目　录

摘　要

近年来，以压缩感知理论为基础的信号重构技术能够实现对高维数据的有效处理，而且在语音识别、图像处理、医疗影像等新兴领域有广泛的应用前景，如何有效地重构原信号以及提升信号质量至关重要。在压缩感知重构理论中，大量的研究者主要建立合适的非凸优化模型替代ℓ_0最小化模型，进行理论和数值分析研究，从而优化信号重构的条件。$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型是一种新的非凸优化模型，可以更好的逼近ℓ_0范数。因此，本文主要基于$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型研究稀疏信号的重构，主要工作如下：

利用约束等距性，建立进行信号重构的充分条件。而且给出在有噪声干扰的情况下信号重构的误差估计，将所得的理论结果推广到高斯噪声情形，并进行详细的分析。在此基础上，进一步构造部分支集中已知的$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型，首先使用约束等距性，讨论噪声中鲁棒重构稀疏信号的理论结果，优化信号重构的条件。最后，借助约束等距性常数和约束正交性常数的特性，创建出有利于重构稀疏信号的全新条件。

基于$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型进行数值模拟实验。为了求解$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型，提出近似求解$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化的一个新算法——$ADMM_{\ell_r-\alpha\ell_1}$算法，构建算法的基本框架。该算法运用罚函数法将稀疏约束模型转化为无约束模型，主要采用迭代重加权最小二乘法近似非凸度量，构建对应的增广拉格朗日函数，再利用交替方向乘子法进行求解，最后，通过模拟数据实验将$ADMM_{\ell_r-\alpha\ell_1}$算法与其他算法进行对比研究，揭示了此算法的有效性及其优越的重构性能。进一步，通过数值实验证明了部分支撑已知的$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化可以提高信号的重构性能。

关键词　压缩感知;信号重构;误差估计;非凸优化

ABSTRACT

In recent years, signal reconstruction technology based on compressed sensing theory can effectively process high-dimensional data, and has a wide range of application prospects in emerging fields such as speech recognition, image processing, medical imaging, etc. How to effectively reconstruct the original signal and improve the quality of the signal is crucial. In the compressed sensing reconstruction theory, a large number of researchers mainly establish a suitable non-convex optimization model to replace the minimization model, and carry out theoretical and numerical analysis research, so as to optimize the conditions of signal reconstruction. Minimization model is a new non-convex optimization model, which can approximate the norm better. Therefore, this paper mainly studies sparse signal reconstruction based on $\ell_r-\alpha\ell_1$ minimization model, and the main work is as follows：

The sufficient conditions for signal reconstruction are established by using constrained equidistance. The error estimation of signal reconstruction in the case of noise interference is given, and the theoretical results are extended to the case of Gaussian noise and analyzed in detail. On this basis, a $\ell_r-\alpha\ell_1$ minimization model with known partial branch sets is constructed. Firstly, the theoretical results of robust reconstruction of sparse signal in noise are discussed by using constrained isometry, and the conditions of signal reconstruction are optimized. Finally, a new condition for reconstructing sparse signals is created by using the properties of constrained isometric constants and constrained orthogonality constants.

Numerical simulation experiments are carried out based on the $\ell_r-\alpha\ell_1$ minimization model. In order to solve the $\ell_r-\alpha\ell_1$ minimization model, a new algorithm for approximate minimization is proposed, and the basic framework of the $ADMM_{\ell_r-\alpha\ell_1}$ algorithm is constructed. This algorithm uses the penalty function method to transform the sparse constrained model into an unconstrained model, mainly adopts the iterative reweighted least square method to approximate the non-convex metric, constructs the corresponding augmented Lagrange function, and then solves it by the alternating direction multiplier method. Finally, the algorithm is compared with other algorithms through the simulation data experiment. The effectiveness of $ADMM_{\ell_r-\alpha\ell_1}$ algorithm and its excellent reconstruction performance are revealed. Furthermore, it is proved by numerical experiments that the partial support $\ell_r-\alpha\ell_1$ minimization can improve the signal

reconstruction performance.

Key words: compressed sensing; Signal reconstruction; error estimation; Non-convex optimization

符号说明

符号	含义
RIP	约束等距性
ROP	约束正交性
RIC	约束等距性常数
ROC	约束正交性常数
x	随机向量
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$	测量矩阵
B	噪声系统
δ	约束等距性常数
θ	约束正交性常数
$\|x\|_0$	随机向量 x 的 ℓ_0 拟范数
$\|x\|_1$	随机向量 x 的 ℓ_1 范数
$\|x\|_2$	随机向量 x 的 ℓ_2 范数
$\|x\|_\infty$	随机向量 x 的 ℓ_∞ 范数
$\|x\|_r$	随机向量 x 的 ℓ_r 范数

第一章 绪论

1.1 研究背景与意义

现代社会的信息潮流推动着各类信号的丰富化，无论是数字、文字、声音还是影像，都承载了大量的内容，这无疑对接收信号的效能、采集与传递信号的质量提出了更高的要求。

传统的信号处理方法，可以简单归纳为采样、压缩、传输和重构四步。关于采样的过程，需要遵守香农-奈奎斯特采样定律[1]：唯有当采样频率高于信号带宽的两倍，才可能实现模拟信号的精确重构。然而，实际生活中所面临的各种数据却广泛呈现出大规模且高维性的特质，这意味着我们需要投入大量的采样次数，由此衍生出来的便是对海量存储空间的需求以及更高的数据成本负担。因此，我们需要对大量数据进行压缩处理，但在这个过程中，采样信息难免会存在损失，仅有一小部分关键信息得以保存。因此，传统信号处理方法面临严峻考验，严重阻碍了信息领域的前进脚步。值得庆幸的是，压缩感知理论的发现为上述难题提供了解决方案。

近年来，研究人员发现，很多数据中蕴含着本质性的稀疏特性。受此启发，他们从数据的稀疏性出发，思考如何更好地对数据进行处理和分析。D.L. Donoho 在研究小波变换的时候提出了稀疏表示的概念，即信号在某个稀疏基下可以以较少的非零系数进行表示[2]。这一概念在处理特定信号类别中取得了良好的效果，但仍需要完全采样才能重构信号。进一步的突破发生在2006年，由Candès、Donoho和Tao等人提出了压缩感知的概念[3-4]。他们证明了当信号具有稀疏表示时，可以通过远远少于传统采样率的观测来重构出信号的完整信息。这意味着在满足一定条件下，信号可以以远低于奈奎斯特采样率的方式进行采样和重构。随着压缩感知理论的提出，它在雷达、通信、医学成像、图像处理等方面得到广泛的应用[5-9]，得到越来越多的学者的关注。

