

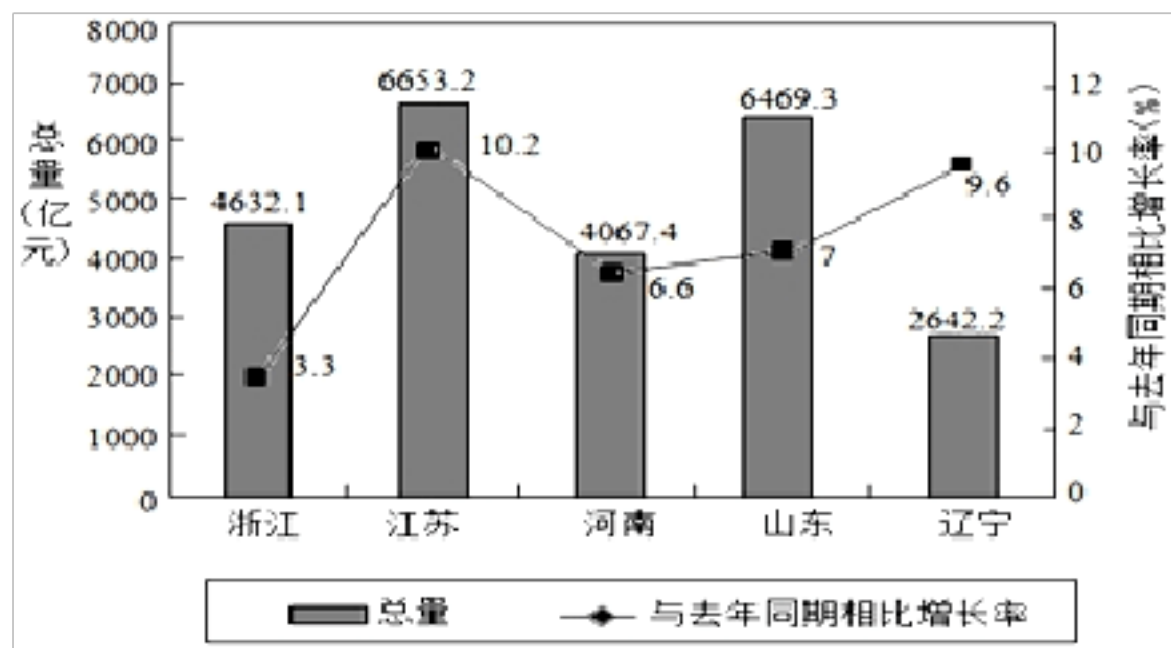
## 2024 年高考数学模拟试卷

### 注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图是 2017 年第一季度五省 GDP 情况图，则下列陈述中不正确的是（ ）



- A. 2017 年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 5 的是浙江省。
- B. 与去年同期相比，2017 年第一季度的 GDP 总量实现了增长。
- C. 2017 年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省只有 1 个
- D. 去年同期河南省的 GDP 总量不超过 4000 亿元。

2. 若  $x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) 与  $\frac{3-i}{1-i}$  互为共轭复数，则  $x - y =$  ( )

- A. 0
- B. 3
- C. -1
- D. 4

3. 抛物线  $y^2 = ax (a > 0)$  的准线与双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两条渐近线所围成的三角形面积为  $2\sqrt{2}$ ，则  $a$  的值为 ( )

- A. 8
- B. 6
- C. 4
- D. 2

4. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{a} - x - a > 0$ ，若函数  $y = f(x)$  的图象恒在  $x$  轴的上方，则实数  $a$  的取值范围为 ( )

