# 对 偶 理 论
# (Duality Theory)

# 一、问 题 的 提 出

对偶性是线性规划问题的最主要的内容之一。每一种线性规划（ LP[linear programming ]）必然有与之相伴而生的另一种线性规划问题，即任何一种求 maxZ 的LP都有一种求 minZ 的LP。其中的一种问题叫“原问题”，记为“P”，另一种称为“对偶问题”，记为“D”。

例一、资源的合理利用问题

已知资料如表所示，问应怎样安排生产计划使得既能充分利用既有资源有使总利润最大?

| 单件消耗 \ 产品 / 资源 | 甲 | 乙 | 资源限制 |
| --- | --- | --- | --- |
| A | 5 | 2 | 170（钢材） |
| B | 2 | 3 | 100（煤炭） |
| C | 1 | 5 | 150（设备） |
| 单件利润 | 10 | 18 | |

数学模型：

$$\max \quad Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

（原问题）

下面从另一种角度来讨论这个问题：

假定：该厂的决策者不是考虑自己生产甲、乙两种产品，而是将厂里的既有资源用于接受外来加工任务，只收取加工费。即将资源出租。试问该决策者应制定怎样的收费原则（合理的）？

分析问题：

1、每种资源收回的费用不能低于自己生产时的可获利润；

2、定价又不能太高，要使对方能够接受。

设$y_1, y_2, y_3$分别为三种资源的收费单价，所以有下式：

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

就目标而言，用下式可以表达：

$$170y_1 + 100y_2 + 150y_3 = W$$

一般而言，$W$ 越大越好，但因需双方满意，故

$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$ 为最佳。

该问题的数学模型为：

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

模型对比：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

（原问题）

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

| 项目 | 原问题 | 对偶问题 |
| --- | --- | --- |
| A | • 约束的系数矩阵 | • 约束的系数矩阵的转置 |
| b | • 约束条件的右端项向量 | • 目的函数的价值系数系数向量 |
| C | • 目的函数的价值系数系数向量 | • 约束条件的右端项向量 |
| • 目的函数 | $\max z = CX$ | $\min \omega = Y'b$ |
| 约束条件 | $AX \leq b$ | $A'Y \geq C'$ |
| 决策变量 | $X \geq 0$ | $Y \geq 0$ |

# 二、线性规划的对偶理论

## （一）、对偶问题的形式

1、对称型对偶问题：已知 P，写出 D。

矩阵形式：

$$P \quad \max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$D \quad \min W = Yb$$

$$\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

## 例一、写出线性规划问题的对偶问题

$$\max \quad Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将原式变形

$$\max \quad Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} -2x - 3x_2 + 5x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

注意：后来不强调等式右段项 $b\geqslant 0$，原因在对偶单纯型表中只确保 $\sigma_j \geq 0$ 而不确保 $B^{-1}b \geq 0$，故 $b$ 能够是负数。

对偶问题：$\min W = -2y_1 + 3y_2 - 5y_3$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -3 \\ 5y_1 + 7y_2 - 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

## 2、非对称型对偶问题

矩阵形式： $P \quad \max Z = CX$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$D \quad \min W = Yb$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \text{ 无符号限制（无约束）} \end{cases}$$

可以写成 $\max CX$

$$st.\begin{cases} AX \geq b \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

可改写为 $\max CX$

$$\text{st.}\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题为

$$\min(Y_1\ Y_2)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$st.\begin{cases} (Y_1\ Y_2)\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \geq C \\ (Y_1\ \ Y_2) \geq 0 \end{cases}$$

其中 $Y_1, Y_2$ 为 $m$ 维行向量

令 $Y = Y_1 - Y_2$

则有 $\min Yb$

$\text{st.} YA \geq C$

其中Y无约束

例二、原问题

$$\max \quad Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：对偶问题为

$$\min \quad W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \ge -3 \\ -5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \ge 4 \\ y_1, y_2, y_3 \quad \text{无约束} \end{cases}$$

## 2、混合型对偶问题

矩阵形式：$P \qquad \max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \le b_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = b_2 \\ A_{31}X_1 + A_{32}X_2 \ge b_3 \\ X_1 \ge 0, X_2\text{无约束} \end{cases}$$