压缩感知信号处理技术主要包括同步采样和压缩操作，数据传输以及信号重构，这是一个不断迭代和优化的过程，旨在以最优方式实现对原始信号的捕捉和重构。然而，信号重构的效果与在观测过程中所涵盖的原始信号的关键信息息息相关，若是在此次观测过程中遗漏了原信号的至关重要的信息，那么通过对这些缺失的观测值进行重构，所重建出的信号必将存在严重的失真现象。正因如此，我们需要确保

观测数据能够尽可能多地保留住真实信号中的核心信息，然而观测值乃是由测量矩阵对采样稀疏信号进行压缩处理后获得的结果，所以，如何保证观测矩阵具备优良的性能显得尤为重要。此外，噪声的存在会对压缩感知信号的重构产生很大的影响[10]，深入研究在有噪声干扰环境下保证信号重构所需的充分条件以及误差估计，同样对重构原始稀疏信号具有重要意义。

1.2 国内外研究现状

压缩感知是由 Candès， Donoho 和陶哲轩等人[2]首先提出的一种新型的采样理论，压缩重构模型的本质是ℓ_0最小化，然而直接求解ℓ_0最小化需要尝试所有可能的非零元素组合，使得ℓ_0最小化模型是一个典型的 NP-难问题。为了解决这一难题，Candès 和 Tao 等[9]提出了压缩感知理论研究的两个重要的工具——约束等距性(RIP)和约束正交性(ROP)，并证明当测量矩阵A满足一定的约束条件时可以用ℓ_0最小化的凸逼近ℓ_1最小化进行稀疏重构。

基于 RIP 和 ROP，研究者得到一系列可通过ℓ_1最小化重构稀疏信号的条件。最初 Candès[11]证明当测量矩阵满足$\delta_{3k}+3\delta_{4k}<2$时，可以精确的重构原信号。之后又得到更简化的条件$\delta_{2k}<\sqrt{2}-1$[12]。部分研究者致力于对重构条件的改进，随着研究的深入，研究者将 RIP 和 ROP 两者结合进行研究，并对其可重构条件进行不断改进，Cai 和 Zhang[12]给出并证明可重构条件$\delta_s+\theta_{s,s}<1$是目前最优的。

虽然ℓ_1最小化是ℓ_0最小化的凸逼近，但不能充分反映信号的稀疏性，与ℓ_1范数相比，许多非凸泛函可以更好的逼近ℓ_0范数。因此，Chartrand 等[12]提出了非凸$\ell_r\left(0<r\leq 1\right)$最小化模型，同时阐述了$r$-RIP 的全新定义。此外，已有研究证明非凸$\ell_r$模型可以显著减少精确重构稀疏信号所需的测量次数[14-16]，而且建立基于r-RIP 条件精确重构信号的结果。

为了更好的提高稀疏性和增强重构性能，Zhou 和 Yu[17]提出了$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型，基于r-约束等距性和q-比约束最小奇异值建立$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化方法稀疏信号重构的充分条件，且从实验角度说明$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化重构稀疏信号的能力优于目前的其他经典方法。与其他非凸优化方法相比，$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化可以更好的逼近于ℓ_0范数，可以更少的测量值获得更好的重构性能，进而减小重构误差[18-22]。此外，许多研究表明结合先验支撑信息的优化模型会提高信号的重构性能[23-25]。鉴于此，本文主要研究$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型重构稀疏信号的问题，也将对结合先验支撑信息对重构条件进行优化，并设计合适的算法来求解该模型，同时进行数值模拟实验。

对于$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型，选择不同的模型参数可以决定$\ell_r-\alpha\ell_1$度量的非凸性，特别是当改变权值α和范数阶r时，会出现不同的非凸模型。随着范数值r减小，$\ell_r-\alpha\ell_1$范数的水平曲线接近于x轴和y轴，这反映了$\ell_r-\alpha\ell_1$促进稀疏的能力。

1.3研究内容与结构安排

本文在约束等距性(RIP)和约束正交性(ROP)框架中进行研究，建立了$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型鲁棒重构稀疏信号的充分条件，并且给出了重构误差估计和一种近似求解该非凸模型的算法，通过数值实验证明算法的有效性和优越性。此外，全文的组织结构和主要内容安排如下：

第一章为绪论，首先介绍了课题研究的背景及意义，其次详细介绍了压缩感知及其非凸模型的研究现状，最后介绍了论文研究内容及结构安排。

第二章为研究工作相关的基础知识，主要介绍了信号的稀疏表示，对观测矩阵设计的相关定义以及$\ell_r-\alpha\ell_1$度量的相关引理。

第三章为主要理论结果，主要对$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型展开理论分析，可以分为两部分。1、在测量矩阵满足约束等距性时，建立$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型重构稀疏信号的充分条件及误差估计。此外，给出在高斯噪声情形下的重构结果；2、提出部分支集已知的$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型，研究在约束等距性框架中重构稀疏信号的理论结果，并运用约束等距性常数和等距正交性常数之间的关系建立鲁棒重构稀疏信号的充分条件及误差估计。

第四章为算法设计与数值模拟实验，首先提出求解该模型的非凸优化算法——$\mathrm{ADMM}_{\ell_r-\alpha\ell_1}$算法，接下来通过数值模拟实验验证该算法重构性能优于其他经典算法，展现该算法的优越性。

第五章对研究工作进行总结，并对未来可能展开的研究进行展望。

第二章 压缩感知相关理论

2.1 重构模型的介绍

信号的稀疏性是指信号里仅有少数元素不为零，其他部分基本都为 0 (或者其值几乎接近 0)，尽管大多自然信号并不完全具备此特性，但是经过适当的变换，它们均能展现出稀疏特征，因此被定义为“可压缩”信号[28]。也就是说，对于任意的信号 x 在正交基 $\Psi=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 下表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}u_i\psi_i=\Psi u$$

其中系数向量 $u\in\mathbb{R}^n$ 中最多有 k 个非零元素，那么称向量在矩阵 Ψ 下是 k-稀疏的。根据压缩感知原理，我们只需要寻找到对应信号的稀疏基矩阵即可进行有效的压缩采样。由此可见，选用适当的稀疏基矩阵至关重要。

压缩感知是一种基于数据稀疏性的全新数据处理方式。主要从较少的采样数据中以高概率精确地重构原高维稀疏信号 $x\in\mathbb{R}^n$，考虑以下模型：

$$y=Ax+e\in\mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是预先给定的测量矩阵， $y\in\mathbb{R}^m$ 是观测向量， $e\in\mathbb{R}^m$ 是噪声向量。由于 $m\ll n$，模型(2.1)是一个欠定问题。最直接想法就是 ℓ_0 最小化，主要考虑以下模型[2]：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y-Ax\in B \tag{2.2}$$