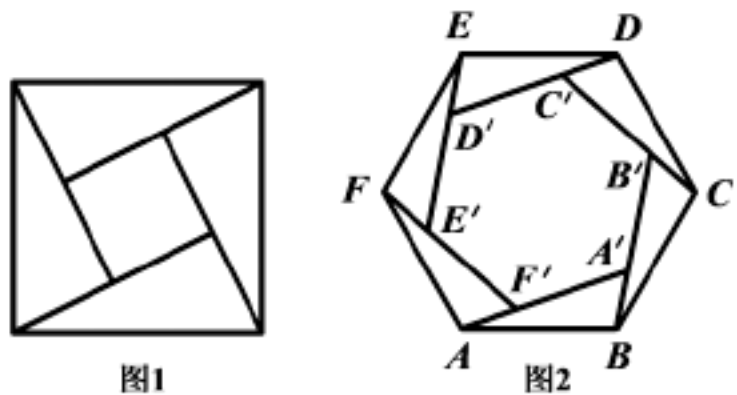
- A.  $\frac{1}{e}$
- B.  $(0, e)$
- C.  $e$
- D.  $(\frac{1}{e}, 1)$

5. 复数  $2i(1 - i)$  的模为 ( )。

- A.  $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D.  $2\sqrt{2}$

6. 赵爽是我国古代数学家、天文学家，大约公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，又

称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形是由4个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的，如图（1）），类比“赵爽弦图”，可类似地构造如图（2）所示的图形，它是由6个全等的三角形与中间的一个小正六边形组成的一个大正六边形，设  $AF = 2FA'$ ，若在大正六边形中随机取一点，则此点取自小正六边形的概率为（ ）



A.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

B.  $\frac{4}{13}$

C.  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

D.  $\frac{4}{7}$

7. 若  $0 < a < b < 1$ ，则  $a^b$ ， $b^a$ ， $\log_b a$ ， $\log_{\frac{1}{a}} b$  的大小关系为（ ）

A.  $a^b < b^a < \log_b a < \log_{\frac{1}{a}} b$

B.  $b^a < a^b < \log_{\frac{1}{a}} b < \log_b a$

C.  $\log_b a < a^b < b^a < \log_{\frac{1}{a}} b$

D.  $\log_b a < b^a < a^b < \log_{\frac{1}{a}} b$

8. 已知点  $(m, 8)$  在幂函数  $f(x) = (m-1)x^n$  的图象上，设  $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$ ， $b = f(\ln n)$ ， $c = f(n)$ ，则（ ）

A.  $b < a < c$

B.  $a < b < c$

C.  $b < c < a$

D.  $a < c < b$

9. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的焦距是虚轴长的2倍，则双曲线的渐近线方程为（ ）

A.  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

B.  $y = \sqrt{3}x$

C.  $y = \frac{1}{2}x$

D.  $y = 2x$

10. 已知抛物线  $C: y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ，过焦点的直线与抛物线分别交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴的正半轴交于点  $S$ ，与准线  $l$  交于点  $T$ ，且  $|FA| = 2|AS|$ ，则  $\frac{|FB|}{|TS|}$ （ ）

A.  $\frac{2}{5}$

B. 2

C.  $\frac{7}{2}$

D. 3

11. 已知复数  $z$  在复平面内对应的点的坐标为  $(1, 2)$ ，则下列结论正确的是（ ）

A.  $z = i - 2 - i$

B. 复数  $z$  的共轭复数是  $1 - 2i$

C.  $|z| = 5$

D.  $\frac{z}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

12. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $E(0, t)$  ( $t > 0$ ). 已知动点  $P$  在双曲线  $C$  的右支上, 且点  $P, E, F_2$  不共线. 若  $\triangle PEF_2$  的周长的最小值为  $4b$ , 则双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围是 ( )