首先变形

$$\max\ z = C_1 X_1 + C_2 X_{21} - C_2 X_{22}$$

$$st.\begin{cases} A_{11} X_1 + A_{12} X_{21} - A_{12} X_{22} \le b_1 \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_{21} - A_{22} X_{22} \le b_2 \\ - A_{21} X_1 - A_{22} X_{21} + A_{22} X_{22} \le -b_2 \\ - A_{31} X_1 - A_{32} X_{21} + A_{32} X_{22} \le -b_3 \\ \quad X_1 \ge 0, X_{21} \ge 0, X_{22} \ge 0 \end{cases}$$

其对偶问题为

$$\min \omega = Y_1 b_1 + Y_{21} b_2 - Y_{22} b_2 - Y_{31} b_3$$

$$st.\begin{cases} Y_1 A_{11} + Y_{21} A_{21} - Y_{22} A_{21} - Y_{31} A_{31} \geq C_1 \\ Y_1 A_{12} + Y_{21} A_{22} - Y_{22} A_{22} - Y_{31} A_{32} \geq C_2 \\ -Y_1 A_{12} - Y_{21} A_{22} + Y_{22} A_{22} + Y_{31} A_{32} \geq -C_2 \\ \qquad Y_1 \geq 0, Y_{21} \geq 0, Y_{22} \geq 0, Y_{31} \geq 0 \end{cases}$$

令$Y_2=Y_{21}-Y_{22}, Y_3=-Y_{31},$并综合后两个约束。

$$D \quad \min W = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3$$

$$\text{st.} \begin{cases} Y_1 A_{11} + Y_2 A_{21} + Y_3 A_{31} \geq C_1 \\ Y_1 A_{12} + Y_2 A_{22} + Y_3 A_{32} = C_2 \\ Y_1 \geq 0, Y_3 \leq 0, Y_2 \text{无约束} \end{cases}$$

例三、

原问题

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

对偶问题

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \le 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \ge -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

# 一、 对偶问题的一般规则

1.如果原问题是对目标函数$CX$求最大（小）值，

2.对偶问题就是对目标函数$Yb$求最小（大）值。

二、

1.将原问题的不等式约束统一成$\le$的形式，对目标函数求最大值；

2.将原问题的不等式约束统一成$\ge$的形式，对目标函数求最小值；

三、原问题的每一个行约束(指除非负性条件外的线性等式或不等式约束)对应对偶问题的一个变量。

1.若该行约束是不等式，则限制$y_i \ge 0$

2.若该行约束是等式，则$y_i$无符号限制。

四、原问题的每一个变量$x_j$的相应的系数向量$P_j = (a_{1j}, a_{2j} \cdots, a_{mj})$对应对偶问题的一个行约束。

1.如果原问题不等式约束统一成$\le$的形式，且该$x_j$有非负限制，则对应行约束为$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$；

如果$x_j < 0$，则对应行约束为$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$；

2.若原问题不等式约束统一成$\ge$的形式，且该$x_j$有非负限制，则对应行约束为$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$；

如果$x_j < 0$，则对应行约束为$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$；

3.如果该$x_j$无符号限制，则对应行约束为$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

例四、线性规划问题如下：

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2、x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

将不等式约束统一成,列出表格

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x1 | x2 | x3 | x4 | |
| | 2 | 3 | -5 | 1 | Min f |
| y1 | 1 | 1 | -3 | 1 | ≥5 |
| y2 | -2 | 0 | -2 | 4 | ≥-4 |
| y3 | 0 | 1 | 1 | 1 | =6 |
| | ≤0 | ≥0 | ≥0 | 无约束 | |

对偶问题： $\max W = 5y_1 - 4y_2 + 6y_3$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

# （二）、对偶问题的性质

## 1、对称性：对偶问题的对偶是原问题。

$$\max Z = CX \quad \text{s.t.}\ AX \le b,\ X \ge 0$$

对偶的定义

$$\min W = Yb \quad \text{s.t.}\ YA \ge C,\ Y \ge 0$$

$$\max W' = -Yb \quad \text{s.t.}\ -YA \le -C,\ Y \ge 0$$

对偶的定义

$$\min Z' = -CX \quad \text{s.t.}\ -AX \ge -b,\ X \ge 0$$

2、弱对偶原理（弱对偶性）：设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是问题（P）和（D）的可行解，则必有

$$C\,\overline{X} \le \overline{Y}\,b,\text{即}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