其中 $\|x\|_0=|supp(x)|$， $supp(x)=\{i:x_i\neq 0\}$， B 是由误差结构决定的一个有界集。

对于模型(2.2)求解的结果在理论上是最优的，然而直接求解 ℓ_0 最小化需要尝试所有可能的非零元素组合，使得模型(2.2)是一个典型的 NP-难问题。为了解决这一难题，Candès 和 Tao 等提出可以用 ℓ_0 最小化的凸逼近 ℓ_1 最小化进行稀疏重构[9]，考虑以下模型:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|x\|_1, \quad \text{s.t.} \quad y-Ax\in B \tag{2.3}$$

其中$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$。

模型(2.3)在许多应用中无法重构最稀疏的解，这将导致显著的误差估计。因此，Chartrand 等提出了非凸$\ell_r\left(0<r\le1\right)$最小化模型[12]。即

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N}\|x\|_r^r \quad \text{s.t.} \quad \|Ax-y\|_2\le\eta\,, \tag{2.4}$$

其中$\|x\|_r^r=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r$，$0<r\le1$。$\eta$是噪声的上界。

为了更好的提高稀疏性和增强重构性能，Zhou 和 Yu 提出了$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化模型[17]

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|x\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r，\text{s.t.}y-Ax\in B\,, \tag{2.5}$$

其中$0\le\alpha\le1$，$0<r\le1$，$\|x\|_r^r=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r$，当$r=1$时$\alpha\ne1$。当$\alpha=0$时，模型(2.5)简化为典型的$\ell_r$模型。

2.2 观测矩阵的设计

信号重构的效果与在观测过程中所涵盖的原始信号的关键信息息息相关，然而观测值乃是由测量矩阵对采样稀疏信号进行压缩处理后获得的结果，所以，如何设计具备优良的性能观测矩阵显得尤为重要。

定义 1.1[9] (约束等距性(RIP)) 假设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$是一个测量矩阵，$1\le s\le n$是一个整数，若存在一个常数$\delta_s\left(0\le s<1\right)$，对任意$s$-稀疏信号$x$，满足

$$\left(1-\delta_s\right)\|x\|_2^2\le\|Ax\|_2^2\le\left(1+\delta_s\right)\|x\|_2^2\ , \tag{2.6}$$

则称矩阵A满足s阶 RIP。若δ_s是对每个s-稀疏信号均满足(2.1)的最小非负数，则称δ_s为s阶约束等距性常数(RIC)。

定义 1.2[9] (约束正交性(ROP)) 假设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$是一个测量矩阵，定义$\left(s,t\right)$阶约束正交常数(ROC)为最小非负数$\theta_{s,t}$，使得对任意具有不相交支撑集的$s$-稀疏向量$u$和$t$-稀疏向量$v$满足

$$\left|\left\langle Au,Av\right\rangle\right|\le\theta_{s,t}\|u\|_2\|v\|_2\,。 \tag{2.7}$$

定义 1.3[12] (r-RIP) 对于所有的 s 稀疏向量 $x\in\mathbb{R}^N$，使得

$$\left(1-\delta_s\right)\|x\|_2^r\le\|Ax\|_r^r\le\left(1+\delta_s\right)\|x\|_2^r \tag{2.8}$$

成立，其中 $s>0$ 和 $0<r\le1$，则称测量矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times N}$ 满足以参数为 δ_s 的 s 阶 r 约束性等距性，且 s 阶 r 约束等距性常数(RIC)定义为对于所有的 s 稀疏向量 $x\in\mathbb{R}^N$，使得上式成立的最小常数 δ。

2.3 $\ell_r-\alpha\ell_1$ 度量的相关引理

引理 2.1 [17]对于 $x\in\mathbb{R}^N$，$0<\alpha\le1$ 和 $0<r\le1$，我们有

$$\left(N-\alpha N^r\right)\left(\min_{i\in[N]}|x_i|\right)^r\le\|x\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r\le\left(N^{1-r}-\alpha\right)\|x\|_1^r,$$

特别的，当 $S=\operatorname{supp}(x)=\{i\mid x_i\neq0\}\subseteq[N]$，且 $|S|=s$，则

$$\left(s-\alpha s^r\right)\left(\min_{i\in S}|x_i|\right)^r\le\|x\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r\le\left(s^{1-r}-\alpha\right)\|x\|_1^r\ 。$$

引理 2.2[19]问题(2.5)的解是 $\hat{x}$，且 $h=\hat{x}-x$。对于任意的集合 $S\subseteq[n]$，都有

$$\left\|h_{S^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{S^c}\right\|_1^r\le\left\|h_S\right\|_r^r+\alpha\left\|h_S\right\|_1^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r。$$

下面的引理是 $\ell_r-\alpha\ell_1$ 度量的稀疏表示。

引理 2.3[30]对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $\|x\|_\infty=\beta$，$\|x\|_0\ge s$（s 是正整数）。如果 $0\le\alpha\le1$，$0<r\le1$ 时，有 $\|x\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r\le\left(s-\alpha s^r\right)\beta^r$，那么 x 可以表示为 s-稀疏向量的凸组合，即，

$$x=\sum_{j=1}^N\lambda_j u^{(j)},$$

其中 $\lambda_j>0$，$\sum_{j=1}^N\lambda_j=1$，$\left\|u^{(j)}\right\|_0\le s$，$\left\|u^{(j)}\right\|_\infty\le\left(1+\alpha-\alpha2^r\right)^{-1/r}\beta$ 且

$$\sum_{j=1}^N\lambda_j\left\|u^{(j)}\right\|_2^2\le\left[\left(1+\alpha-\alpha2^r\right)^{-2/r}(s-1)+1\right]\beta^2\ 。$$

引理 2.4[21] 令 $s,t\le n$ 和 $\rho\ge 0$，假设信号 $u,v\in\mathbb{R}^n$ 有不相交的支撑集，$\mathrm{supp}(u)\le s$，其中 $supp(x)=\{i\,|\,x_i\ne 0\}$ 是 x 的支撑，v 满足 $\|v\|_1\le\rho t$，且 $\|v\|_\infty\le\rho$，则有

$$\left|\langle Au,Av\rangle\right|\le\theta_{s,t}\|u\|_2\cdot\rho\sqrt{t}\text{ 。}$$

