

# 江苏省苏州市南航苏州附中 2024 届高三上学期零模模拟

## 数学试题

学校: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 考号: \_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ , 集合  $B = \{y \mid y = |x|, x \in A\}$ , 则  $B =$  ( )
- A.  $\{-1\}$                       B.  $\{1, 2\}$                       C.  $\{0, 1, 2\}$                       D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 已知向量  $\vec{a} = (-1, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, x)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$  ( )
- A. 3                                  B. -3                                  C. 4                                  D. -4
3. 已知各顶点都在一个球面上的正三棱柱的高为 2, 这个球的体积为  $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ , 则这个正三棱柱的体积为 ( )
- A.  $4\sqrt{3}$                       B.  $6\sqrt{3}$                       C. 6                                  D. 4
4. 已知函数  $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cdot x^3$ , 若  $m$  满足  $f(\log_2 m) + f(\log_{0.5} m) < 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )
- A.  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$                       B.  $(2, +\infty)$                       C.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$                       D.  $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$
5. 某罐中装有大小和质地相同的 4 个红球和 3 个绿球, 每次不放回地随机摸出 1 个球. 记  $R_1 =$  “第一次摸球时摸到红球”,  $G_1 =$  “第一次摸球时摸到绿球”,  $R_2 =$  “第二次摸球时摸到红球”,  $G_2 =$  “第二次摸球时摸到绿球”,  $R =$  “两次都摸到红球”,  $G =$  “两次都摸到绿球”, 则下列说法中正确的是 ( )

A.  $P(G_2) = \frac{1}{3}$

B.  $P(R) = P(R_1)P(R_2)$

C.  $P(R_2) + P(G_2) = 1$

D.  $P(G_2 | R_1) + P(R_2 | G_1) = 1$

6. 在  $\triangle ABC$ ，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{DC}$ ,  $b\sin A + \sqrt{3}a\cos B = 0$ ，且  $2a + c = 12$ ，则  $BD$  的最小值为 ( )

A.  $\sqrt{2}$

B. 2

C.  $2\sqrt{6}$

D.  $3\sqrt{2}$

7. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = \frac{3}{5}$ ，且  $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$ ， $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2025$ ，则满足条件的最大整数  $n =$  ( )

A. 2022

B. 2023

C. 2024

D. 2025

8. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的右焦点为  $F$ ，以坐标原点  $O$  为圆心、 $OF$  为半径作圆与双曲线  $C$  的渐近线在第一象限交于点  $P$ ，设  $H$  为  $\triangle OPF$  的垂心，恰有  $OH = b$ ，

则双曲线  $C$  的离心率  $e$  应满足 ( )

A.  $e \in (1, \sqrt{2})$

B.  $e \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$

C.  $e \in (\sqrt{3}, 2)$

D.  $e \in (2, +\infty)$

## 二、多选题

9. 下列说法正确的是 ( )

A. 一组数 1, 5, 6, 7, 10, 13, 15, 16, 18, 20 的第 75 百分位数为 15.5

B. 在经验回归方程  $\hat{y} = -0.6x + 2$  中，当解释变量  $x$  每增加 1 个单位时，相应变量  $\hat{y}$

增加 0.6 个单位

C. 数据  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  的方差为  $M$ , 则数据  $3a_1+1, 3a_2+1, 3a_3+1, \dots, 3a_n+1$  的方差为  $9M$

D. 一个容量为 50 的样本方差  $s^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (x_i - 2)^2$ , 则这组样本数据的总和等于 100

10. 已知  $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ , 则 ( )

A. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$

B. 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 所得图象关于  $y$  轴对称

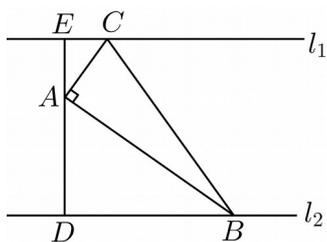
C. 函数  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减

D. 若  $f(\theta) = \frac{1}{2}$ , 则  $8 \tan\left(\theta + \frac{\pi\pi}{6}\right) - \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

11. 如图, 直线  $l_1 \parallel l_2$ , 点  $A$  是  $l_1, l_2$  之间的一个定点, 点  $A$  到  $l_1, l_2$  的距离分别为 1 和 2.