推论. 若 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是问题（P）和（D）的可行解，则 $C\,\overline{X}$ 是（D）的目的函数最小值的一种下界；$\overline{Y}b$ 是（P）的目的函数最大值的一种上界。

例

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

（P） $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_{1-4} \ge 0 \end{cases}$$

试估计它们目的函数的界。

解：

$$\min W = 20y_1 + 20y_2$$

（D）
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

可知：$\bar{X}$ =（1，1，1，1），$\bar{Y}$ =（1，1），分别是（P）和（D）的可行解。$Z$=10，$W$=40，故有 $C\bar{X} < \bar{Y}b$，弱对偶定理成立。由推论可知，$W$ 的最小值不能不大于10，$Z$ 的最大值不能超出40。

## 3、无界性.

在一对对偶问题（P）和（D）中，若其中一种问题有可行解，但目的函数无界，则另一种问题不可行；反之不成立。

有关无界性有如下结论：

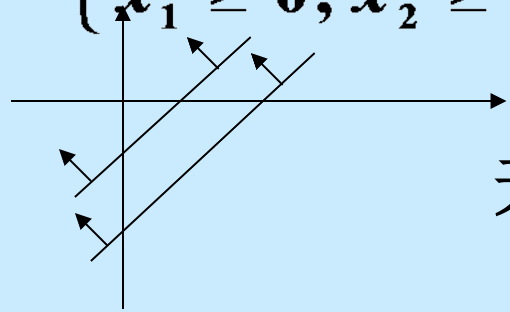
<table>
<tr><th>原问题</th><th>对偶问题</th></tr>
<tr><td>问题无界</td><td rowspan="2">无可行解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">无可行解</td></tr>
<tr><td>问题无界</td></tr>
</table>

如：

P

$$\max\ Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

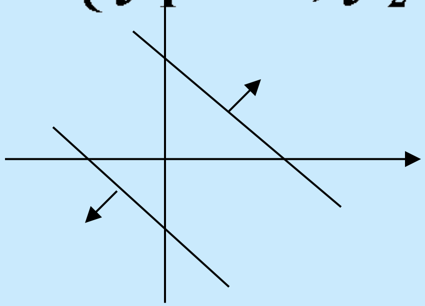


无界

D

$$\min\ W = 4y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 2 \\ -y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$



无可行解

**注意：反之不成立，即当原问题（对偶问题）无可行解时，其对偶问题（原问题）或具有无界解或无可行解。**

例：两者皆无可行解

原问题（对偶问题）

$$\max z = x_1 - x_2$$

$$st.\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1 \\ -x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题（原问题）

$$\min \omega = -y_1 - y_2$$

$$st.\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 1 \\ -y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

4、最优性：

若 $X^*$ 和 $Y^*$ 分别是 P 和 D 的可行解且 $CX^* = Y^* b$，

则 $X^*$. $Y^*$ 分别是问题 P和D 的最优解。

5、对偶性：

若一对对偶问题 P 和 D 都有可行解，则它们都有最优解，且目的函数的最优值必相等。

推论:若 P 和 D 的任意一种有最优解，则另一种也有最优解，且目的函数的最优值相等。

综上所述，一对对偶问题的关系，只能有下面三种情况之一出现：

①.都有最优解，分别设为$X^*$ 和 $Y^*$，则必有$CX^*=Y^*b$；

②. 一种问题无界，则另一种问题无可行解；

③.两个都无可行解。

## 6、互补松弛定理：

设$X^*$和$Y^*$分别是问题 **P** 和 **D** 的可行解，则它们分别是最优解的充要条件是

$$\begin{cases} Y^*(b - AX^*) = 0 \text{或} Y^* X_s = 0 \\ (Y^* A - C) X^* = 0 \text{或} Y_s X^* = 0 \end{cases}$$

同步成立

$X_s, Y_s$为松弛变量的可行解。

互补松弛条件可以写成下式

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{si} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{sj} x_j^* = 0$$