引理 2.5[21] 假设 $\mu\ge 0$，$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge 0$，且 $\sum_{i=1}^{s}a_i+\mu\ge\sum_{i=s+1}^{n}a_i$，那么对于任意的 $q\ge 1$，有

$$\sum_{i=s+1}^{n}a_i^q\le s\left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{s}a_i^q}{s}}+\frac{\mu}{s}\right)^q,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left\|u^{(j)}\right\|_2^2\le\left[\left(1+\alpha-\alpha 2^r\right)^{-2/r}(s-1)+1\right]\beta^2\text{ 。}$$

2.4 本章小结

在本章中，首先给出了信号稀疏表示的形式，其次对观测矩阵设计的定义进行了说明，最后对 $\ell_r-\alpha\ell_1$ 度量的相关引理进行了说明。

第三章 基于$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化在不同噪声中的信号重构

在本章中，利用 r-约束等距性建立稀疏信号重构条件，并且给出在ℓ_1噪声和ℓ_∞噪声重构的误差估计，进而确保重构过程的准确性。最后，针对高斯噪声的情况进行详细研究，理论研究结果表明测量矩阵满足重构条件时，可以高概率重构稀疏信号。

3.1基于 r-RIP 信号重构的研究

3.1.1 信号重构理论结果

定理 3.1 设x的最佳s项近似的ℓ_r误差是$\sigma_s(x)_r=inf\left\{\|x-z\|_r, z\in\mathbb{R}^N\text{是}s\text{稀疏}\right\}$，令$a>0$使得$as$是一个整数，如果

$$b=\frac{(as)^{1-r/2}-\alpha(as)^{r/2}}{s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}}>1,$$

且测量矩阵A满足

$$\delta_{as}+b\delta_{(a+1)s}<b-1, \tag{2.1}$$

则当$B=\|Ax-y\|_1\le\varepsilon$和$B=\left\|A^T(Ax-y)\right\|_\infty\le\lambda$的模型(2.5)的解$\hat{x}^{\ell_1}$和$\hat{x}^{DS}$分别满足

$$\left\|\hat{x}^{\ell_1}-x\right\|_2\le C_1m^{1/r-1}\varepsilon+C_2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s(x)_r, \tag{2.2}$$

$$\left\|\hat{x}^{DS}-x\right\|_2\le C_1m^{1/r-1/2}N^{1/2}\lambda+C_2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s(x)_r, \tag{2.3}$$

其中，$C_1=\dfrac{2^{1/r}\left(1+b^{1/r}\right)}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}$，$C_2=\dfrac{2^{2/r-1}\left[\left(1+\delta_{as}\right)^{1/r}+\left(1-\delta_{(a+1)s}\right)^{1/r}\right]}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}$。

证明 $\hat{x}^{\ell_1},\hat{x}^{DS},x\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$，其中$x$是原始信号，$\hat{x}^{\ell_1}$和$\hat{x}^{DS}$是问题(2.5)的解。设$S$是$x$中绝对值最大$s$项的指标集，$x_S$表示保留$x$在$S$中指标所指引的元素，而在集合$S$

之外的指标所指引的元素取 0 的向量。$S^c=\{1,2,\cdots,\mathrm{N}\}\backslash S$ 是 S 的补集，且 $\sigma_s(x)_r=\|x_{S^c}\|_r$。

(1) 证明 $B=\|Ax-y\|_1\le\varepsilon$，令 $h=\hat{x}^{\ell_1}-x$，则

$$\begin{aligned}
&\|x_S\|_r^r+\|x_{S^c}\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r\\
&=\|x\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r\\
&\ge\left\|\hat{x}^{\ell_1}\right\|_r^r-\alpha\left\|\hat{x}^{\ell_1}\right\|_1^r\\
&=\|x_S+x_{S^c}+h_S+h_{S^c}\|_r^r-\alpha\|x+h_S+h_{S^c}\|_1^r\\
&\ge\|x_S+h_S\|_r^r+\|x_{S^c}+h_{S^c}\|_r^r-\alpha\left(\|x+h_S\|_1+\|h_{S^c}\|_1\right)^r\\
&\ge\|x_S\|_r^r-\|h_S\|_r^r+\|h_{S^c}\|_r^r-\|x_{S^c}\|_r^r-\alpha\|x+h_S\|_1^r-\alpha\|h_{S^c}\|_1^r\\
&\ge\|x_S\|_r^r-\|h_S\|_r^r+\|h_{S^c}\|_r^r-\|x_{S^c}\|_r^r-\alpha\|x\|_1^r-\alpha\|h_S\|_1^r-\alpha\|h_{S^c}\|_1^r。
\end{aligned}$$

可以得到

$$\|h_{S^c}\|_r^r-\alpha\|h_{S^c}\|_1^r\le\|h_S\|_r^r+\alpha\|h_S\|_1^r+2\|x_{S^c}\|_r^r。\tag{2.4}$$

由赫尔德不等式，得到

$$\|Ah\|_r^r\le\left(\sum_{i=1}^m\left(\left|(Ah)_i\right|^r\right)^{1/r}\right)^r\left(\sum_{i=1}^m 1\right)^{1-r}=m^{1-r}\|Ah\|_1^r,$$

又 $\|Ax-y\|_1=\|e\|_1\le\varepsilon$ 和三角不等式得到

$$\|Ah\|_1=\left\|\left(A\hat{x}^{\ell_1}-y\right)-(Ax-y)\right\|_1\le\left\|A\hat{x}^{\ell_1}-y\right\|_1+\|Ax-y\|_1\le2\varepsilon,$$

因此

$$\|Ah\|_r^r\le m^{1-r}\|Ah\|_1^r\le m^{1-r}(2\varepsilon)^r。$$

令 $S^c=S_1\cup S_2\cup\cdots$， $M=as$， S_1 是 h_{S^c} 中绝对值最大的 M 项的指标集， S_2 是 $h_{(S\cup S_1)^c}$ 中绝对值最大的 M 项的指标集，以此类推， S_k 是 $h_{(S\cup S_1\cup\cdots\cup S_{k-1})^c}$ 中绝对值最大

的 M 项的指标集。记 $S_0=S\cup S_1$，由引理 2.1 知，于每个 $i\in S_k,k\ge 2$，有

$$\left|h_i\right|\le \min_{j\in S_{k-1}}\left|h_j\right|\Rightarrow \left|h_i\right|^r\le\left(\min_{j\in S_{k-1}}\left|h_j\right|\right)^r\le\frac{\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_1^r}{M-\alpha M^r},$$

