

7.2复数的四则运算



一、复数的加法运算

我们规定，复数的加法法则如下：

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in R$) 是任意两个复数，那么它们的和是

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

很明显，两个复数的和是一个确定的复数

两个复数相加类似于两个多项式相加。

1.复数的加法的运算律

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in R$)是任意两个复数, 那么

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned} z_2 + z_1 &= (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

由此, 我们可以得到 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, 这就是复数加法的交换。

复数加法的交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

同理可得: 复数的加法满足结合律

复数加法的结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

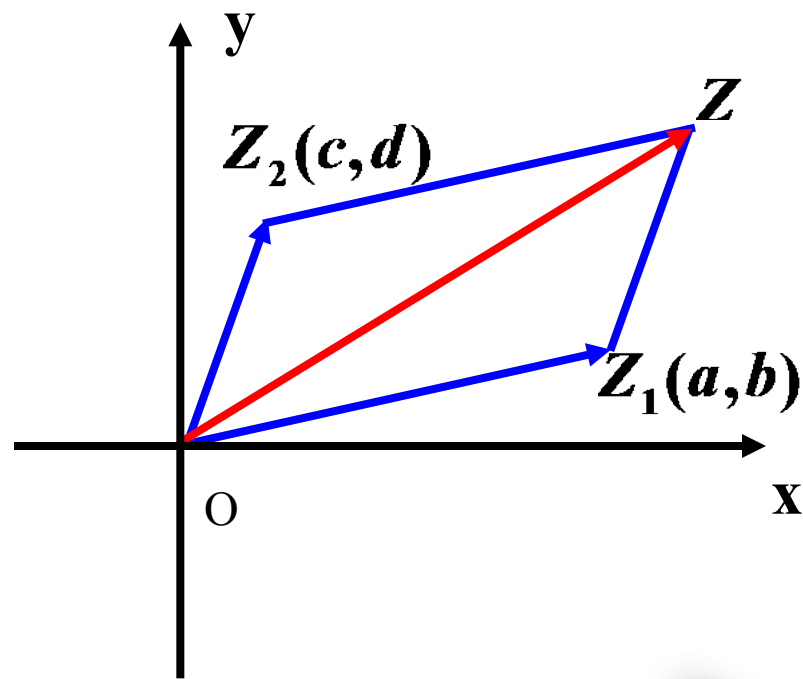
2.复数加法的几何意义

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+bi$ 及复数 $c+di$ 对应,

$$\text{则 } \overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d)$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$$

$$\text{则 } \overrightarrow{OZ} = (a, b) + (c, d) = (a+b, c+d)$$



复数加法的几何意义：

向量 \overrightarrow{OZ} 就是复数 $(a+b) + (c+d)i$ 对应的向量。

复数的减法运算

我们知道，实数的减法是加法的逆运算。类比实数减法的意义，你认为该如何定义复数的减法？

我们规定，复数的减法是加法的逆运算

即把满足 $(c+di)+(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi$ ($x, y \in R$) 叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ ($c, d \in R$) 的差，记作 $(a+bi)-(c+di)$ 。

根据复数相等的含义可得： $c+x=a, d+y=b$

因此 $x=a-c, y=b-d$ 所以 $x+yi=(a-c)+(b-d)i$

即 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ 这就是复数的减法法则。

由此可见，两个复数的差是一个确定的复数。

可以看出，两个复数相减，类似于两个多项相减。

复数减法的几何意义：

类比复数加法的几何意义，你能得出复数减法的几何意义吗？

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+bi$ 及复数 $c+di$ 对应，

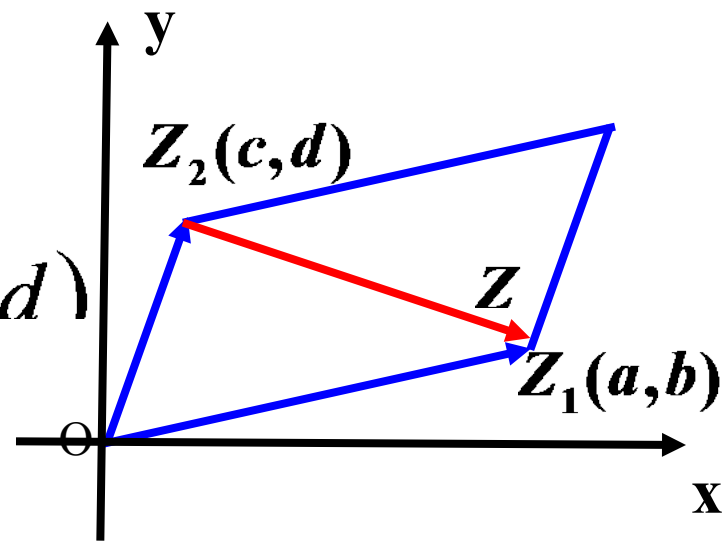
$$\text{则 } \overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d)$$

又因为 $\overrightarrow{Z_2Z_1} = \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}$

$$\text{则 } \overrightarrow{Z_2Z_1} = (a, b) - (c, d) = (a-c, b-d)$$

复数减法的几何意义：

向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 就是复数 $(a-c) + (b-d)i$ 对应的向量。



例、计算 $(5 - 6i) + (-2 - i) - (3 + 4i)$

解: $(5 - 6i) + (-2 - i) - (3 + 4i)$

例2、根据复数及其运算的几何意义，求复平面的两点 $Z_1(x_1, y_1), Z_2(x_2, y_2)$ 之间的距离。

解：因为复平面内的点 $Z_1(x_1, y_1), Z_2(x_2, y_2)$ 对应的复数

$$z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$$

所以点 $Z_1(x_1, y_1), Z_2(x_2, y_2)$ 之间的距离为

$$\begin{aligned} |Z_1Z_2| &= \left| \overrightarrow{Z_1Z_2} \right| = |z_2 - z_1| = |(x_2 + y_2i) - (x_1 + y_1i)| \\ &= |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

这就是复平面内的两点的距离公式。显然，这个公式和平面直角坐标系中两点的距离公式是一样的。

练习

1、计算下列各式

$$(1) (2+4i)+(3-4i) = (2+3)+(4-4)i = 5$$

$$(2) 5-(3+2i) = (5-3)+(0-2)i = 2-2i$$

$$(3) (-3-4i)+(2+i)-(1-5i) = (-3+2-1)+(-4+1+5)i = -2+2i$$

$$(4) (2-i)-(2+3i)+4i = (2-2+0)+(-1-3+4)i = 0$$

2、已知 $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$, 求 $|z_1 + z_2|$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$$

三.复数的乘法运算

我们规定，复数的乘法法则如下：

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in R$) 是任意两个复数，那么 它们的积是

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

很明显，两个复数的积然是一个确定的复数

可以看出，两个复数相乘，类似于两个多项式相乘，只要在所得的结果中把 i^2 换成-1，并且把实部与虚部分别合并即可。



复数乘法的交换律

复数的乘法满足交换律、结合律吗？乘法对加法满足分配律吗？

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in R$) 是任意两个复数，由此可得：

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$z_2 z_1 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

所以 $z_1 z_2 = z_2 z_1$ 这就是复数乘法的交换。

复数乘法的交换律 $z_1 z_2 = z_2 z_1$

同理可得：复数的乘法满足结合律，乘法对加法满足分配律。

复数乘法的结合律 $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

复数乘法的分配律 $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/525204113104011130>