河南省漯河市高级中学2023-2024学年高二下学期第二次月考数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知直线$\left(a-\sqrt{3}\right)x+y+2=0$的倾斜角为$30°$，则$a=$（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．0

2．已知椭圆的离心率$e=\frac{1}{2}$，它的一个焦点与抛物线$y=-\frac{1}{4}x^2$的焦点重合，则此椭圆方程为（　）

A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$　　C．$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

3．如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的和除以与它前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做“和差等比数列”已知$\{a_n\}$是“和差等比数列”，$a_1=1$，$a_2=2$，则满足使不等式$a_n>100$的n的最小值是（　）

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

4．甲、乙分别用弓箭对准同一个弓箭靶，两人同时射箭.已知甲、乙中靶的概率分别为 0.5 和 0.4，且两人是否中靶互不影响，若弓箭靶被射中，则只被乙射中的概率为（　）

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{2}{7}$

5．函数$f\left(x\right)=\ln x$和$g\left(x\right)=ax^2-x$的图象有公共点P，且在点P处的切线相同，则这条切线的方程为（　）

A．$y=2x+1$　　B．$y=2x-1$　　C．$y=x+1$　　D．$y=x-1$

6．在半径为1的球中作一个圆柱，当圆柱的体积最大时，圆柱的底面圆的半径为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

7．某学校利用周末时间组织学生进行志愿者服务，高二年级共 6 个班，其中 1 班有 2 个志愿者队长，本次志愿者服务一共 20 个名额，志愿者队长必须参加且不占名额，若每个班至少有 3 人参加，则共有（　）种分配方法.

A．90　　B．60　　C．126　　D．120

8．以椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的顶点为焦点，焦点为顶点的双曲线 C，其左右焦点分别是F_1，F_2，已知点M的坐标为$\left(2,1\right)$，双曲线C上的点$P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>0,y_0>0\right)$满足$\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{MF_1}}{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{F_2F_1}\cdot\overrightarrow{MF_1}}{\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right|}$，则$S_{\triangle PMF_1}-S_{\triangle PMF_2}=$（　）

A．4　　　　B．3　　　　C．2　　　　D．1

二、多选题

9．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别是A_1D_1和C_1D_1的中点，下列结论正确的是（　）

A．$A_1C_1\parallel$平面 CEF

B．$B_1D\perp$平面 CEF

C．$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{DC}$

D．若正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为 2，点B_1到平面 CEF 的距离为 2

10．已知等比数列$\left\{a_n\right\}$首项$a_1>1$，公比为 q，前 n 项和为S_n，前 n 项积为T_n，若函数$f\left(x\right)=x\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_7\right)$，且$f'\left(0\right)=1$，则下列说法正确的是（　）

A．$\left\{\lg a_n\right\}$为单调递增的等差数列　　　　B．$0<q<1$

C．$\left\{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\right\}$为单调递增的等比数列　　D．使得$T_n>1$成立的 n 的最大值为 7

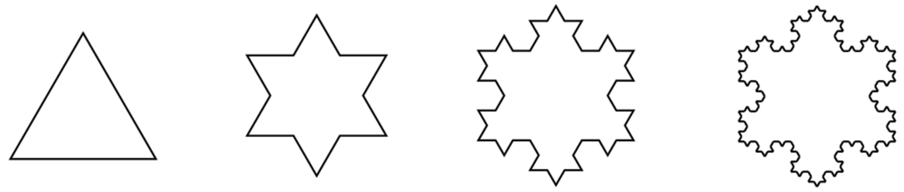
11．已知 a 为常数，函数$f(x)=x(\ln x-ax)$有两个极值$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，则下列说法正确的是（　）

A．a 的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　　　B．$f\left(x_1\right)>0$，$f\left(x_2\right)<-\dfrac{1}{2}$ C．$f\left(x_1\right)<0$，$f\left(x_2\right)>-\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<2$

三、填空题

12．随机变量X服从正态分布$X\sim N(8,\sigma^2)$，$P(x>10)=m$，$P(6\le x\le 8)=n$，则$\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值为___.

13．如图是瑞典数学家科赫在 1904 年构造的能够描述雪花形状的图案，图形的作法是:一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形，再去掉底边，反复进行这一过程，就得到一条"雪花"状的曲线，设原正三角形(图①)的边长为 1，以此类推，第 5 个雪花状图形的周长为__________.



