



## 6. 信号分析与处理

本章主要内容

- 傅立叶级数及周期信号频谱特点；
- 傅立叶变换的概念；
- DFT的概念及其公式推导；
- 频谱混迭现象及采样定理；
- 时域有限化和频谱泄漏；
- 抑制频谱泄漏、栅栏效应的措施
- DFT参数选择。





## 概述

信号的频谱分析是揭示信号在频域特征的信号分析方法。

理论依据：由法国工程师傅立叶于1807年提出的，后人称为傅立叶分析理论。





## 6.1 傅立叶级数

### 6.1.1 傅立叶级数的基本思想

任一周期函数（信号）都可由基波及与基波频率成整数倍的幅值不同的三角函数合成，称之为傅立叶级数。

对非周期函数，若是时限的，则将函数以其持续时间为周期，对信号进行周期延拓，变成周期信号后，可用傅立叶级数展开。





## 6.1.2 傅里叶级数的数学基础

设  $y(t)$  为一周期信号并满足狄里赫利条件，则可用傅立叶级数展开，展开形式分实数（三角函数）形式和复数形式。





## 傅立叶级数的三角函数形式

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_1 t + b_m \sin m\omega_1 t)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\omega_m t + j_m)$$

$$A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$$

$$\varphi_m = \arctan(b_m / a_m)$$

$$A_m = A_m(\omega_m)$$

$$\varphi_m = \varphi_m(\omega_m)$$

信号中的  $m$  次谐波分量的幅值；

信号中的  $m$  次谐波分量的初相角；

称为幅频谱；

称为相频





## 傅立叶级数的复数形式

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j\omega_m t}$$



式中  $c_m = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-j\omega_m t} dt$  为傅里叶级数系数，也称频谱系数。记为

$$Y(m\omega_1) = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-j\omega_m t} dt$$





## 6.1.3 周期信号的频谱特点

-  离散性
-  谐波性
-  收敛性

物理解释





## 6.2 傅立叶变换和非周期信号频谱



由傅立叶级数推导出傅立叶变换公式

$$T \longrightarrow \infty \quad \Delta f \longrightarrow 0$$



非周期信号频谱的特点

离散谱  $\longrightarrow$  连续谱







## 6.3 离散傅里叶变换 (DFT)

### 6.3.1 基本概念

离散傅立叶变换是傅立叶变换CFT经过时域  
和频域有限化和离散化处理后导出的计算机系统  
分析信号频谱的公式。它实际来源于CFT。





## 6.3.2 离散傅立叶变换式的推导

在理解对信号在时域上离散化和有限化处理过程的基础上，加深对采样定理、频谱泄漏、栅栏效应等物理概念的理解，从而掌握对信号进行频谱分析时各主要参数的选择方法。





先将CFT的正、逆公式合写为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi ft} df \quad (1)$$

对信号在时域上进行离散化:

$$t \rightarrow n \cdot T_s \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

采样的长度是有限的, 信号长度为:

$$L = (N-1) \cdot T_s \approx N \cdot T_s$$

频域上离散化:

$$f \rightarrow k \cdot \Delta f \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

显然输出最高频率为:

$$F_s = (N-1) \cdot \Delta f \approx N \cdot \Delta f$$





其它:

$$dt \rightarrow T_s \quad df \rightarrow \Delta f \quad \int \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}$$

代入 (1) 式中得:

$$y(n, T_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} y(n \cdot T_s) e^{-j2\pi nk/N} \right] e^{j2\pi nk/N}$$

得正、逆离散傅立叶变换式:

DFT:

$$Y_K = Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

IDFT:

$$y_n = y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot W_N^{-nk} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$