点  $B$  是直线  $l_2$  上一个动点, 过点  $A$  作  $AC \perp AB$ , 交直线  $l_1$  于点  $C, \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , 则

( )



A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

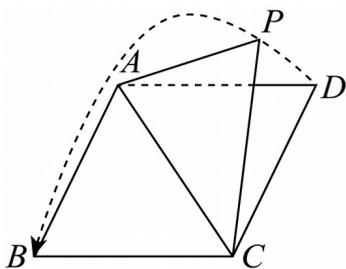
B.  $\triangle GAB$  面积的最小值是  $\frac{2}{3}$

C.  $|\overrightarrow{AG}| \geq 1$

D.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$  存在最小值

12. 如图, 已知菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\angle ADC = 60^\circ$ , 将  $\triangle ACD$  沿  $AC$  翻折为三棱锥

$P-ABC$ ，点  $P$  为翻折过程中点  $D$  的位置，则下列结论正确的是 ( )



- A. 无论点  $P$  在何位置，总有  $AC \perp PD$
- B. 点  $P$  存在两个位置，使得  $V_{P-ABC} = 1$  成立
- C. 当  $PB = \sqrt{6}$  时，边  $AD$  旋转所形成的曲面的面积为  $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
- D. 当  $PB = 2$  时， $M$  为  $PB$  上一点，则  $|AM| + |CM|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

### 三、填空题

13.  $(1-2x^2)\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_. (用数字作答)

14. 在  $\triangle ABC$  中  $A = \frac{\pi}{3}$ ，点  $O$  在  $\triangle ABC$  所在平面内，且  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ ，

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ ，则  $\triangle ABC$  外接圆的面积为\_\_\_\_.

15. 已知抛物线  $E: x^2 = 4y$  和圆  $F: x^2 + (y-1)^2 = 1$ ，过  $F$  点作直线  $l$  与上述两曲线自左而右依次交于点  $A, C, D, B$ ，则  $|AC| + 2|BD|$  的最小值为\_\_\_\_

16. 已知  $f(x) = |xe^x|$ ，若  $g(x) = [f(x)]^2 - 2tf(x) + 1 (t \in \mathbf{R})$  有四个不同的零点，则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_.

### 四、解答题

17. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为整数,  $a_3 = 9$ , 设其前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $\left\{\frac{S_n}{a_n+1}\right\}$  是公差

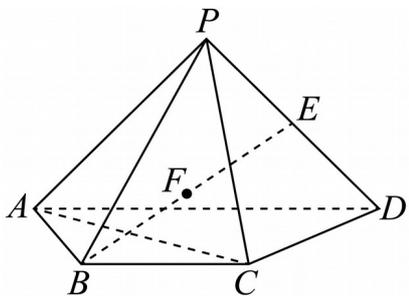
为  $\frac{1}{2}$  的等差数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = a_{2n-1} - 80$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\triangle PAD$  是以  $AD$  为斜边的等腰直角三角形, 且面

$PAD \perp$  面  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD = 2AB = 2BC = 2$ ,  $E$  为  $PD$  的中点.



(1) 求二面角  $P-AC-D$  所成角的余弦值;

(2) 设  $F$  是  $BE$  的中点, 判断点  $F$  是否在平面  $PAC$  内, 并证明结论.

19. 已知锐角  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  对应的边分别为  $a, b, c$ ,  $c=1$ .

$$\textcircled{1} \frac{b}{a} = \frac{\cos B}{1 + \cos A}; \quad \textcircled{2} \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C.$$

(1) 从  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  两个条件中任选一个, 证明:  $A=2B$ ;

(2) 若  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积, 求  $S$  的取值范围.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

20. 一只蚂蚁位于数轴  $x=0$  处, 这只蚂蚁每隔一秒钟向左或向右移动一个单位长度,

设它向右移动的概率为  $\frac{2}{3}$ , 向左移动的概率为  $\frac{1}{3}$ .

