三角函数的诱导公式

一切立体图形中最美的是球形，
一切平面图形中最美的是圆形。

——— 毕达哥拉斯学派

圆是第一个最简单、最完美的图形。

—— 布龙克尔

一.复习回顾

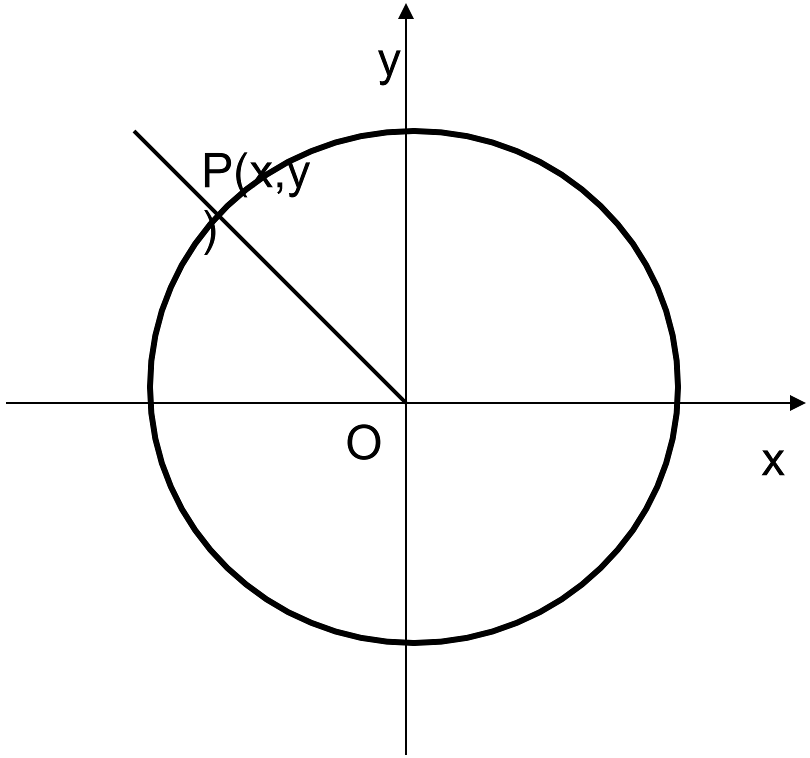
任意角三角函数的定义

设α是一个任意角，它的终边与单位圆交于点P(x，y)，那么：

（1）**正弦sinα＝** y

（2）**余弦cosα＝** x

（3）**正切tanα＝** $\dfrac{y}{x}$



问题探究

1.终边相同的角的同一三角函数值有什么关系?

相等

2.角 -α与α的终边 有何位置关系?

终边关于x轴对称

3.角π-α与α的终边 有何位置关系?

终边关于y轴对称

4.角π+α与α的终边 有何位置关系?

终边关于原点对称

终边相同的角的同一三角函数值相等

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha (k \in Z)$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha (k \in Z)$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha (k \in Z)$$