## 思考

- 原连续信号在时域离散化后所得信号与原信号的频谱是否一致？都相应发生那些变化？

*采样周期如何选择？*

- 对信号进行时域有限化处理所得信号频谱会发生那些变化？

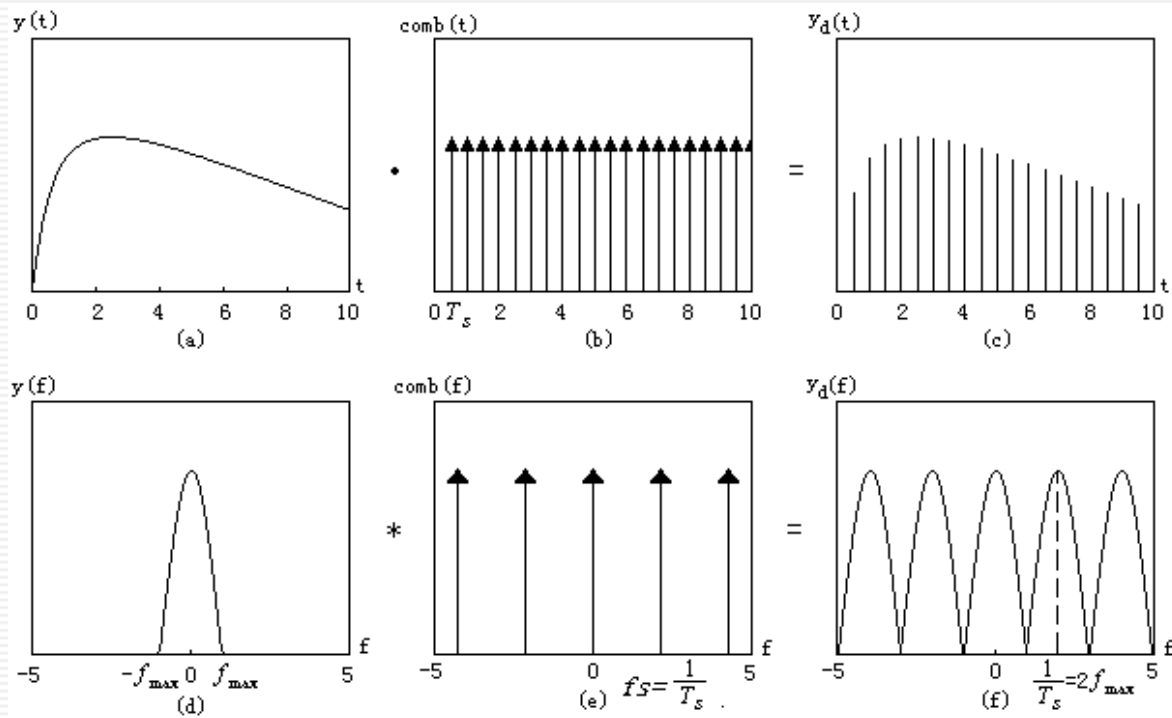
*采样长度 $L$ 如何选择？*

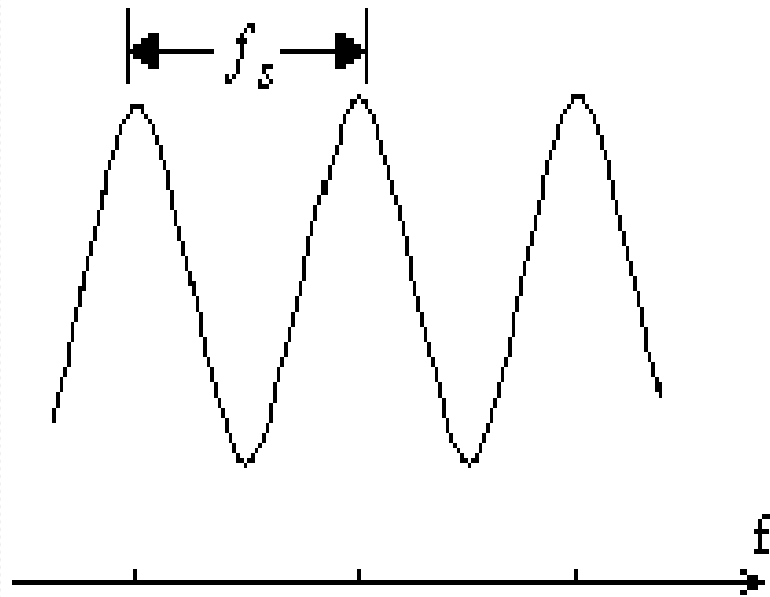
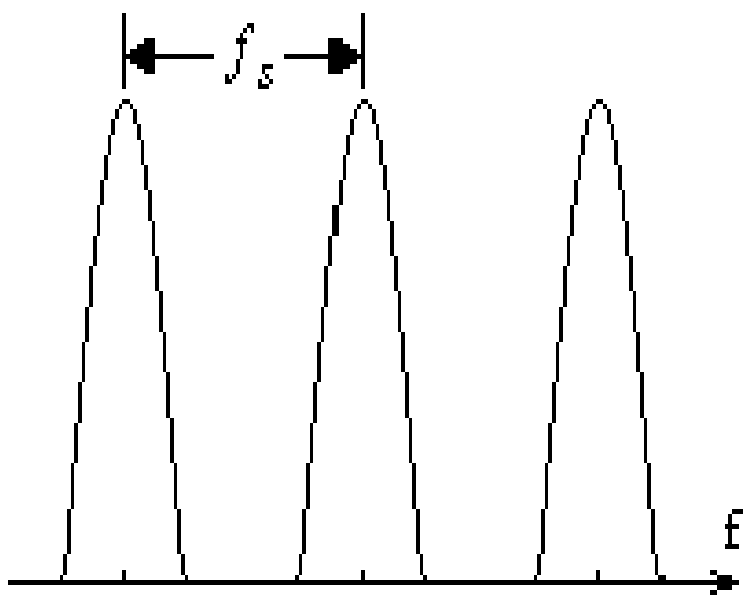