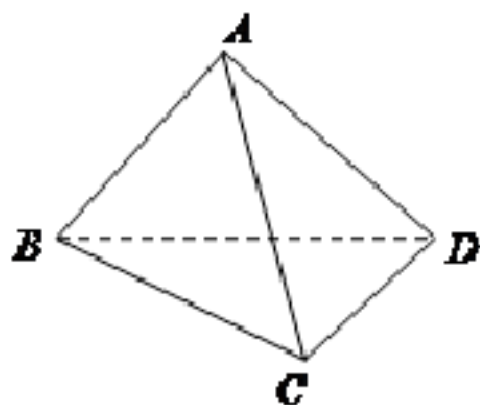
- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,      B.  $1, \frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\sqrt{3}$ ,      D.  $1, \sqrt{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. “今有女善织, 日益功疾, 初日织五尺, 今一月共织九匹三丈.” 其白话意译为: “现有一善织布的女子, 从第 2 天开始, 每天比前一天多织相同数量的布, 第一天织了 5 尺布, 现在一个月 (按 30 天计算) 共织布 390 尺.” 则每天增加的数量为\_\_\_\_尺, 设该女子一个月中第  $n$  天所织布的尺数为  $a_n$ , 则  $a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} =$ \_\_\_\_\_.

14. 在一底面半径和高都是 2m 的圆柱形容器中盛满小麦, 有一粒带麦锈病的种子混入了其中. 现从中随机取出的  $2m^3$  种子, 则取出了带麦锈病种子的概率是\_\_\_\_\_.

15. 如图, 四面体  $ABCD$  的一条棱长为  $x$ , 其余棱长均为 1, 记四面体  $ABCD$  的体积为  $F(x)$ , 则函数  $F(x)$  的单调增区间是\_\_\_\_; 最大值为\_\_\_\_\_.



16. 若向量  $\vec{a} = (x+2, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, x)$  满足  $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ , 则实数  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P$  是直线  $l: x = 1$  上的动点,  $F(1, 0)$  为定点, 点  $Q$  为  $PF$  的中点, 动点  $M$  满足  $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$ , 且  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{OF} = R$ , 设点  $M$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

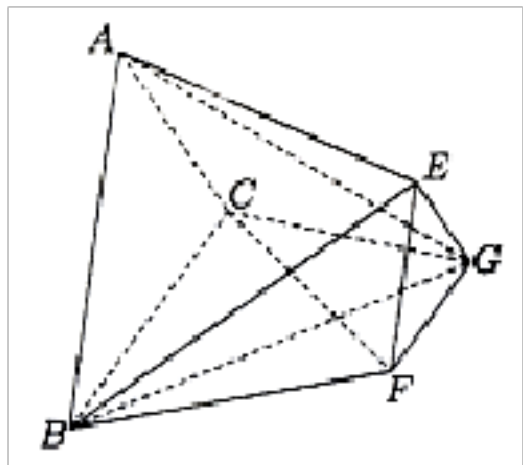
(2) 过点  $F$  的直线交曲线  $C$  于  $A, B$  两点,  $T$  为曲线  $C$  上异于  $A, B$  的任意一点, 直线  $TA, TB$  分别交直线  $l$  于  $D, E$  两点. 问  $DFE$  是否为定值? 若是, 求  $DFE$  的值; 若不是, 请说明理由.

18. (12 分) 已知函数  $f(x) = |x - 2|$ ,  $g(x) = a|x| + 1$ .

(1) 若不等式  $g(x-3) \leq 3$  的解集为  $[2, 4]$ , 求  $a$  的值.

(2) 若当  $x \in \mathbb{R}$  时,  $f(x) \geq g(x)$ , 求  $a$  的取值范围.

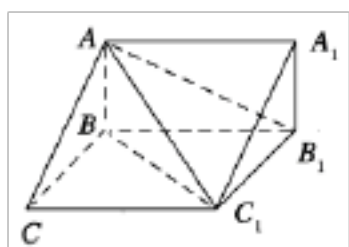
19. (12分) 如图, 三棱台  $ABC-EFG$  的底面是正三角形, 平面  $ABC \perp$  平面  $BCGF$ ,  $CB = 2GF$ ,  $BF = CF$ .



(1) 求证:  $AB \perp CG$ ;

(2) 若  $BC = CF$ , 求直线  $AE$  与平面  $BEG$  所成角的正弦值.