①　　②　　③　　④

14．数学家阿波罗尼斯采用平面切割圆锥面的方法来研究圆锥曲线，如图 1，设圆锥轴截面的顶角 2α，用一个平面去截该圆锥面，随着圆锥的轴和该平面所成角 β 的变化，截的曲线的形状也不同.据研究，曲线的离心率为 $e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$，比如，当 $\alpha=\beta$ 时，$e=1$，此时截得的曲线是抛物线，如图 2，在底面半径为 1，高为 $\sqrt{3}$ 的圆锥 SO 中，AB、CD 是底面圆 O 上互相垂直的直径，E 是母线 SC 上一点，$CE=2ES$，平面 ABE 截该圆锥面所得的曲线的离心率为_____.

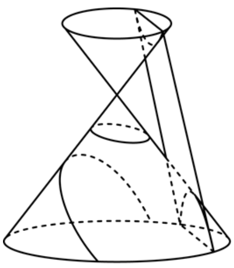


图1

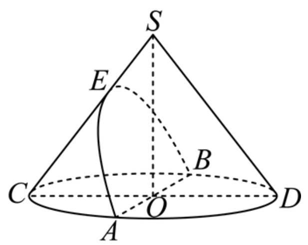


图2

四、解答题

15．已知函数 $f\left(x\right)=x^2+x\ln x$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

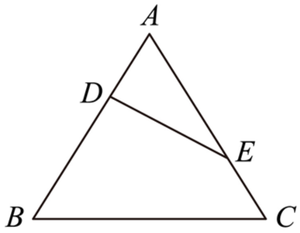
(2)若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=ax^3$ 有两个不相等的实数根，求实数 a 的取值范围，

16．为不断改进劳动教育，进一步深化劳动教育改革，现从某单位全体员工中随机抽取 3 人做问卷调查.已知某单位有 N 名员工，其中 $\dfrac{2}{5}$ 是男性，$\dfrac{3}{5}$ 是女性.

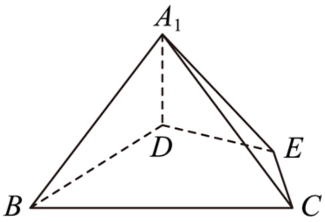
(1)当 $N=10$ 时，求出 3 人中男性员工人数 X 的分布列和数学期望；

(2)我们知道，当总量N足够大而抽出的个体足够小时，超几何分布近似为二项分布.现在全市范围内考虑，从N名员工(男女比例不变)中随机抽取3人，在超几何分布中男性员工恰有2人的概率记作P_1，在二项分布中，即男性员工的人数$X: B\left(3,\frac{2}{5}\right)$男性员工恰有2人的概率记作$P_2$.那么当$N$至少为多少时，我们可以在误差不超过0.001（即$P_1-P_2\leq 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布(参考数据:$\sqrt{578}\approx 24.04$)

17．等边ΔABC的边长为3，点D，E分别是AB，BC上的点，且满足$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$ (如图(1))，将ΔADE沿DE折起到ΔA_1DE的位置，使二面角A_1-DE-B成直二面角，连接A_1B，A_1C (如图(2)).



图(1)

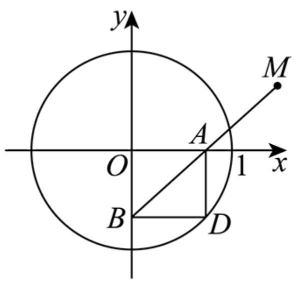


图(2)

(1)求证：$A_1D\perp$平面$BCED$；

(2)在线段BC上是否存在点P，使直线PA_1与平面A_1BD所成的角为$60°$?若存在，求出PB的长；若不存在，请说明理由.

18．如图，D为圆$O: x^2+y^2=1$上一动点，过点D分别作x轴、y轴的垂线，垂足分别为A,B，点M满足$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AM}$，点$M$的轨迹记为曲线$\Omega$.



(1)求曲线Ω的方程；

(2)若过点$K\left(-2,0\right)$的两条直线l_1,l_2分别交曲线Ω于E,F两点，且$l_1\perp l_2$，求证：直线EF过定点；

(3)若曲线Ω交y轴正半轴于点S，直线$x=x_0$与曲线Ω交于不同的两点G,H，直线SH,SG

分别交x轴于Q,T两点，试探究：y轴上是否存在点R，使得$\angle ORQ+\angle ORT=\frac{\pi}{2}$？若存在，求出点$R$的坐标；若不存在，请说明理由.

