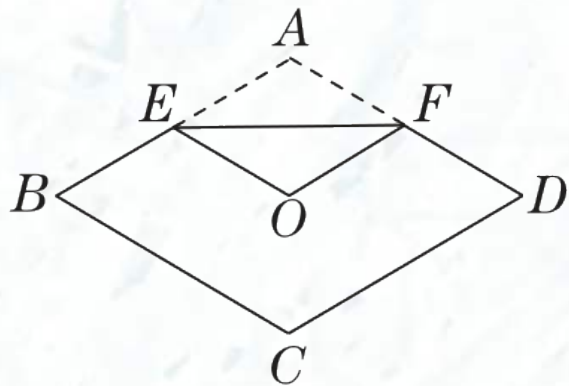


阶段拔尖专训6 特殊平行四边形中的 折叠问题

题型1 菱形中的折叠问题

1.如图,将菱形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 A 恰好落在菱形的对角线交点 O 处,折痕为 EF .若菱形的边长为2, $\angle A = 120^\circ$, 求 EF 的长.

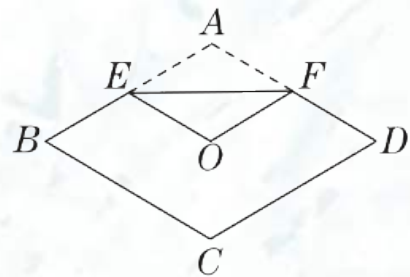


【解】连接 BD , AC . \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, AC 平分 $\angle BAD$,
 $BO = \frac{1}{2}BD$.

$\therefore \angle BAD = 120^\circ$, $\therefore \angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore \angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

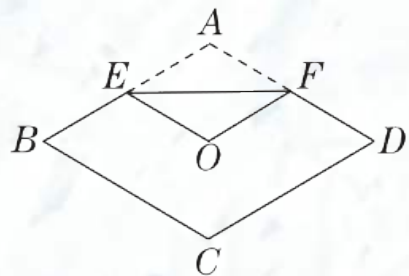


$\because AB = 2, \therefore AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$. 由勾股

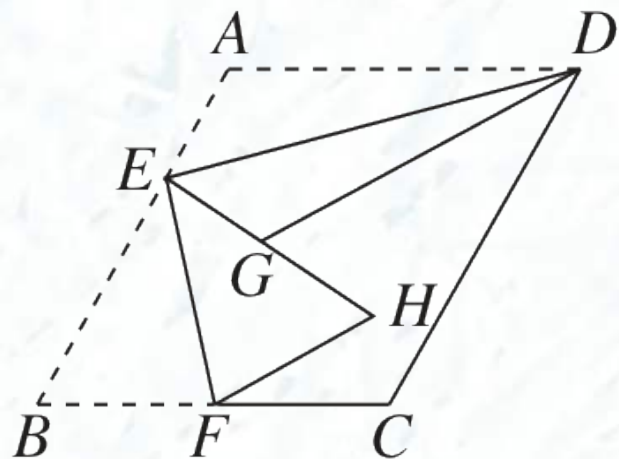
定理得, $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{3}$. 易得

EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = BO = \sqrt{3}$.

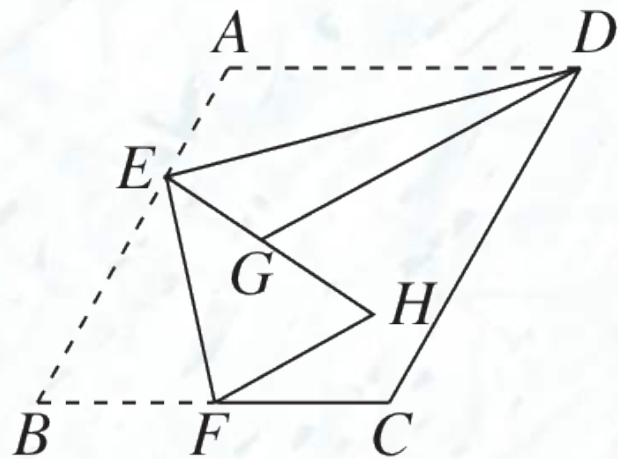


2.如图, 在菱形 $ABCD$ 中,
 $\angle A = 120^\circ$, $AB = 2$, 点 E 是边 AB 上
一点, 以 DE 为对称轴将 $\triangle DAE$ 折叠
得到 $\triangle DGE$, 再折叠 BE 使 BE 落在直
线 EG 上, 点 B 的对应点为点 H , 折痕
为 EF 且交 BC 于点 F .