20. (12分) 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = 2$ ,  $BC = BB_1 = 4$ ,  $AC = AB_1 = 2\sqrt{5}$ , 且  $\angle BCC_1 = 60^\circ$ .



(1) 求证: 平面  $ABC_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ;

(2) 设二面角  $C-AC_1-B$  的大小为  $\theta$ , 求  $\sin \theta$  的值.

21. (12分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}mx^2 - 1 - \ln x$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若  $m = 1$ , 求证:  $f(x) > 0$ .

(2) 讨论函数  $f(x)$  的极值;

(3) 是否存在实数  $m$ , 使得不等式  $f(x) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}}$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立? 若存在, 求出  $m$  的最小值; 若不存在, 请

说明理由.

22. (10分) 已知  $f(x) = x^2 - 2|x-1|$ .

(1) 解关于  $x$  的不等式:  $f(x) \geq \frac{|2x|}{x}$ ;

(2) 若  $f(x)$  的最小值为  $M$ , 且  $a + b + c = M$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 求证:  $\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{a^2 - c^2}{b} + \frac{c^2 - b^2}{a} \geq 2$ .

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

**【解析】**

利用图表中的数据进行分析即可求解.

**【详解】**

对于 A 选项：2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是：江苏、辽宁、山东、河南、浙江，故 A 正确；

对于 B 选项：与去年同期相比，2017 年第一季度 5 省的 GDP 均有不同的增长，所以其总量也实现了增长，故 B 正确；

对于 C 选项：2017 年第一季度 GDP 总量由高到低排位分别是：江苏、山东、浙江、河南、辽宁，2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是：江苏、辽宁、山东、河南、浙江，均居同一位的省有 2 个，故 C 错误；

对于 D 选项：去年同期河南省的 GDP 总量  $4067.4 \times \frac{1}{1+6.6\%} \approx 3815.57 < 4000$ ，故 D 正确.

故选：C.

**【点睛】**

本题考查了图表分析，学生的分析能力，推理能力，属于基础题.

2、C

**【解析】**

计算  $\frac{3-i}{1-i} = 1-2i$ ，由共轭复数的概念解得  $x, y$  即可.

**【详解】**

$\because \frac{3-i}{1-i} = 1-2i$ ，又由共轭复数概念得： $x = 1, y = 2$ ，

$x - y = -1$ .

故选：C

**【点睛】**

本题主要考查了复数的运算，共轭复数的概念.

3、A

**【解析】**

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

**【详解】**

抛物线  $y^2 = ax (a > 0)$  的准线为  $x = -\frac{a}{4}$ ，双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两条渐近线为  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为  $(-\frac{a}{4}, -\frac{\sqrt{2a}}{8}), (-\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{2a}}{8})$ ，即

有三角形的面积为  $\frac{1}{2} \times \frac{a}{4} \times \frac{\sqrt{2a}}{4} = 2\sqrt{2}$ ，解得  $a = 8$ ，故选 A.

**【点睛】**

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题.

4、B

**【解析】**

函数  $y = f(x)$  的图象恒在  $x$  轴的上方， $\frac{e^x}{a} > 0$  在  $0, +\infty$  上恒成立. 即  $\frac{e^x}{a} > x$ ，即函数  $y = \frac{e^x}{a}$  的图象在直线  $y = x$

上方，先求出两者相切时  $a$  的值，然后根据  $a$  变化时，函数  $y = \frac{e^x}{a}$  的变化趋势，从而得  $a$  的范围.

**【详解】**

由题  $\frac{e^x}{a} > x$  在  $0, +\infty$  上恒成立. 即  $\frac{e^x}{a} > x$ ，

$y = \frac{e^x}{a}$  的图象永远在  $y = x$  的上方，

设  $y = \frac{e^x}{a}$  与  $y = x$  的切点  $(x_0, y_0)$ ，则  $\begin{cases} \frac{e^{x_0}}{a} = 1 \\ \frac{e^{x_0}}{a} = x_0 \end{cases}$ ，解得  $a = e$ ，

易知  $a$  越小， $y = \frac{e^x}{a}$  图象越靠上，所以  $0 < a < e$ .