(1) 已知蚂蚁 2 秒后所在位置对应的实数为非负数, 求 2 秒后这只蚂蚁在  $x=0$  处的概率;

(2)记蚂蚁4秒后所在位置对应的实数为 $X$ ，求 $X$ 的分布列与期望.

21. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A$ 、

$B$ ，点 $F$ 是椭圆的右焦点， $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ ， $\overline{AF} \cdot \overline{FB} = 3$ .

(1)求椭圆 $C$ 的方程；

(2)经过椭圆右焦点 $F$ 且斜率不为零的动直线 $l$ 与椭圆交于 $M$ 、 $N$ 两点，试问 $x$ 轴上是

否存在异于点 $F$ 的定点 $T$ ，使 $|MF| \cdot |NT| = |NF| \cdot |MT|$ 恒成立？若存在，求出 $T$ 点坐标，

若不存在，说明理由.

22. 已知函数  $f(x) = ax - \frac{\sin \pi x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) 当  $a = 8$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x) < \sin 2x$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

参考答案:

1. C

【分析】根据集合  $B = \{y | y = |x|, x \in A\}$ , 求解  $B$  中的元素, 即可求出集合  $B$ .

【详解】因为  $B = \{y | y = |x|, x \in A\}$ ,  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ , 所以  $B = \{0, 1, 2\}$ .

故选: C.

2. D

【分析】利用平面向量共线的坐标表示以及数量积的坐标运算求解.

【详解】因为  $\vec{a} // \vec{b}$ , 所以  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , 即  $x = -2$ , 所以  $\vec{b} = (2, -2)$ ,

所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 - 2 = -4$ ,

故选: D.

3. B

【分析】先根据外接球体积得到外接球半径, 进而得到底面正三角形的外接圆半径为  $r$ ,

利用柱体体积公式求出答案.

【详解】设球的半径为  $R$ , 则  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi \Rightarrow R = \sqrt{5}$ ,

又正三棱柱的高为  $h = 2$ ,

设底面正三角形的外接圆半径为  $r$ ,

$\therefore \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ , 故  $1 + r^2 = 5$ , 解得  $r = 2$ ,

由正弦定理得底面等边三角形的边长为  $a = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ,

则这个正三棱柱的体积为  $\frac{1}{2}a^2 \times \sin 60^\circ \cdot h = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 6\sqrt{3}$ .

故选: B.

4. A

【分析】根据题意，由奇偶性的定义可得  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，然后求导得  $f'(x)$ ，

即可判断  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的单调性，再将不等式化简求解，即可得到结果。

【详解】因为函数  $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cdot x^3$  定义域为  $\mathbf{R}$  关于原点对称，

$$\text{且 } f(-x) = (e^{-x} - e^x) \cdot (-x)^3 = (e^x - e^{-x}) \cdot x^3 = f(x),$$

所以  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，

$$\text{又 } f'(x) = (e^x + e^{-x}) \cdot x^3 + 3x^2 \cdot (e^x - e^{-x}),$$

当  $x > 0$  时， $e^x > 1, 0 < e^{-x} < 1$ ，则  $f'(x) > 0$ ，所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，

$$\text{又 } \log_{0.5} m = -\log_2 m, \text{ 则 } f(\log_{0.5} m) = f(-\log_2 m) = f(\log_2 m),$$

且  $f(1) = e - \frac{1}{e}$ ，则不等式  $f(\log_2 m) + f(\log_{0.5} m) < 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$  可化为

$$2f(\log_2 m) < 2f(1), \text{ 即 } f(\log_2 m) < f(1),$$

且  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，

$$\text{则 } |\log_2 m| < 1, \text{ 即 } -1 < \log_2 m < 1, \text{ 即 } \log_2 \frac{1}{2} < \log_2 m < \log_2 2,$$

所以  $\frac{1}{2} < m < 2$ ，即实数  $m$  的取值范围是  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 。

故选：A

5. C

【分析】根据题意得  $P(G_2) = \frac{C_3^1 C_6^1}{A_7^2}$ ，可对 A 项判断；由  $R = R_1 \cap R_2$ ，可对 B 项判断；

由  $P(R_2) = \frac{4}{7}$ , 且  $P(R_2) + P(G_2) = 1$  可对 C 项判断; 由  $P(G_2 | R_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(R_2 | G_1) = \frac{2}{3}$  可对

D 项判断.