## 6.4 频谱混迭与采样定理

### 6.4.1 频谱混迭





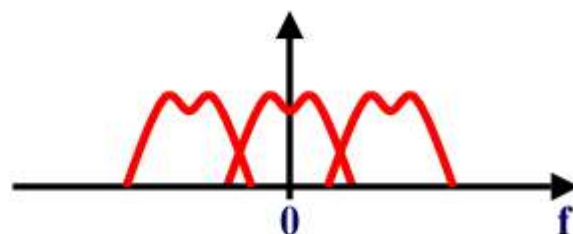
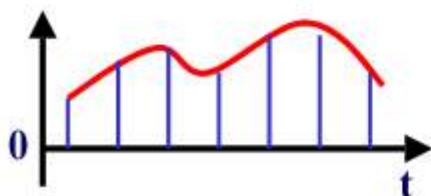
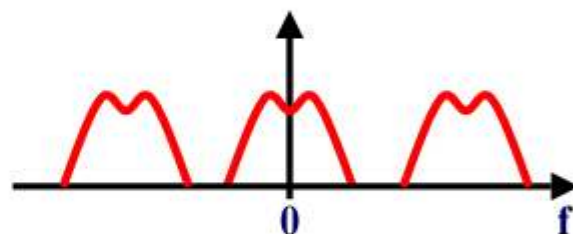
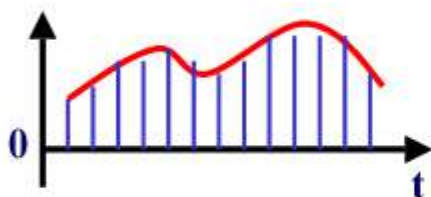
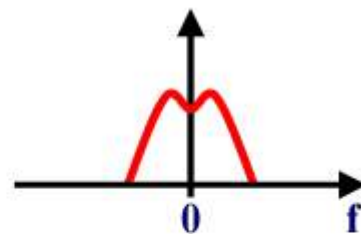
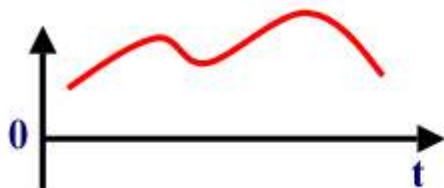
(a) 无混叠现象 ( $f_s \geq 2F_{\max}$ )

(b) 频谱混叠 ( $f_s < 2F_{\max}$ )





## 频域解释







为保证采样后信号能真实地保留原始模拟信号信息，信号采样频率必须至少为原信号中最高频率成分的2倍。称为采样定理。即：

$$F_s > 2 F_{\max}$$





## 香农采样定理



信号经采样后，其频谱为原信号频谱的周期延拓，延拓的周期为  $T_s$ ，且在幅值上为原信号频谱幅值的  $1/T_s$

倍。



若连续信号的最高频率为  $F_{\max}$ ，则当  $f_s < 2F_{\max}$  时，频域波形会产生混叠。





抑制频谱混叠的方法:

采样定理:  $f_s \geq 2 f_m$   
加预滤波器

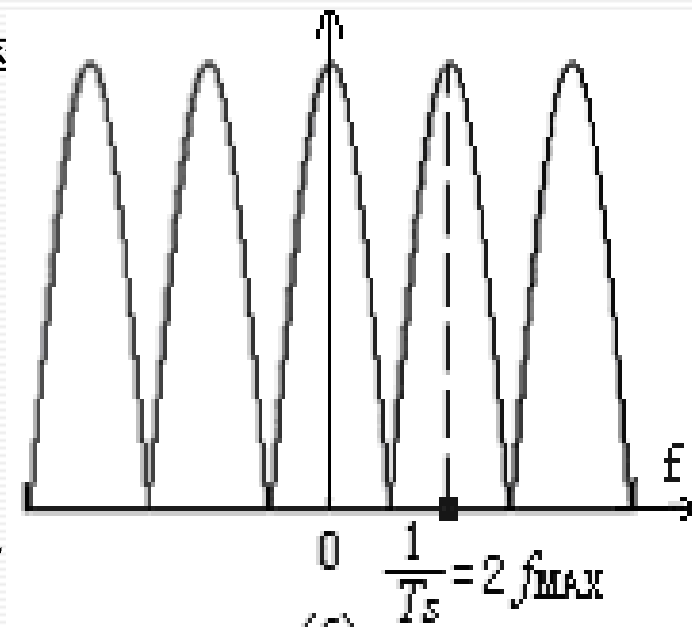


用于降低被测信号的最高频率

截止频率:  $f_c = f_m$

限制X(t)的高频上限

容易实现  $f_s \geq 2 f_m$  , 避免过高苛刻要求  $f_s$





## 6.5 时域有限化与频谱泄漏

### 6.5.1 频谱泄漏产生的原因

以余弦信号为例，说明对一个非时限信号进行有限化处理所引起的泄漏问题。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/536153202100010120>