所以

$$\left\|h_{S_k}\right\|_2^r=\left(\sum_{j\in S_{k-1}}\left|h_i\right|\right)^{r/2}\le M^{r/2}\frac{\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_1^r}{M-\alpha M^r}=\frac{\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_1^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}。$$

进而

$$\sum_{k\ge 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r\le\frac{\sum_{k\ge 1}\left(\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{S_{k-1}}\right\|_1^r\right)}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}=\frac{\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_r^r-\alpha\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_1^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}},$$

令 $\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_r^r=\left\|h_{S^c}\right\|_r^r$ 和 $\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_1^r\ge\left\|\sum_{k\ge 1}h_{S_k}\right\|_1^r=\left\|h_{S^c}\right\|_1^r$。

因此由式(2.4)，可以得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ge 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r&\le\frac{\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_r^r-\alpha\sum_{k\ge 1}\left\|h_{S_k}\right\|_1^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\le\frac{\left\|h_S\right\|_r^r+\alpha\left\|h_S\right\|_1^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\\
&\le\frac{s^{1-r/2}\left\|h_S\right\|_2^r+\alpha s^{r/2}\left\|h_S\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\\
&\le\frac{\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}。
\end{aligned}\tag{2.5}$$

同时，根据 r-RIC 的定义可得到

$$\begin{aligned}
\left\|Ah\right\|_r^r&=\left\|Ah_{S_0}+\sum_{k\ge 2}Ah_{S_k}\right\|_r^r\\
&\ge\left\|Ah_{S_0}\right\|_r^r-\left\|\sum_{k\ge 2}Ah_{S_k}\right\|_r^r\\
&\ge\left\|Ah_{S_0}\right\|_r^r-\sum_{k\ge 2}\left\|Ah_{S_k}\right\|_r^r\\
&\ge\left(1-\delta_{M+s}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\left(1+\delta_M\right)\sum_{k\ge 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r。
\end{aligned}\tag{2.6}$$

将式(2.5)代入式(2.6)中，得到

$$\begin{aligned}\|Ah\|_r^r &\geq \left(1-\delta_{M+s}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\left(1+\delta_M\right)\cdot\frac{\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\\ &=\left(1-\delta_{M+s}-\frac{1+\delta_M}{b}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\frac{2\left(1+\delta_M\right)}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r,\end{aligned}$$

其中，$b=\dfrac{M^{1-\frac{r}{2}}-\alpha M^{\frac{r}{2}}}{s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}}=\dfrac{(as)^{1-\frac{r}{2}}-\alpha(as)^{\frac{r}{2}}}{s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}}$。当$\delta_M+b\delta_{M+s}<b-1$时，有

$$\begin{aligned}\left\|h_{S_0}\right\|_2^r &\leq \frac{b}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\|Ah\|_r^r+\frac{2\left(1+\delta_M\right)\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r \\ &\leq \frac{bm^{1-r}(2\varepsilon)^r}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}+\frac{2\left(1+\delta_M\right)\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r。\end{aligned}\tag{2.7}$$

此外，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\geq 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r\right)^r &\leq \sum_{k\geq 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r \leq \frac{\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\\ &=\frac{1}{b}\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+\frac{2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\\ &\leq \frac{1}{b}\left(\frac{b}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\|Ah\|_r^r+\frac{2\left(1+\delta_M\right)\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\right)+\frac{2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\\ &\leq \frac{1}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\|Ah\|_r^r+\frac{2\left(1-\delta_{M+s}\right)\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\\ &\leq \frac{m^{1-r}(2\varepsilon)^r}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}+\frac{2\left(1-\delta_{M+s}\right)\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r。\end{aligned}\tag{2.8}$$

对于任意的$\nu_1,\nu_2\geq 0$，有$\left(\nu_1^r+\nu_2^r\right)^{1/r}\leq 2^{1/r-1}\left(\nu_1+\nu_2\right)$，结合式(2.7)和式(2.8)，可

以得到

$$\begin{aligned}
\|h\|_2 &\le \|h_{S_0}\|_2 + \sum_{k\ge 2}\|h_{S_k}\|_2 \\
&\le 2^{1/r-1}\left(\frac{2b^{1/r}m^{1/r-1}\varepsilon}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}} + \frac{2^{1/r}\left(1+\delta_M\right)^{1/r}\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1/r}}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\|x_{S^c}\|_r\right)+ \\
&\quad 2^{1/r-1}\left(\frac{2m^{1/r-1}\varepsilon}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}} + \frac{2^{1/r}\left(1-\delta_{M+s}\right)^{1/r}\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1/r}}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\|x_{S^c}\|_r\right) \\
&= \frac{2^{1/r}m^{1/r-1}\left(1+b^{1/r}\right)}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\varepsilon + \frac{2^{2/r-1}\left[\left(1+\delta_{as}\right)^{1/r}+\left(1-\delta_{(a+1)s}\right)^{1/r}\right]}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1/r}\|x_{S^c}\|_r \\
&= C_1 m^{1/r-1}\varepsilon + C_2\left(s^{1-\frac{r}{2}}+\alpha s^{\frac{r}{2}}\right)^{-1/r}\sigma_s(x)_r\text{。}
\end{aligned}$$

(2) 证明 $B=\left\|A^T\left(Ax-y\right)\right\|_\infty \le \lambda$，类似地，有

$$\|h_{S^c}\|_r^r - \alpha\|h_{S^c}\|_1^r \le \|h_S\|_r^r + \alpha\|h_S\|_1^r + 2\|x_{S^c}\|_r^r\text{。}$$

由赫尔德不等式，可以得到

$$\|Ah\|_r^r \le \left(\sum_{i=1}^m\left(\left|(Ah)_i\right|^r\right)^{2/r}\right)^{r/2}\left(\sum_{i=1}^m 1\right)^{1-r/2} = m^{1-r/2}\|Ah\|_2^r \le m^{1-r/2}N^{r/2}\|A^TAh\|_\infty^r\text{，}$$

又 $\left\|A^T\left(Ax-y\right)\right\|_\infty = \|A^Te\|_\infty \le \lambda$ 和三角不等式得到

$$\begin{aligned}
\|A^TAh\|_\infty &= \left\|A^T\left(A\hat{x}^{DS}-Ax\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|A^T\left[\left(A\hat{x}^{DS}-y\right)-\left(Ax-y\right)\right]\right\|_\infty \\
&\le \left\|A^T\left(A\hat{x}^{DS}-y\right)\right\|_\infty + \left\|A^T\left(Ax-y\right)\right\|_\infty \\
&\le 2\lambda,
\end{aligned}$$