【详解】对于 A 项: 由题意知  $P(G_2) = \frac{C_3^1 C_6^1}{A_7^2} = \frac{3}{7}$ , 故 A 错误.

对于 B 项: 因为  $R = R_1 \cap R_2$ ,  $R_1, R_2$  不相互独立, 所以  $P(R) \neq P(R_1)P(R_2)$ , 故 B 错误.

对于 C 项: 因为  $P(R_2) = \frac{C_4^1 C_6^1}{A_7^2} = \frac{4}{7}$ , 所以  $P(R_2) + P(G_2) = 1$ , 故 C 正确.

对于 D 项:  $P(G_2 | R_1) = \frac{P(R_1 G_2)}{P(R_1)} = \frac{C_4^1 C_3^1}{A_7^2} = \frac{1}{2}$ ,  $P(R_2 | G_1) = \frac{P(G_1 R_2)}{P(G_1)} = \frac{C_3^1 C_4^1}{A_7^2} = \frac{2}{3}$ ,

则  $P(G_2 | R_1) + P(R_2 | G_1) \neq 1$ , 故 D 错误.

故选: C.

6. B

【分析】已知  $b \sin A + \sqrt{3} a \cos B = 0$ , 由正弦定理边化角, 化简可得  $B = \frac{2\pi}{3}$ , 设

$CD = m, BD = n$ , 在  $\triangle ADB$  和  $\triangle CDB$  中, 由余弦定理可得  $3n^2 = 4(a-3)^2 + 12$ , 可求  $BD$  的最小值.

【详解】由  $b \sin A + \sqrt{3} a \cos B = 0$  及正弦定理可得  $\sin B \sin A + \sqrt{3} \sin A \cos B = 0$ ,

由  $A \in (0, \pi)$ ,  $\sin A > 0$  可得  $\tan B = -\sqrt{3}$ , 故  $B = \frac{2\pi}{3}$ .

通解 设  $CD = m, BD = n$ , 由  $\overline{AC} = 3\overline{DC}$  可得  $AD = 2m$ ,

由余弦定理可得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC = a^2 + c^2 + ac$ , 又  $2a + c = 12$ ,

所以  $9m^2 = a^2 + (12-2a)^2 + a(12-2a)$ , 得  $3m^2 = a^2 - 12a + 48$ .

在  $\triangle ADB$  和  $\triangle CDB$  中, 由余弦定理得  $\cos \angle ADB = \frac{4m^2 + n^2 - c^2}{4mn}$ ,  $\cos \angle CDB = \frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn}$ ,

由  $\angle ADB + \angle CDB = \pi$  可得  $\frac{4m^2 + n^2 - c^2}{4mn} = -\frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn}$ ,

故  $3n^2 = -6m^2 + 2a^2 + c^2 = -2(a^2 - 12a + 48) + 2a^2 + (12-2a)^2 = 4(a-3)^2 + 12$ ,

当  $a=3$  时,  $3n^2$  取得最小值 12, 即  $3n^2 \geq 12$ , 得  $n \geq 2$ , 故  $BD$  的最小值为 2.

优解 由题意知  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ,

两边同时平方得

$$\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{9}c^2 - \frac{2}{9}ac + \frac{4}{9}a^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{9}c^2 \times \frac{4}{9}a^2} - \frac{2}{9}ac = \frac{2}{9}ac,$$

又  $2a+c=12$ , 所以当且仅当  $c^2 = 4a^2$ , 即  $a=3, c=6$  时取等号,

则  $\overrightarrow{BD}^2 \geq \frac{2}{9}ac = \frac{1}{9} \times 2a \times c = \frac{1}{9} \times 6 \times 6 = 4$ , 故  $BD$  的最小值为 2.