（公式一）

二、思考：

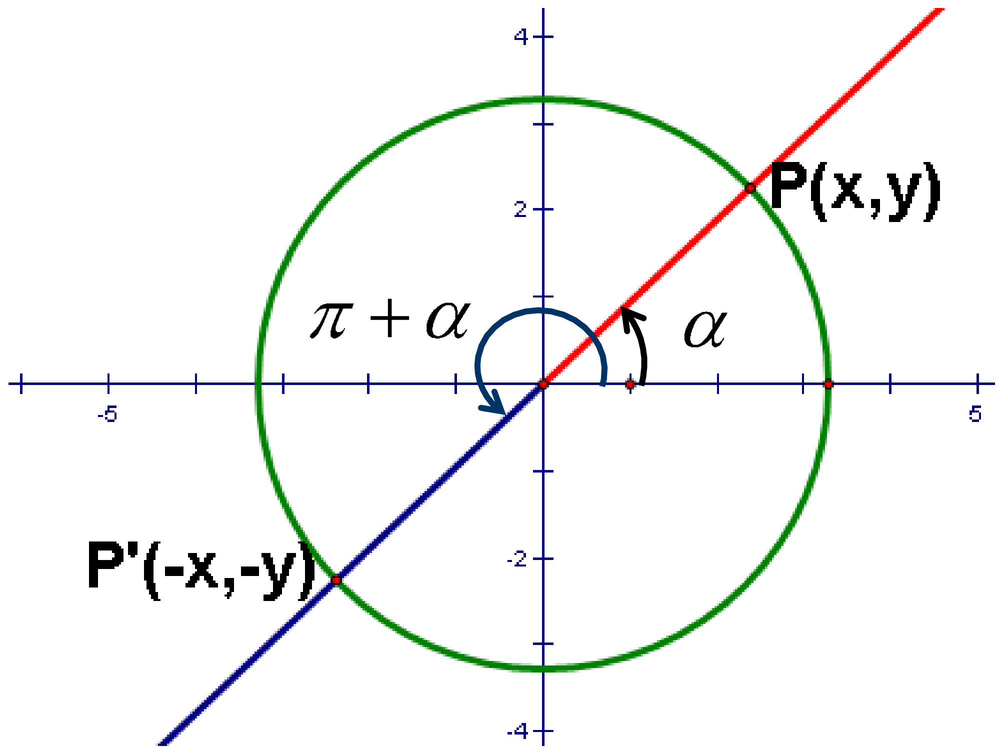
已知任意角α的终边与单位圆相交于点$P(x, y)$，请同学们思考回答点P关于原点、x轴、y轴对称的三个点的坐标是什么?