进而

$$\|Ah\|_r^r \le m^{1-r}\|Ah\|_1^r \le m^{1-r/2}N^{r/2}\left(2\lambda\right)^r\text{。}$$

对于每个$i\in S_k,k\geq 2$，有

$$\sum_{k\geq 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r\leq\frac{\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}},$$

根据r-RIC 的定义得到

$$\begin{aligned}\|Ah\|_r^r&\geq\left\|Ah_{S_0}\right\|_r^r-\sum_{k\geq 2}\left\|Ah_{S_k}\right\|_r^r\\&\geq\left(1-\delta_{M+s}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\left(1+\delta_M\right)\sum_{k\geq 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r,\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}\|Ah\|_r^r&\geq\left(1-\delta_{M+s}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\left(1+\delta_M\right)\cdot\frac{\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r+2\left\|x_{S^c}\right\|_r^r}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\\&=\left(1-\delta_{M+s}-\frac{1+\delta_M}{b}\right)\left\|h_{S_0}\right\|_2^r-\frac{2\left(1+\delta_M\right)}{M^{1-r/2}-\alpha M^{r/2}}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r,\end{aligned}$$

当$\delta_M+b\delta_{M+s}<b-1$时，有

$$\begin{aligned}\left\|h_{S_0}\right\|_2^r&\leq\frac{b}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\|Ah\|_r^r+\frac{2\left(1+\delta_M\right)\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\\&\leq\frac{bm^{1-r/2}N^{r/2}\left(2\lambda\right)^r}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}+\frac{2\left(1+\delta_M\right)\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r。\end{aligned}\tag{2.9}$$

此外，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\geq 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2^r\right)^r&\leq\frac{1}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\|Ah\|_r^r+\frac{2\left(1-\delta_{M+s}\right)\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r\\&\leq\frac{N^{r/2}m^{1-r/2}\left(2\lambda\right)^r}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}+\frac{2\left(1-\delta_{M+s}\right)\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1}}{b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M}\left\|x_{S^c}\right\|_r^r。\end{aligned}\tag{2.10}$$

因为对于任意的$\nu_1,\nu_2\geq 0$，有$\left(\nu_1^r+\nu_2^r\right)^{1/r}\leq 2^{1/r-1}\left(\nu_1+\nu_2\right)$，结合式(2.9)和式(2.10)，可以得到

$$
\begin{aligned}
\|h\|_2 &\le \left\|h_{S_0}\right\|_2 + \sum_{k\ge 2}\left\|h_{S_k}\right\|_2 \\
&\le 2^{1/r-1}\left(\frac{2b^{1/r}m^{1/r-1/2}N^{1/2}\lambda}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}+\frac{2^{1/r}\left(1+\delta_M\right)^{1/r}\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\left\|x_{S^c}\right\|_r\right)+ \\
&\quad 2^{1/r-1}\left(\frac{2m^{1/r-1/2}N^{1/2}\lambda}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}+\frac{2^{1/r}\left(1-\delta_{M+s}\right)^{1/r}\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\left\|x_{S^c}\right\|_r\right) \\
&= \frac{2^{1/r}m^{1/r-1/2}N^{1/2}\left(1+b^{1/r}\right)}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\lambda+\frac{2^{2/r-1}\left[\left(1+\delta_{as}\right)^{1/r}+\left(1-\delta_{(a+1)s}\right)^{1/r}\right]}{\left(b-b\delta_{M+s}-1-\delta_M\right)^{1/r}}\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\left\|x_{S^c}\right\|_r \\
&= C_1 m^{1/r-1/2}N^{1/2}\lambda + C_2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r \text{。}
\end{aligned}
$$

证毕。

从定理 3.1 可以发现当$\eta=0$和$\lambda=0$时，此结论是对 Chartrand and Staneva 在[13]中结果的推广，从$\alpha=0$推广到任意的$\alpha\in[0,\ 1]$。此外，矩阵 A 满足条件(2.1)时，重构误差可以通过模型(2.5)进行控制，并通过(2.2)和(2.3)进行稳健地重构，从理论角度揭示了模型(2.5)重构稀疏信号的有效性。

3.1.2 高斯噪声中的重构结果

高斯噪声情形作为一种特殊情形被很多学者关注，其观察模型为

$$y = Ax + e, e \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right) \text{。}$$

假设σ是已知的，矩阵A中的列向量均为单位向量，定义如下 2 个噪声类型：

(1) $B_1=\left\{z:\|z\|_2\le\sigma\sqrt{n+2\sqrt{n\ln n}}\right\}$。

(2) $B_2=\left\{z:\left\|A^T z\right\|_\infty\le\sigma\sqrt{2\ln p}\right\}$。

则分别对应有[26]：

$$P(z\in B_1)\ge 1-\frac{1}{n},$$

$$P(z\in B_2)\ge 1-\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln p}} \text{。}$$

这表明高斯变量z以高概率处于集合B_1和B_2中。显然，根据文献[17]中定理 1

和定理 3.1 可给出如下定理。

定理 3.2 若测量矩阵A满足

$$\delta_{as}+b\delta_{(a+1)s}<b-1,$$

则有如下结论：

(1) $\hat{x}^{\ell_2}$ 至少以 $P(z\in B_1)\geq 1-\frac{1}{n}$ 的概率满足:

$$\left\|\hat{x}^{\ell_2}-x\right\|_2\leq\frac{2^{1/r}\left(1+b^{1/r}\right)m^{1/r-1/2}\sigma\sqrt{n+2\sqrt{n\ln n}}}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}$$
$$+\frac{2^{2/r-1}\left[\left(1+\delta_{as}\right)^{1/r}+\left(1-\delta_{(a+1)s}\right)^{1/r}\right]\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r$$

(2) $\hat{x}^{DS}$ 至少以 $P(z\in B_2)\geq 1-\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln p}}$ 的概率满足：

$$\left\|\hat{x}^{DS}-x\right\|_2\leq\frac{2^{1/r}\left(1+b^{1/r}\right)m^{1/r-1/2}N^{1/2}\sigma\sqrt{2\ln p}}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}$$
$$+\frac{2^{2/r-1}\left[\left(1+\delta_{as}\right)^{1/r}+\left(1-\delta_{(a+1)s}\right)^{1/r}\right]\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r}{\left(b-b\delta_{(a+1)s}-1-\delta_{as}\right)^{1/r}}\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r$$

特别地，在定理 3.1 的式(2.3)和文献[17]的式(8)中，若$C_1=0$时，则是信号的精确重构，此时，模型(1.5)的解满足：

$$\left\|\hat{x}-x\right\|_2\leq C_2\left(s^{1-r/2}+\alpha s^{r/2}\right)^{-1/r}\sigma_s\left(x\right)_r,$$