19．若某类数列$\{a_n\}$满足"$\forall n\geq 2,\frac{a_n}{a_{n-1}}>2$，且$a_n\neq 0$"$\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则称这个数列$\{a_n\}$为"$G$型数列".

(1)若数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_na_{n+1}=3^{2n+1}$，求$a_2,a_3$的值并证明：数列$\{a_n\}$是"$G$型数列"；

(2)若数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且$a_1=1,\{a_n\}$为"G型数列"，记$b_n=a_n+1$，数列$\{b_n\}$为等比数列，公比q为正整数，当$\{b_n\}$不是"G型数列"时，

（i）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（ii）求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}<\frac{5}{12},\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	D	D	C	C	C	ACD	BC
题号	11									
答案	AC									

1．C

【分析】由直线斜率与倾斜角的关系，求a的值.

【详解】直线$\left(a-\sqrt{3}\right)x+y+2=0$的斜率为$\sqrt{3}-a$，所以$\tan 30°=\sqrt{3}-a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

2．D

【分析】根据抛物线的焦点可知$c=1$，且焦点在y轴上，再结合离心率求a,b，即可得方程.

【详解】因为抛物线$y=-\dfrac{1}{4}x^2$，即为$x^2=-4y$，其焦点坐标为$\left(0,-1\right)$，

即椭圆的一个焦点为$\left(0,-1\right)$，可知$c=1$，且焦点在y轴上，

又因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$，即$a=2$，可得$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

故选：D.

3．A

【分析】根据“和差等比数列”的定义，可得$\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{a_2+a_1}{a_2-a_1}=3$，化简可得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，进而得到数列$\left\{a_n\right\}$是首项为1，公比为2的等比数列，进而求出$a_n$，再解不等式即可求解.

【详解】依题意，$\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{a_2+a_1}{a_2-a_1}=3$，化简得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

则数列$\left\{a_n\right\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

所以$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，

令$a_n>100$，即$2^{n-1}>100$，又$n\in \mathrm{N}^*$，则$n-1\geq 7$，

即$n\geq 8$，所以满足使不等式$a_n>100$的n的最小值是8.

故选：A.

4．D

【分析】利用条件概率公式进行求解即可.

【详解】设事件A:甲中靶，事件B:乙中靶，事件C:弓箭靶被射中，

则$P\left(A\right)=0.5,P\left(B\right)=0.4,$

所以$P\left(C\right)=1-P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=1-\left(1-0.5\right)\left(1-0.4\right)=0.7$，

$P\left(\left(\overline{A}B\right)C\right)=P\left(\overline{A}B\right)=\left(1-0.5\right)\times 0.4=0.2$，

即$P\left(\left(\left(\overline{A}B\right)C\right)|C\right)=\dfrac{0.2}{07}=\dfrac{2}{7}$，

故选：D.

5．D

【分析】设切点P的横坐标为t（$t>0$），先根据导数几何意义列方程组，可得$2\ln t+t-1=0$，再根据导数求其单调性，根据单调性确定其解，最后根据点斜式求切线方程.

【详解】由$f\left(x\right)=\ln x$，$g\left(x\right)=ax^2-x$，

则$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$，$g'\left(x\right)=2ax-1$，

设切点P的横坐标为t（$t>0$），则根据题意可得$\begin{cases}\ln t=at^2-t\\ \dfrac{1}{t}=2at-1\end{cases}$，

得$\ln t=\dfrac{1-t}{2}$，即$2\ln t+t-1=0$，

设$g\left(t\right)=2\ln t+t-1$，$t>0$，

因为函数$y=2\ln t,y=t-1$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

所以函数$g\left(t\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，又$g\left(1\right)=0$，

所以方程$2\ln t+t-1=0$有唯一解$t=1$，

所以切点P坐标为$\left(1,0\right)$，切线斜率$k=1$，

则切线方程为$y=x-1$.

故选：D.

6．C

【分析】根据球的轴截面，结合勾股定理可得$r^2=1-\frac{1}{4}h^2$，$0<h<2$，进而结合圆柱的体积公式可得$V=-\frac{1}{4}\pi h^3+\pi h$，进而结合导数求解即可.