点$P(x, y)$关于原点对称点$P_1(-x,-y)$，关于x轴对称点$P_3(x,-y)$，关于y轴对称点$P_2(-x, y)$

探究1

形如 $\pi+\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系

$r=1$



$\sin\alpha=y$

$\cos\alpha=x$

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$

$\sin(\pi+\alpha)=-y$

$\cos(\pi+\alpha)=-x$

$\tan(\pi+\alpha)=\dfrac{-y}{-x}=\dfrac{y}{x}$

公式二

$\boxed{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$

$\boxed{\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha}$

$\boxed{\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha}$

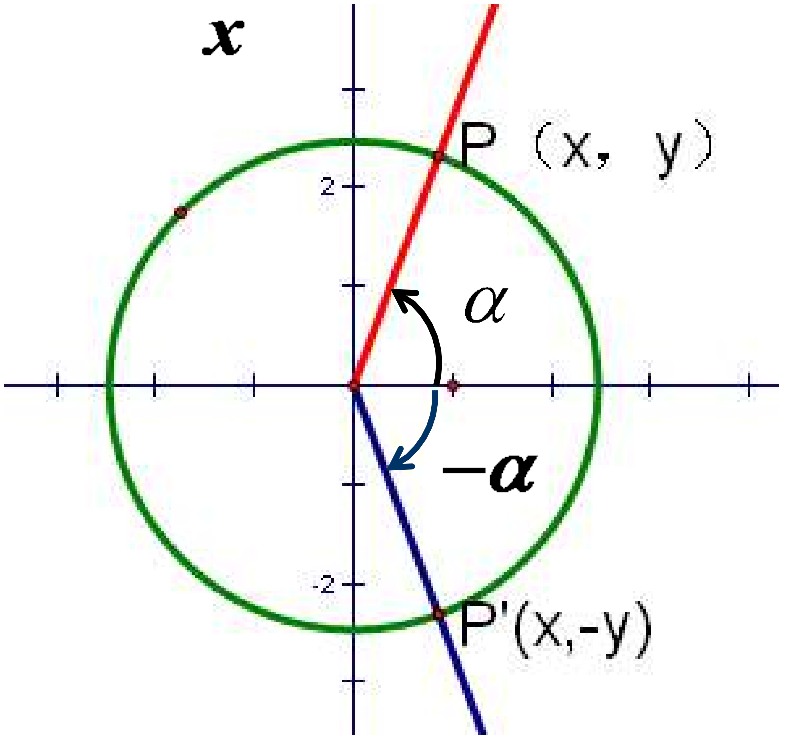
探究2

我们再来研究角α与$-\alpha$的三角函数值之间的关系

公式三

$r=1$

$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$



$\sin(-\alpha) = -y$

$\cos(-\alpha) = x$

$\tan(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}$

公式三

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

$$\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$$

探究3

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

由上面两组公式的推导方法，你能同理推导出角$\pi-\alpha$与α的三角函数值之间的关系吗？

公式四

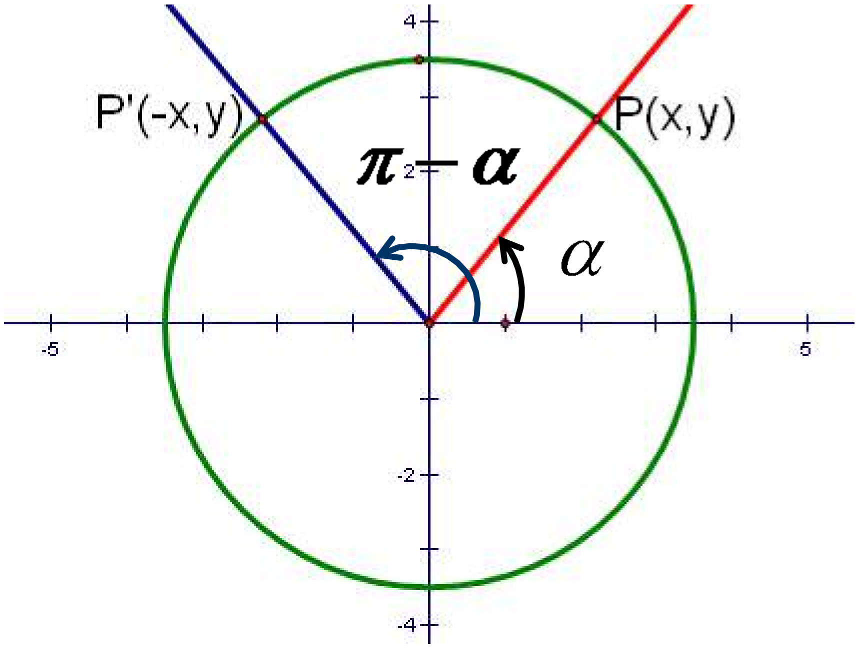
$r=1$

$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

$\sin(\pi-\alpha)=y$

$\cos(\pi-\alpha)=-x$

$\tan(\pi-\alpha)=\dfrac{y}{-x}=-\dfrac{y}{x}$



公式四

$\boxed{\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha}$

$\boxed{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}$

$\boxed{\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha}$

公式一：

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan\alpha$$

$$(k \in Z)$$

公式二：

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

公式三：

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

公式四：

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

三.发现规律：

公式一、二、三、四, 都叫做诱导公式.

$2k\pi+\alpha(k\in z)$、$-\alpha$、 $\pi\pm\alpha$ 的三角函数值，等于α 的同名三角函数值前面加上把 α看作锐角时原函数值的符号。

简记为“函数名不变，符号看象限”

小结

1、通过例题，你能说说诱导公式的作用以及化任意角的三角函数为锐角三角函数的一般思路吗？

任意负角的三角函数 $\xrightarrow[\text{三或一}]{\text{用公式}}$ 任意正角的三角函数

任意正角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式一}}$ $0\sim2\pi$的三角函数

$0\sim2\pi$的三角函数 $\xrightarrow[\text{二或四}]{\text{用公式}}$ 锐角的三角函数

上述过程体现了由未知到已知的化归思想。