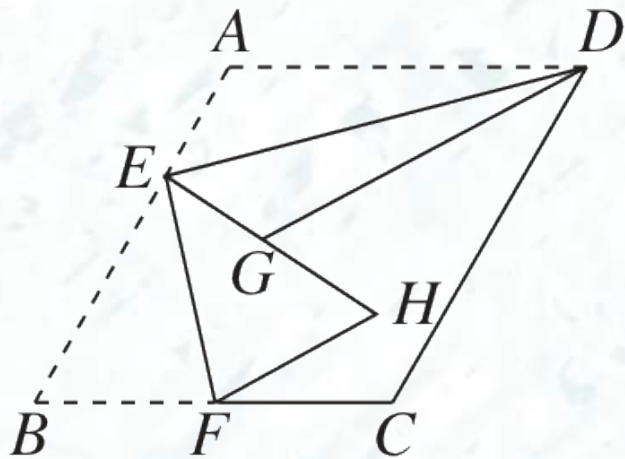


(1) 求 $\angle DEF$ 的度数;

【解】由翻折可得 $\angle AED = \angle DEG$,
 $\angle BEF = \angle HEF$,
 $\therefore \angle DEG + \angle HEF = \angle AED + \angle BEF$.
 $\therefore \angle DEG + \angle HEF + \angle AED + \angle BEF =$
 180° ,
 $\therefore \angle DEG + \angle HEF = 90^\circ$, 即 $\angle DEF = 90^\circ$.



(2) 若点 E 是 AB 的中点, 求 DF 的长.



∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形, ∴ $AD \parallel BC$.

∴ $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

由翻折可得 $AE = EG$, $BE = EH$,

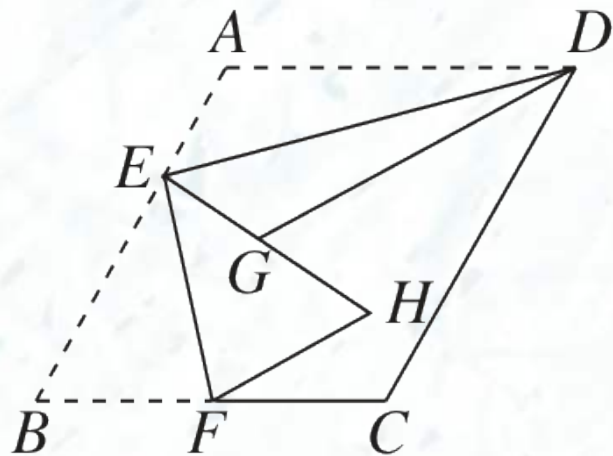
$\angle A = \angle EGD$, $\angle B = \angle EHF$.

∵ 点 E 是 AB 的中点, ∴ $AE = BE$.

∴ $EG = EH$,即点 G 与点 H 重合.

∴ $\angle EGD + \angle EHF = \angle A + \angle B = 180^\circ$,

∴ 点 D , G , F 三点在同一条直线上.



过点D作 $DM \perp BC$ ，交BC的延长线于点M.

$$\because \angle A = 120^\circ, AB = 2,$$

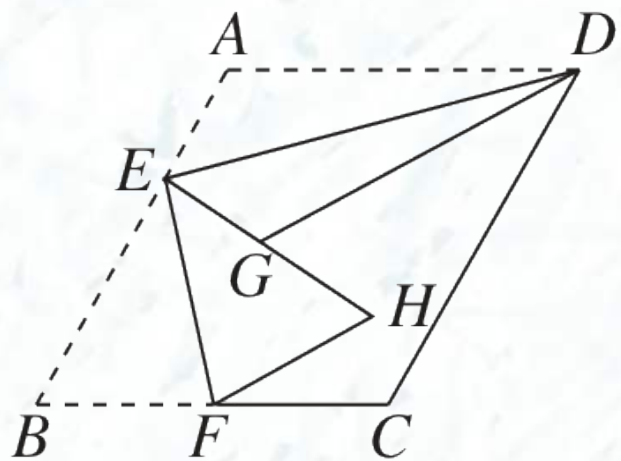
$$\therefore \text{易得} \angle DCM = 60^\circ,$$

$$CD = 2. \therefore \angle CDM = 30^\circ.$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2} CD = 1. \therefore DM =$$

