=(1-\cos(2\alpha))/(1+\cos(2\alpha))$

·万能公式：

$\sin\alpha=2\tan(\alpha/2)/[1+\tan^2(\alpha/2)]$

$\cos\alpha=[1-\tan^2(\alpha/2)]/[1+\tan^2(\alpha/2)]$

$\tan\alpha=2\tan(\alpha/2)/[1-\tan^2(\alpha/2)]$

·积化和差公式：

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=(1/2)[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\sin\beta=(1/2)[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=(1/2)[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-(1/2)[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

·和差化积公式：

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$

·推导公式

$\tan\alpha+\cot\alpha=2/\sin2\alpha$

$\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot2\alpha$

$1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$

$1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$

$1+\sin\alpha=(\sin\alpha/2+\cos\alpha/2)^2$

部分高等内容

[编辑本段]

·高等代数中三角函数的指数表示(由泰勒级数易得)：

$\sin x=[e^{ix}-e^{-ix}]/(2i)$ $\cos x=[e^{ix}+e^{-ix}]/2$ $\tan x=[e^{ix}-e^{-ix}]/[ie^{ix}+ie^{-ix}]$

泰勒展开有无穷级数，$e^z=\exp(z)=1+z/1!+z^2/2!+z^3/3!+z^4/4!+\dots+z^n/n!+\dots$

此时三角函数定义域已推广至整个复数集。

·三角函数作为微分方程的解：

对于微分方程组 $y=-y''$;$y=y''''$，有通解 Q,可证明

$Q=A\sin x+B\cos x$，因此也可以从此出发定义三角函数。

补充：由相应的指数表示我们可以定义一种类似的函数——双曲函数，其拥有很多与三角函数的类似的性质，二者相映成趣。

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(ctgx)' = -\csc^2 x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx \qquad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$
$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$
$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C \qquad \int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$
$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C \qquad \int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int shxdx = chx + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \qquad \int chxdx = shx + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$
$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$双曲正弦: shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$双曲余弦: chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$双曲正切: thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

三角函数公式：

·和差角公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

·和差化积公式：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

·倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

·半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

·正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

·余弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

· **反三角函数性质：** $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ $\quad arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$F(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$，其中$y' = tg\alpha$

平均曲率：$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.$\Delta\alpha$：从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K = 0$;

半径为a的圆：$K = \frac{1}{a}$.

定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W = F \cdot s$

水压力：$F = p \cdot A$

引力：$F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$,$k$为引力系数

函数的平均值：$\bar{y} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d = \left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$,$\varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2) = \Pr j\vec{a}_1 + \Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,是一个数量,

两向量之间的夹角：$\cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$,$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$.例：线速度：$\vec{v} = \vec{w}\times\vec{r}$.

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha$,$\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$　　　$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)]$　　$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$　　　$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，　$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $\quad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \qquad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \qquad \text{不确定} \end{cases}$$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面$z=f(x,y)$的面积$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

平面薄片的重心：$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$，　$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$，　对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D \frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

$$\text{柱面坐标：}\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}\qquad \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$$

其中：$F(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

$$\text{球面坐标：}\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}\qquad dv=rd\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot d\theta\cdot dr=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

重心：$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho dv$，　$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho dv$，　$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho dv$，　其中$M=\bar{x}=\iiint_\Omega \rho dv$

转动惯量：$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho dv$，　$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho dv$，　$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho dv$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，　$(\alpha \le t \le \beta)$,则：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta) \qquad \text{特殊情况：}\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$

当$P=-y,Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如(0,0)，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设$x_0=y_0=0$。

高斯公式：

$$\iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv = \oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \oiint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义 ——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生 的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{v}<0$,则为消失...

通量：$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}ds = \iint_\Sigma A_n ds = \iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写 成：$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{A}dv = \oiint_\Sigma A_n ds$

曲面积分

对面积的曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint\limits_{\Sigma} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线Γ的环流量：$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{t}\,ds$

常数项级数：

等比数列：$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列：$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$是发散的

级数审敛法：