故选: B

7. C

【分析】将已知条件恒等变换为  $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right)$ , 则有  $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$  是等比数列, 从而得

$\frac{1}{a_n} = 2 \times \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} + 1$ ,  $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ , 根据  $S_n$  的单调性, 即可得答案.

【详解】因为  $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n+1}$ , 所以  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{3a_n} = \frac{1}{3a_n} + \frac{2}{3}$ , 所以  $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right)$ ,

所以数列  $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$  是等比数列，首项为  $\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}$ ，公比为  $\frac{1}{3}$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ 即 } \frac{1}{a_n}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+1,$$

$$\text{所以 } S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\times\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+n$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}+n=n+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

而当  $n\in\mathbf{N}^*$  时， $S_n$  单调递增，

$$\text{又因为 } S_{2024}=2025-\left(\frac{1}{3}\right)^{2024}<2025, \text{ 且 } S_{2025}=2026-\left(\frac{1}{3}\right)^{2025}>2025,$$

所以满足条件的最大整数  $n=2024$ 。

故选：C。

**【点睛】** 关键点睛：本题的关键是发现  $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$  是等比数列，从而由等比数列前  $n$  项和公式

可将  $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$  表示出来，结合单调性即可得解。

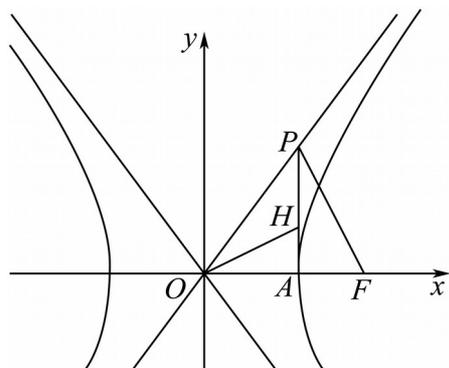
8. B

**【分析】** 根据  $H$  为垂心，且  $OP=OF$  得到  $\angle HOA=\frac{1}{2}\angle POA$ ，利用渐近线的斜率为  $\frac{b}{a}$  和

$OP=c$  得到  $OA=a$ ， $PA=b$ ，然后利用余弦的二倍角公式列等式得到  $e^3+e^2-3e-1=0$ ，构

构造函数  $f(e) = e^3 + e^2 - 3e - 1$ ，利用单调性和零点存在性定理确定  $e$  的范围。

【详解】



连接  $PA$  交  $OF$  于  $A$ ，由题意知， $PA \perp OF$ ， $OH \perp PF$ ， $OH = b$ ， $OP = OF = c$ ， $k_{OP} = \frac{b}{a}$ ，

在  $Rt\triangle OPA$  中， $OP = c$ ， $k_{OP} = \frac{b}{a}$ ， $c^2 = a^2 + b^2$ ，所以  $OA = a$ ， $PA = b$ ，

因为  $OP = OF$ ， $OH \perp PF$ ，所以  $\angle HOA = \frac{1}{2} \angle POA$ ，

$\cos \angle HOA = \frac{a}{b}$ ， $\cos \angle POA = \frac{a}{c}$ ，所以  $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = \frac{a}{c}$ ，整理得  $\frac{2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} - 1 = \frac{1}{\frac{c}{a}}$ ，即

$\frac{2}{e^2 - 1} - 1 = \frac{1}{e}$ ，整理得  $e^3 + e^2 - 3e - 1 = 0$ ，

设  $f(e) = e^3 + e^2 - 3e - 1$ ， $e \in (1, +\infty)$ ，则  $f'(e) = 3e^2 + 2e - 3$ ，对称轴为  $e = -\frac{1}{3}$ ，所以  $f'(e)$

在  $(1, +\infty)$  单调递增，又  $f'(1) = 2 > 0$ ，所以当  $e > 1$  时， $f'(e) > 0$ ，即  $f(e)$  在  $(1, +\infty)$  上单调

递增，又  $f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} < 0$ ， $f(\sqrt{3}) = 2 > 0$ ，所以  $e \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 。

故选：B.