其中C_2是定理 3.1 中得到的常数。

3.2 基于$\ell_r-\alpha\ell_1$最小化部分支集已知信号的重构

本节结合信号支撑的先验信息提出以下模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N}\left\|x_{T^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|x_{T^c}\right\|_1^r,\ \text{s.t.}\,y-Ax\in B, \tag{2.11}$$

其中集合T是信号x的部分已知支持组成的指标集，且$|\mathrm{T}|=t$，T^c是集合T的补集，即$T^c=\{1,2,\cdots,\ n\}\setminus T$。显然，当$T=\varnothing$时，模型(2.5)是模型(2.11)的一种特殊情况。本节基于 RIP 和 ROP 建立模型(2.11)鲁棒重构的条件，并且得到了ℓ_2-有界噪声和Dantzig Selector(DS)噪声情形下重构信号的误差上界。

3.2.1 基于 RIP 的信号重构

定理3.3 假设信号x的部分已知支撑是$\mathrm{T}(|\mathrm{T}|=t)$，$B=\|Ax-y\|_2\le\varepsilon_1(\varepsilon_1\le\varepsilon_2)$，$\mathrm{T}_1$是$h$中$s\in\mathbb{Z}_+$个最大绝对值项组成的指标集，如果测量矩阵A满足

$$\delta_{2(t+k)}<\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\gamma}}, \tag{2.12}$$

其中$t+k\ge 2,\tau=[\frac{t+k-\alpha(t+k)^r}{t+k+\alpha(t+k)^r}]^{1/r},\gamma=\frac{2^{2/r-2}}{t+\mathrm{k}}[(1+\alpha-\alpha 2^r)^{-2/r}(t+k-1)+1]$，那么问题

(2.11)的解$\hat{x}^{\ell_2}$满足

$$\left\|x^{\ell_2}-x\right\|_2\le\frac{[1+\frac{\sqrt{c_1}}{(t+k)^{1/4}}]\sqrt{1+\delta_{2(t+k)}}}{\tau-\sqrt{\tau^2+\gamma}\delta_{2(t+k)}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+$$
$$[\frac{2\gamma\delta_{2(t+k)}+\sqrt{2\gamma\delta_{2(t+k)}(\tau\sqrt{\tau^2+\gamma}-(\tau^2+\gamma)\delta_{2(t+k)})}}{\tau\sqrt{\tau^2+\gamma}-(\tau^2+\gamma)\delta_{2(t+k)}}\bullet\frac{2^{1/r-1}\sqrt{t+k}}{(t+k+\alpha(t+k)^r)^{1/r}}+\frac{c_2}{2\sqrt{c_1}(t+k)^{1/4}}]\left\|x_{\mathrm{T}_1^c}\right\|_r,$$

其中$c_1=2^{1/r-1}[\frac{(t+k)^{1-r/2}+\alpha(t+k)^{1/r}}{1-\alpha}]$，$c_2=\frac{2^{2/r-1}}{(1-\alpha)^{1/r}}$。

证明 定义$h=x^{\ell_2}-x$，其中x^{ℓ_2}是满足式(2.5)的最小值，这意味着$\left\|y-\mathrm{A}x^{\ell_2}\right\|_2\le\varepsilon_2$。根据$\|y-\mathrm{A}x\|_2\le\varepsilon_1$，可以得到

$$\|\mathrm{A}h\|_2\le\left\|\mathrm{A}(x^{\ell_2}-x)\right\|_2\le\|y-\mathrm{A}x\|_2+\left\|y-\mathrm{A}x^{\ell_2}\right\|_2\le\varepsilon_1+\varepsilon_2。$$

接下来估计$\left\|h_{\mathrm{T}_1}\right\|_2$和$\left\|h_{\mathrm{T}_1^c}\right\|_2$的上界。

(1) 估计$\left\|h_{\mathrm{T}_1}\right\|_2$的上界，根据引理 2.2，得到

$$\left\|h_{T_1^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{T_1^c}\right\|_1^r\le\left\|h_{T_1}\right\|_r^r+\alpha\left\|h_{T_1}\right\|_1^r+2\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r,$$

因为$\left\|h_{T_1}\right\|_r\le(t+k)^{1/r-1/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2$，$\left\|h_{T_1}\right\|_1\le(t+k)^{1/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2$，所以得到

$$\left\|h_{T_1^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{T_1^c}\right\|_1^r\le[(t+k)^{1-r/2}+\alpha(t+k)^{r/2}]\left\|h_{T_1}\right\|_2^r+2\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r。$$

令$\bar{h}=\tau h$，其中$\tau=[\frac{t+k-\alpha(t+k)^r}{t+k+\alpha(t+k)^r}]^{1/r}\le 1$，可以知道

$$\begin{aligned}\left\|\bar{h}_{T_1^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|\bar{h}_{T_1^c}\right\|_1^r&\le\tau^r(\left\|h_{T_1^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|h_{T_1^c}\right\|_1^r)\\&\le\frac{(t+k)-\alpha(t+k)^r}{(t+k)+\alpha(t+k)^r}[(t+k)^{1-r/2}+\alpha(t+k)^{r/2}]\left\|h_{T_1}\right\|_2^r+2\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r\\&\le[(t+k)-\alpha(t+k)^r][(t+k)^{-r/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2^r+\frac{2}{(t+k)+\alpha(t+k)^r}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r],\end{aligned}$$

记$\xi=\left((t+k)^{-r/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2^r+\frac{2}{t+k+\alpha(t+k)^r}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r\right)^{1/r}$，则有

$$\left\|\bar{h}_{T_0^c}\right\|_r^r-\alpha\left\|\bar{h}_{T_0^c}\right\|_1^r\le(k-\alpha k^r)\xi^r,$$

$$\left\|\bar{h}_{T_1^c}\right\|_\infty=\tau\left\|h_{T_1^c}\right\|_\infty\le\tau\frac{\left\|h_{T_1}\right\|_2}{\sqrt{k}}\le\xi。$$

由引理 2.3 和赫尔德不等式$(u^r+\nu^r)^{\frac{1}{r}}\le 2^{1/r-1}(u+\nu)$，可以得到

$$\bar{h}_{T_0^c}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j u^{(j)},$$