$$\sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{3}.$$

由翻折可得 $BF = FG$ ， $AD = DG = 2$ ，



设 $BF = x$, 则

$$MF = 2 - x + 1 = 3 - x,$$

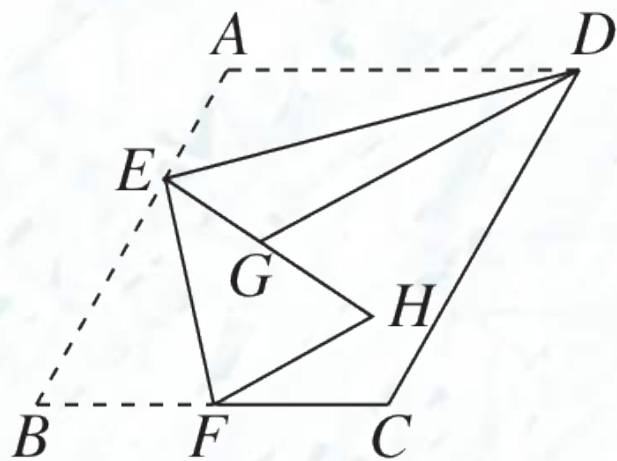
$$DF = 2 + x,$$

由勾股定理得

$$(2 + x)^2 = (3 - x)^2 + (\sqrt{3})^2, \text{ 解得}$$

$$x = \frac{4}{5},$$

$$\therefore DF = \frac{14}{5}.$$



3. **2024·烟台蓬莱区模拟**
新考法·分类讨论法 如图，

在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ，

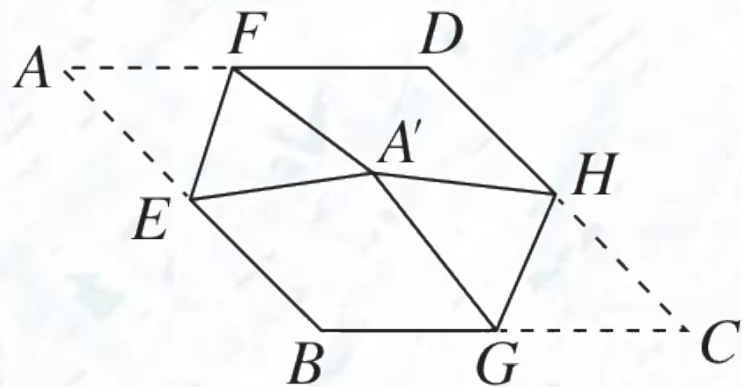
$\angle A = 45^\circ$ ，点 E 为 AB 的中点，

点 F 为 AD 上一动点，将 $\triangle AEF$ 沿

EF 翻折，点 A 的对应点为点 A' ，再折叠菱形，使点 C 的对应

点与点 A' 重合，折痕分别交 BC ， CD 于点 G ， H 。当 $\triangle A'GH$ 是

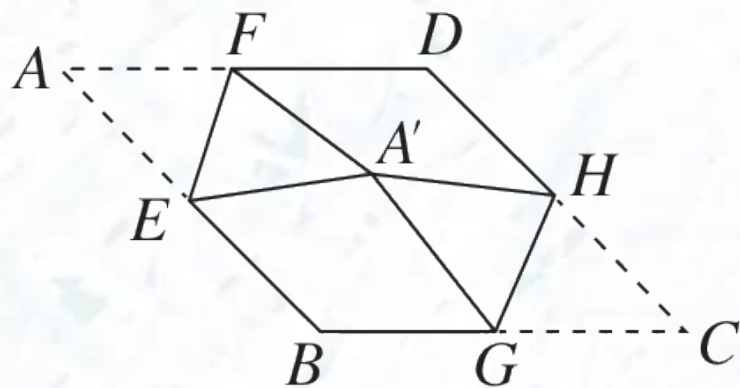
等腰三角形时，求 AF 的长。



【解】由折叠的性质得

$$A'G = CG, A'H = CH, \angle GA'H = \angle BCD = \angle BAD = 45^\circ, A'F = AF, A'E = AE, \angle EA'F = \angle BAD = 45^\circ.$$

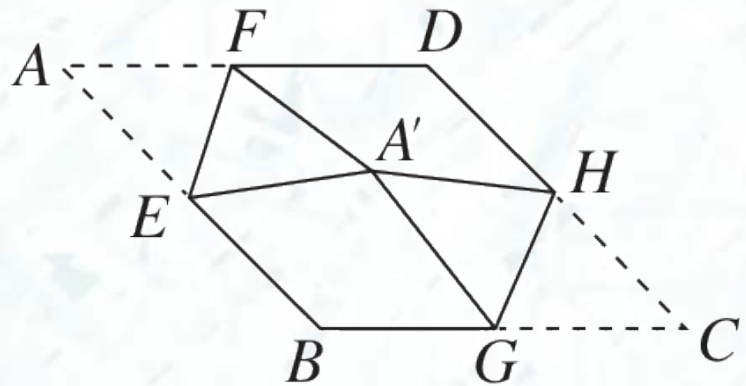
$\therefore \triangle A'GH$ 是等腰三角形, \therefore 分三种情况讨论:



当 $A'G = A'H$ 时, 连接 $A'A, A'C$,
则 $A'G = CG = A'H = CH$,
 \therefore 四边形 $A'GCH$ 是菱形. $\therefore CA'$ 是
 $\angle BCD$ 的平分线.