【点睛】方法点点睛：双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质，求双曲线的离心率(或离心率的取值范围)

①求出  $a, c$ ，代入公式  $e = \frac{c}{a}$ ；

②只需要根据一个条件得到关于  $a, b, c$  的齐次式，结合  $b^2 = c^2 - a^2$  转化为  $a, c$  的齐次式，然后等式(不等式)两边分别除以  $a$  或  $a^2$  转化为关于  $e$  的方程(不等式)，解方程(不等式)即可得  $e$  ( $e$  的取值范围).

9. CD

【分析】由百分位数的定义，即可判断 A，由回归方程的性质即可判断 B，由方差的性质即可判断 CD.

【详解】对于 A，因为  $10 \times 75\% = 7.5$ ，所以这组数据的第 75 百分位数是第 8 个数，即为 16，故 A 错误；

对于 B，由回归方程可知，当解释变量  $x$  每增加 1 个单位时，相应变量  $\hat{y}$  减少 0.6 个单位，故 B 错误；

对于 C，由数据  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  的方差为  $M$ ，

则数据  $3a_1 + 1, 3a_2 + 1, 3a_3 + 1, \dots, 3a_n + 1$  的方差为  $3^2 \cdot M = 9M$ ，故 C 正确；

对于 D，由  $s^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (x_i - 2)^2$ ，得  $\bar{x} = 2$ ，

所以这组样本数据的总和等于  $50 \times 2 = 100$ ，故 D 正确.

故选：CD.

10. ACD

【分析】运用辅助角公式化简，得到  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，再结合正弦型图象与性质，三

角函数图象的平移变换逐项判断即可.

【详解】由  $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ ，得  $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

对于 A：最小正周期为  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，所以 A 正确；

对于 B：将函数  $f(x)$  的图象上所有点向右平移  $\frac{\pi}{6}$ ，

所得图象的函数解析式为  $g(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin 2x$ ，

而  $g(x)$  为奇函数，所以其图象关于原点对称，所以 B 错误；

对于 C：令  $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，化简得  $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ，

当  $k=0$  时， $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ，又因为  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \subseteq \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ，

所以函数在  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  单调递减，所以 C 正确；

对于 D 选项：因为  $f(\theta) = \frac{1}{2}$ ，所以  $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ ，

所以  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$ ，所以  $\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{8}$ ，

即得  $\frac{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}{\tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 1} = \frac{1}{8}$ ，也就是  $8\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，

所以 D 正确。

故选：ACD.

11. BC

【分析】根据题意建立合适的直角坐标系，设出  $C(m,3)$ ， $B(n,0)$ ， $G(x,y)$ ，根据

$AC \perp AB$  及  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ，即可找到三个点的坐标关系，分别写出  $\overrightarrow{AG}$ ， $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，

即可判断 A；取  $AB$  中点为  $F$ ，连接  $CF$ ，根据  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ，可得  $G, C, F$  三点共线，

且  $G$  为  $CF$  靠近  $F$  的三等分点，即可找到  $\triangle GAB$  面积与  $\triangle ABC$  面积之间比例关系，进而建

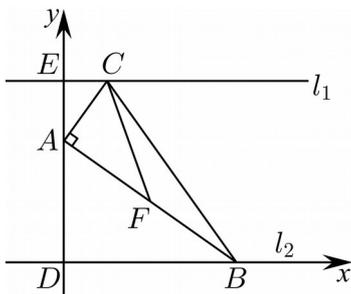
立  $\triangle GAB$  面积等式，根据基本不等式即可判断 B；求出  $|\overrightarrow{AG}|$ ，再根据基本不等式可判断

C；写出  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$  进行化简，根据  $m$  的范围即可得到  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$  的最值情况.

【详解】设  $AB$  中点为  $F$ ，

连接  $CF$ ，

以  $D$  为原点， $DB, DE$  方向分别为  $x, y$  轴建立如图所示的直角坐标系，



则  $A(0,2)$ ， $E(0,3)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/536115212151010040>