故选：B.

**【点睛】**

本题考查函数图象与不等式恒成立的关系，考查转化与化归思想，首先函数图象转化为不等式恒成立，然后不等式恒成立再转化为函数图象，最后由极限位置直线与函数图象相切得出参数的值，然后得出参数范围.

5、D

**【解析】**

利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数模的计算公式求解.

**【详解】**

解:  $\because 2i(1-i) = 2-2i$ ,

复数  $2i(1-i)$  的模为  $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ .

故选: D.

**【点睛】**

本题主要考查复数代数形式的乘除运算, 考查复数模的求法, 属于基础题.

6、D

**【解析】**

设  $AF = a$ , 则  $AF = 2a$ , 小正六边形的边长为  $AF = 2a$ , 利用余弦定理可得大正六边形的边长为  $AB = \sqrt{7}a$ , 再利用面积之比可得结论.

**【详解】**

由题意, 设  $AF = a$ , 则  $AF = 2a$ , 即小正六边形的边长为  $AF = 2a$ ,

所以,  $FF = 3a$ ,  $\angle AFF = \frac{\pi}{3}$ , 在  $\triangle AFF$  中,

由余弦定理得  $AF^2 = AF^2 + FF^2 - 2AF \cdot FF \cdot \cos \angle AFF$ ,

即  $AF^2 = a^2 + 3a^2 - 2a \cdot 3a \cdot \cos \frac{\pi}{3}$ , 解得  $AF = \sqrt{7}a$ ,

所以, 大正六边形的边长为  $AF = \sqrt{7}a$ ,

所以, 小正六边形的面积为  $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a \cdot 2\sqrt{3}a = 6\sqrt{3}a^2$ ,

大正六边形的面积为  $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}a \cdot \sqrt{7}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}a \cdot \sqrt{21}a = \frac{21\sqrt{3}}{2}a^2$ ,

所以, 此点取自小正六边形的概率  $P = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{7}$ .

故选: D.

**【点睛】**

本题考查概率的求法, 考查余弦定理、几何概型等基础知识, 考查运算求解能力, 属于基础题.

7、D

**【解析】**

因为  $0 < a < b < 1$ , 所以  $1 - b^a > a^a > a^b > 0$ ,

因为  $\log_b a < \log_b b = 1$ ,  $0 < a < 1$ , 所以  $\frac{1}{a} > 1$ ,  $\log_{\frac{1}{a}} b < 0$ .

综上  $\log_b a = b^a = a^b = \log_{\frac{1}{a}} b$ ; 故选 D.

8、B

【解析】

先利用幂函数的定义求出  $m$  的值, 得到幂函数解析式为  $f(x) = x^3$ , 在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 再利用幂函数  $f(x)$  的单调性, 即可得到  $a, b, c$  的大小关系.

【详解】

由幂函数的定义可知,  $m - 1 = 1$ ,  $\therefore m = 2$ ,

$\therefore$  点  $(2, 8)$  在幂函数  $f(x) = x^n$  上,

$\therefore 2^n = 8$ ,  $\therefore n = 3$ ,

$\therefore$  幂函数解析式为  $f(x) = x^3$ , 在  $\mathbb{R}$  上单调递增,

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ ,  $1 < \ln \pi < 3$ ,  $n = 3$ ,

$\therefore \frac{m}{n} < \ln \pi < n$ ,

$\therefore a < b < c$ ,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了幂函数的性质, 以及利用函数的单调性比较函数值大小, 属于中档题.

9、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍, 可得出  $c = 2b$ , 结合  $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ , 得出  $a^2 = 3b^2$ , 即可求出双曲线的渐近线方程.