【详解】如图所示为轴截面，球的半径为$R=1$，

设球心为O，圆柱的高为h，底面圆的半径为r，

则$\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2=R^2$，即$r^2=1-\frac{1}{4}h^2$，$0<h<2$，

则圆柱的体积为$V=\pi r^2h=\pi\left(1-\frac{1}{4}h^2\right)\cdot h=-\frac{1}{4}\pi h^3+\pi h$，

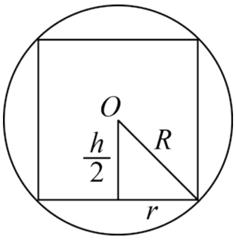
则$V'=-\frac{3}{4}\pi h^2+\pi$，令$V'>0$，得$0<h<\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

令$V'<0$，得$\frac{2\sqrt{3}}{3}<h<2$，

所以函数$V=-\frac{1}{4}\pi h^3+\pi h$在$\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$上单调递减，

所以当$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，V取得最大值，此时$r=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：C.



7．C

【分析】将问题转化为将 10 个名额分配到 6 个班级，每个班级至少 1 个名额，进而结合隔板法求解即可得到.

【详解】若每个班至少 3 人参加，由于 1 班有 2 个志愿者队长，

故只需先满足每个班级有 2 个名额，还剩 10 个名额，

再将 10 个名额分配到 6 个班级，每个班级至少 1 个名额，

故只需在 10 个名额中的 9 个空上放置 5 个隔板即可，有$C_9^5=126$种分配方法.

故选：C.

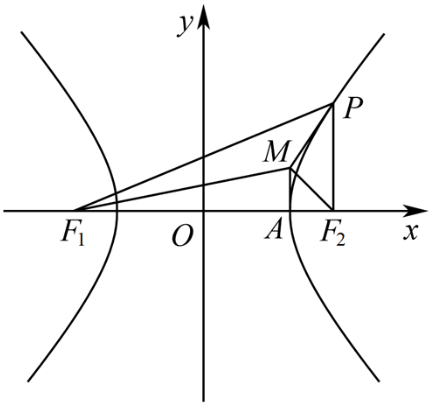
8．C

【分析】先求出双曲线方程，根据数量积的定义可知F_1M平分$\angle PF_1F_2$，再求出直线PF_1

的斜率和方程，与双曲线方程联立求出点 P 坐标，从而可得出 F_2M 平分 $\angle PF_2F_1$，从而得出 M 为 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心，即可求出 $S_{\triangle PMF_1}-S_{\triangle PMF_2}$ 的值.

【详解】椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的顶点为 $(\pm 3,0)$，焦点为 $(\pm 2,0)$

所以双曲线方程为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，如图所示：



因为 $P\left(x_0,\ y_0\right)\left(x_0>0,\ y_0>0\right)$，$\therefore \left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=4$，

由 $\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{MF_1}}{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|}=\frac{\overrightarrow{F_2F_1}\cdot\overrightarrow{MF_1}}{\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right|}$ 可得 $\frac{\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1M}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_1P}\right|}=\frac{\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{F_1M}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|}$，

可得 F_1M 平分 $\angle PF_1F_2$，

而 $\tan\angle MF_1A=\frac{MA}{F_1A}=\frac{1}{5}$，

$\therefore \tan\angle PF_1A=\frac{2\tan\angle MF_1A}{1-\tan^2\angle MF_1A}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}$，

$\therefore$直线 F_1P 的方程为 $y=\frac{5}{12}(x+3)$，即 $5x-12y+15=0$，

联立 $\begin{cases}5x-12y+15=0\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$，解得 $P\left(3,\frac{5}{2}\right)$，

$\therefore PF_2\perp x$ 轴，又 $\tan\angle MF_2O=\frac{MA}{AF_2}=1$，$\therefore \angle MF_2O=45^\circ$，

$\therefore F_2M$ 平分 $\angle PF_2F_1$，

即 M 为 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心．内切圆半径为 $r=1$，

故 $S_{\triangle PMF_1}-S_{\triangle PMF_2}=\frac{1}{2}(\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|)\times 1=\frac{1}{2}\times 4\times 1=2$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/528035137105007002