$\therefore A'C$ 经过点 A . \therefore 四边形 $A'EAF$ 也
是菱形.

$$\therefore AF = AE = \frac{1}{2}AB = 2;$$

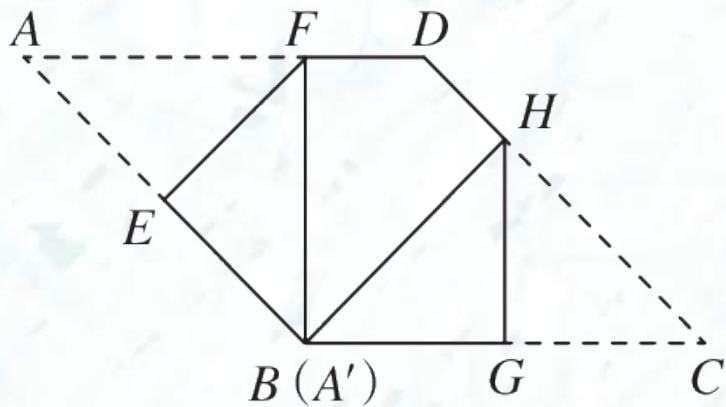


当 $A'G = GH$ 时, 易知 $\triangle A'GH$ 是等腰直角三角形, 则点 A' 与点 B 重合, 如图,

$\therefore \triangle AFB$ 是等腰直角三角形.

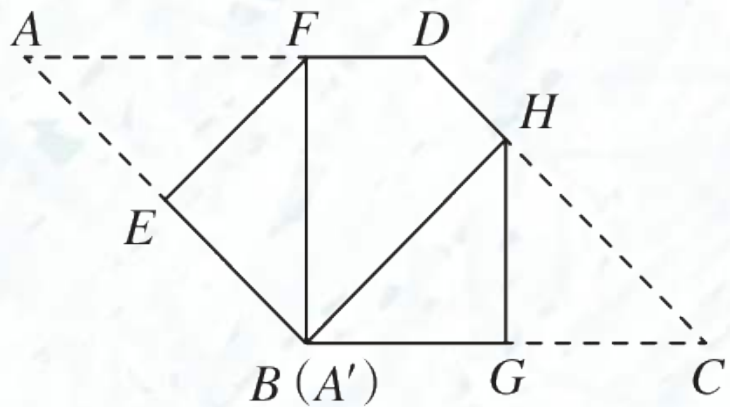
\therefore 易得 $AF = 2\sqrt{2}$;

当 $A'H = GH$, 即 $A'H = GH = CH$ 时,



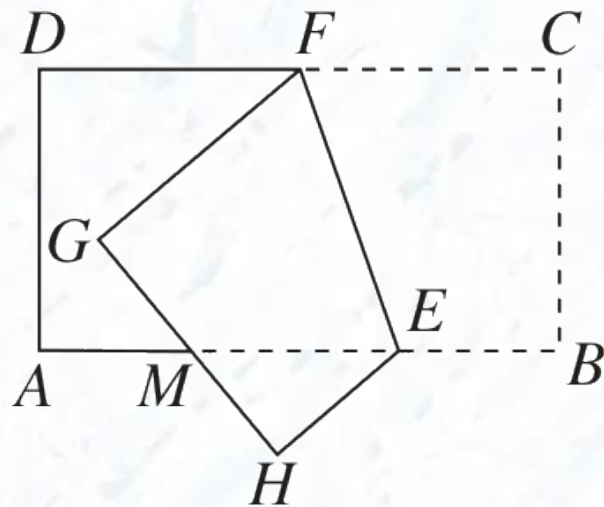
$\triangle A'GH$ 和 $\triangle CGH$ 都是等腰直角三角形，且 $\angle A'HG = \angle CHG = 90^\circ$ ，故点 A' 在直线 CD 上，此情况不存在。

综上， AF 的长为2或 $2\sqrt{2}$ 。



题型2 矩形中的折叠问题

4.[2024·聊城模拟] 如图, 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 对折, BC 的对应边 GH 与 AB 交于点 M , 若 $\angle CFE = 70^\circ$, 则 $\angle GMA = \underline{50}^\circ$.