其中$0\le\lambda_j\le 1,\sum_{j=1}^{N}\lambda_j=1,\left\|u^{(j)}\right\|_0\le t+k$，同时，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\lambda_j u^{(j)} \le [(1+\alpha-\alpha 2^r)^{-r/2}(t+k-1)+1]\xi^2 \\
&\le [(1+\alpha-\alpha 2^r)^{-r/2}(t+k-1)+1][(t+k)^{-r/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2^r+\frac{2}{t+k+\alpha(t+k)^r}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^r]^{2/r} \\
&\le 2^{2/r-2}[(1+\alpha-\alpha 2^r)^{-r/2}(t+k-1)+1]\{(t+k)^{-1/2}\left\|h_{T_1}\right\|_2+[\frac{2}{t+k+\alpha(t+k)^r}]^{1/r}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r\}^2 \\
&\le 2^{2/r-2}[(1+\alpha-\alpha 2^r)^{-r/2}(t+k-1)+1]\left\{\frac{2^{2/r}}{[t+k+\alpha(t+k)^r]^{2/r}}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^2\right. \\
&\qquad \left.+(t+k)^{-1}\left\|h_{T_1}\right\|_2^2+2(t+k)^{-1/2}\frac{2^{1/r}}{[t+k+\alpha(t+k)^r]^{1/r}}\left\|h_{T_1}\right\|_2\left\|x_{T_1^c}\right\|_r\right\} \\
&\le \gamma\left\{\frac{2^{2/r}}{[t+k+\alpha(t+k)^r]^{2/r}}\left\|x_{T_1^c}\right\|_r^2 \quad +(t+k)^{-1}\left\|h_{T_1}\right\|_2^2+2(t+k)^{-1/2}\frac{2^{1/r}}{[t+k+\alpha(t+k)^r]^{1/r}}\left\|h_{T_1}\right\|_2\left\|x_{T_1^c}\right\|_r\right\}。
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

对于 $j\in[n]$，引入 $2(t+k)$-稀疏向量：

$$\nu^{(j)}=\bar{h}_{T_1}+\mu u^{(j)},$$

$$\nu=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\nu^{(j)}=\bar{h}_{T_1}+\mu\bar{h}_{T_1^c}=(1-\mu)\bar{h}_{T_1}+\mu\bar{h},$$

其中 $\mu=\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\gamma}+\tau}$。

由文献[36]定理 3.1 的证明中可以得到 $\nu-\frac{1}{2}\nu^{(j)}=(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{T_1}-\frac{1}{2}\mu u^{(j)}+\mu\bar{h}$，即

$$\nu-\frac{1}{2}\nu^{(j)}-\mu\bar{h}=(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{T_1}-\frac{1}{2}\mu u^{(j)}$$

是 $2(t+k)$-稀疏的。

运用文献[36]中一个重要的等式，

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left\|A(\nu-\frac{1}{2}\nu^{(j)})\right\|_2^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{4}\left\|A\nu^{(j)}\right\|_2^2。\tag{2.14}$$

由约束等距性常数 $\delta_{2(t+s)}$ 的定义可以得到等式(2.14)右边(RS)的下界，即

$$
\begin{aligned}
RS &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda_j}{4} \left\| \mathrm{A}(\bar{h}_{\mathrm{T}_1} + \mu u^{(j)}) \right\|_2^2 \\
&\geq (1-\delta_{2(t+k)}) \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda_j}{4} \left\| \bar{h}_{\mathrm{T}_1} + \mu u^{(j)} \right\|_2^2 \\
&= \frac{1-\delta_{2(t+k)}}{4} (\left\| \bar{h}_{\mathrm{T}_1} \right\|_2^2 + \mu^2 \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| u^{(j)} \right\|_2^2),
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

类似地，可以得到等式(18)左边(LS)上界，即

$$
\begin{aligned}
LS &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| \mathrm{A}(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)} + \mu \bar{h} \right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| \mathrm{A}(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)} \right\|_2^2 + \mu^2 \left\| \mathrm{A}\bar{h} \right\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\langle \mathrm{A}[(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)}], \mu \mathrm{A}\bar{h} \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| \mathrm{A}(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)} \right\|_2^2 + \mu^2 \left\| \mathrm{A}\bar{h} \right\|_2^2 + (1-\mu)\mu \left\langle \mathrm{A}\bar{h}_{\mathrm{T}_1}, \mathrm{A}\bar{h} \right\rangle - \mu^2 \left\| \mathrm{A}\bar{h} \right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| \mathrm{A}(\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)} \right\|_2^2 + (1-\mu)\mu \left\langle \mathrm{A}\bar{h}_{\mathrm{T}_1}, \mathrm{A}\bar{h} \right\rangle \\
&\leq (1+\delta_{2(t+k)}) \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| (\frac{1}{2}-\mu)\bar{h}_{\overline{\mathrm{T}_1}} - \frac{1}{2}\mu u^{(j)} \right\|_2^2 + (1-\mu)\mu \left\| \mathrm{A}\bar{h}_{\overline{\mathrm{T}_1}} \right\|_2^2 \left\| \mathrm{A}\bar{h} \right\|_2^2 \\
&\leq (1+\delta_{2(t+k)})[(\frac{1}{2}-\mu)^2 \left\| \bar{h}_{\overline{\mathrm{T}_1}} \right\|_2^2 + \frac{\mu^2}{4} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| u^{(j)} \right\|_2^2] + (1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{2(t+k)}} \left\| \bar{h}_{\overline{\mathrm{T}_1}} \right\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)。
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

将式(2.15)和(2.16)代入等式(2.14)中得到

$$
\begin{aligned}
&[(1+\delta_{2(t+k)})^2 - \frac{1-\delta_{2(t+k)}}{4}] \left\| \bar{h}_{\mathrm{T}_1} \right\|_2^2 + [\frac{1+\delta_{2(t+k)}}{4} - \frac{1-\delta_{2(t+k)}}{4}]\mu^2 \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| u^{(j)} \right\|_2^2 \\
&\qquad + (1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{2(t+k)}} \left\| \bar{h}_{\mathrm{T}_1} \right\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq 0。
\end{aligned}
$$

由 $\bar{h} = \tau h$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
&[(\mu^2-\mu) + (\frac{1}{2} - \mu + \mu^2)\delta_{2(t+k)}]\tau^2 \left\| h_{\mathrm{T}_1} \right\|_2^2 + \frac{\mu^2 \delta_{2(t+k)}}{2} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \left\| u^{(j)} \right\|_2^2 \\
&\qquad + (1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{2(t+k)}}\,\tau(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left\| h_{\mathrm{T}_1} \right\|_2 \geq 0。
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

取

$$
a = -\tau\sqrt{\tau^2 + \gamma} + (\tau^2 + \gamma)\delta_{2(t+k)},
$$