因为变量都非负，要使求和等式等于零，则肯定每一分量为零。所以：

$$\text{当}y_i^* > 0\text{时，}x_{si} = 0\text{，反之当}x_{si} > 0\text{时}y_i^* = 0$$

$$\text{当}y_{sj} > 0\text{时，}x_j^* = 0\text{，反之当}x_j^* > 0\text{时}y_{sj} = 0$$

一般而言，我们把某一可行点（如X*和Y*）处的严格不等式约束（涉及对变量的非负约束）称为松约束，而把严格等式约束称为紧约束。所以有如下推论：

设一对对偶问题都有可行解，若原问题的某一约束是某个最优解的松约束，则它的对偶约束一定是其对偶问题最优解的紧约束。

例、已知

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

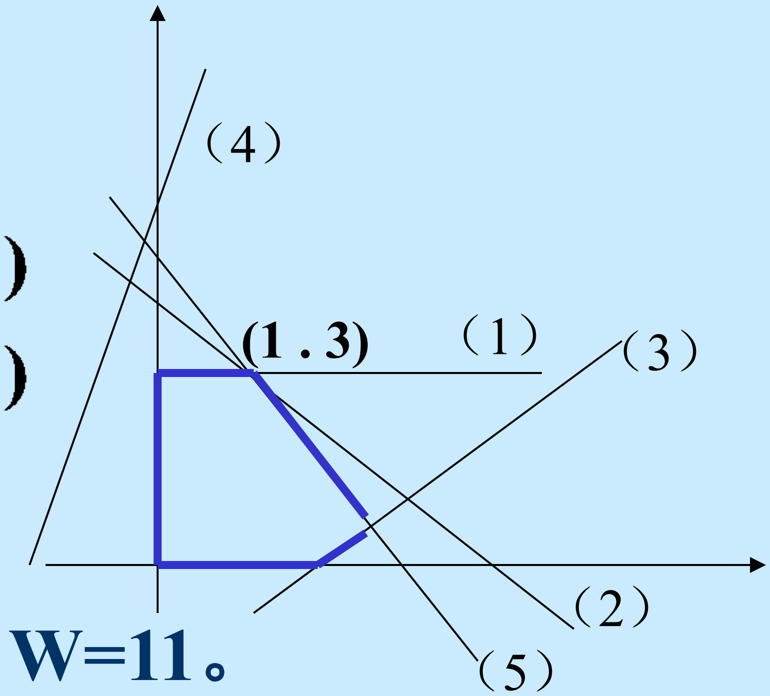
$$\begin{cases} \quad\quad x_2 + x_3 - 5x_4 + 3x_5 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \quad x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ x_{1-5} \geq 0 \end{cases}$$

试经过求对偶问题的最优解来求解原问题的最优解。

解：对偶问题为

$$\max W = 2y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_2 \le 3 & (1) \\ y_1 + y_2 \le 4 & (2) \\ y_1 - y_2 \le 2 & (3) \\ -5y_1 + y_2 \le 5 & (4) \\ 3y_1 + 2y_2 \le 9 & (5) \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$




用图解法求出： $Y^*$=（1 , 3）， W=11。

将$y^*_1$=1， $y^*_2$=3 代入对偶约束条件，

（1）（2）（5）式为紧约束，（3）（4）为松约束。

令原问题的最优解为$X^*$ = （$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$），则根据互补松弛条件，必有$x_3 = x_4 = 0$

又因为$y^*_1>0$， $y^*_2>0$，原问题的约束必为等式，即

$$\begin{cases} x_2+3x_5=2 \\ x_1+x_2+2x_5=3 \end{cases}$$ 化简为 $$\begin{cases} x_1=1+x_5 \\ x_2=2-3x_5 \end{cases}$$

此方程组为无穷多解

令$x_5=0$, 得到$x_1=1$， $x_2=2$
即$X^*_1=$（1,2,0,0,0）为原问题的
一种最优解，Z=11。

再令 $x_5=2/3$，得到$x_1=5/3$， $x_2=0$
即$X^*_2$ （5/3,0,0,0,2/3）
也是原问题的一种最优解，Z=11。

例、已知原问题的最优解为X* =（0，0，4），Z=12 试求对偶问题的最优解。

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解： $\min W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 & （1） \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 & （2） \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 & （3） \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

将$X^*$ =（0， 0， 4）代入原问题中，有下式：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=-20 & <2 \\ 3x_1-\ \ x_2+6x_3=24 & >1 \\ \ \ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3\ =4 & =4 \end{cases}$$

所以，根据互补松弛条件，必有$y^*_1 = y^*_2 = 0$，代入对偶问题（3）式， $y_3 = 3$。所以，对偶问题的最优解为 $Y^*$ =（0， 0，3），W=12。