【点拨】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ, AB \parallel CD.$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CFE = 70^\circ,$$

$$\angle BEF = 180^\circ - \angle CFE = 110^\circ.$$

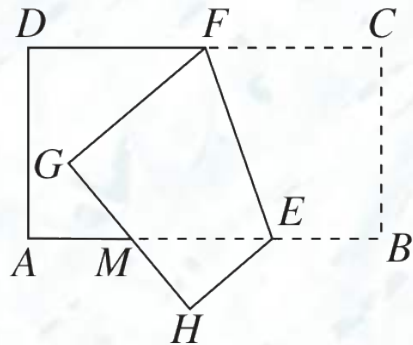
由折叠得 $\angle H = \angle B = 90^\circ$,

$$\angle HEF = \angle BEF = 110^\circ,$$

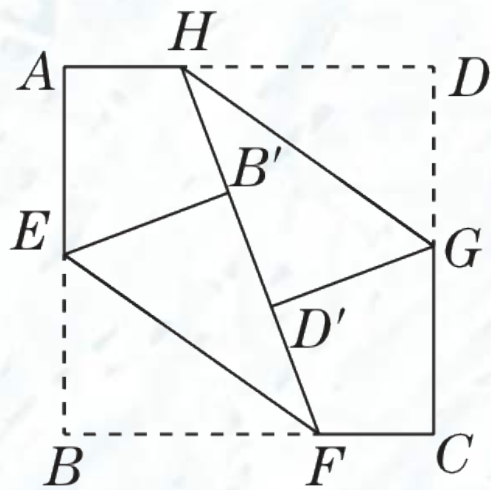
$$\therefore \angle MEH = \angle HEF - \angle AEF = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ.$$

$$\therefore \angle HME = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

$$\therefore \angle GMA = \angle HME = 50^\circ.$$



5.如图，把矩形 $ABCD$ 的两角折叠，折痕分别为 EF ， HG ，点 B ， D 折叠后的对应点分别是 B' ， D' ，并且点 H ， B' ， D' ， F 在同一直线上，试说明两条折痕 EF ， GH 相互平行.



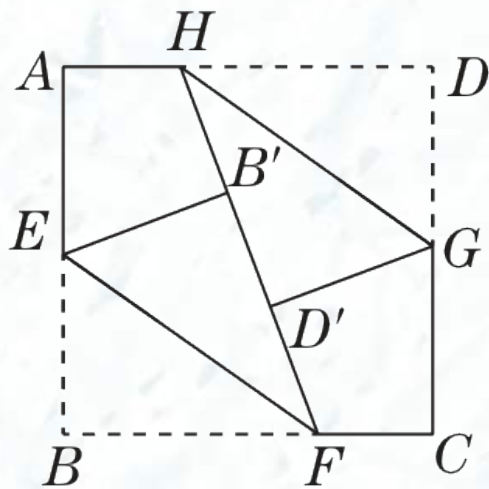
【解】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AD \parallel BC$. ∴ $\angle DHF = \angle BFH$. 由折叠知

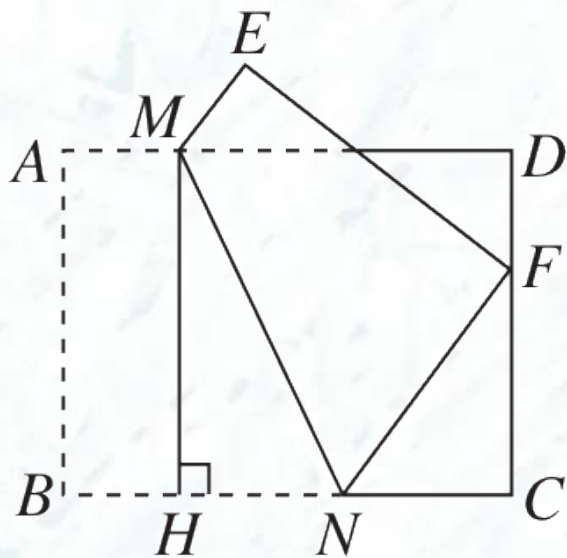
$$\angle FHG = \angle DHG = \frac{1}{2} \angle DHF,$$

$$\angle HFE = \angle BFE = \frac{1}{2} \angle BFH,$$

∴ $\angle FHG = \angle HFE$. ∴ $EF \parallel HG$, 即两条折痕 EF , HG 相互平行.



6.[2024·泰安肥城市模拟] 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$, 点 M , N 分别在边 AD , BC 上, 沿着 MN 折叠矩形 $ABCD$, 使点 A , B 分别落在 E , F 处, 且点 F 在线段 CD 上 (可与点 C , D 重合), 过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H .



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528056072040007007>