【详解】

解: 由双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 可知, 焦点在  $x$  轴上,

则双曲线的渐近线方程为:  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

由于焦距是虚轴长的 2 倍, 可得:  $c = 2b$ ,

$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ ,

即:  $a^2 = 3b^2$ ,  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,



所以双曲线的渐近线方程为：  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ .

故选：A.

**【点睛】**

本题考查双曲线的简单几何性质，以及双曲线的渐近线方程.

10、B

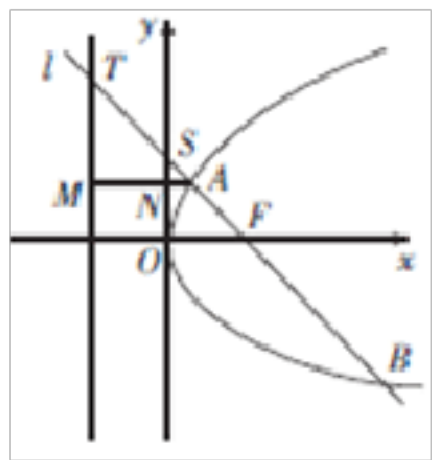
**【解析】**

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M，与 y 轴交于点 N，由  $|FA| = 2|AS|$  和抛物线的定义可求得  $|TS|$ ，利用抛物线的性

质  $\frac{1}{|AF|} = \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p}$  可构造方程求得  $|BF|$ ，进而求得结果.

**【详解】**

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M，AM 与 y 轴交于点 N，



由抛物线解析式知：  $F(p, 0)$ ，准线方程为  $x = -p$ .

$$\because |FA| = 2|AS|, \quad \frac{|SA|}{|SF|} = \frac{1}{3}, \quad |AN| = \frac{1}{3}|OF| = \frac{p}{3}, \quad |AM| = \frac{4}{3}p,$$

$$\text{由抛物线定义知： } |AF| = |AM| = \frac{4}{3}p, \quad |AS| = \frac{1}{2}|AF| = \frac{2}{3}p, \quad |SF| = 2p,$$

$$|TS| = |SF| = 2p.$$

$$\text{由抛物线性质 } \frac{1}{|AF|} = \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p} = \frac{1}{p} \text{ 得： } \frac{3}{4p} = \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{p}, \text{ 解得： } |BF| = 4p,$$

$$\frac{|FB|}{|TS|} = \frac{4p}{2p} = 2.$$

故选：B.

**【点睛】**

本题考查抛物线定义与几何性质的应用，关键是熟练掌握抛物线的定义和焦半径所满足的等式.

11、D

**【解析】**

首先求得  $z = 1 - 2i$ ，然后根据复数乘法运算、共轭复数、复数的模、复数除法运算对选项逐一分析，由此确定正确选项.

**【详解】**

由题意知复数  $z = 1 - 2i$ ，则  $z + i = (1 - 2i) + i = 1 - i$ ，所以 A 选项不正确；复数  $z$  的共轭复数是  $1 + 2i$ ，所以 B

选项不正确； $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，所以 C 选项不正确； $\frac{z}{1-i} = \frac{1-2i}{1-i} = \frac{(1-2i)(1+i)}{2} = \frac{1-3i}{2}$ ，所以 D 选

项正确.

故选：D

**【点睛】**

本小题考查复数的几何意义，共轭复数，复数的模，复数的乘法和除法运算等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想.

12、A

**【解析】**

依题意可得  $C_{PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1 = 2PF_1 = 2a + 4b$

即可得到  $2a + 4b = 2(a + c)$ ，从而求出双曲线的离心率的取值范围；

**【详解】**

解：依题意可得如下图象， $C_{PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1$

$$PE + PF_1 + EF_1 = 2a$$

$$2PF_1 = 2a + 4b$$

$$2PF_1 = 2a + 4b = 2(a + c)$$

所以  $2b = c$

$$\text{则 } 4c^2 = 4a^2 + c^2$$

$$\text{所以 } 3c^2 = 4a^2$$

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{4}{3}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528002077104006134>