2024年高三年级第一次适应性检测

数学试题

本试卷共4页，19题，全卷满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．等比数列 a_n 中，a_2 1，a_5 8，则 a_7 （ ）

A．32　　B．24　　C．20　　D．16

2．在 $(2\ \ x)^5$ 的展开式中，x^2 项的系数为（ ）

A．1　　B．10　　C．40　　D．80

3．已知直线a，b和平面 ，a∥ ，b ，则"a∥ "是"a∥b"的（ ）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．△ABC 内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若b 2asinB，bc 4，则△ABC 的面积为（ ）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

5．2024年2月4日，"龙行中华——甲辰龙年生肖文物大联展"在山东孔子博物馆举行，展览的多件文物都有"龙"的元素或图案．出土于鲁国故城遗址的"出廓双龙勾玉纹黄玉璜"（图1）就是这样一件珍宝．玉璜璜身满刻勾云纹，体扁平，呈扇面状，璜身外镂空雕饰"S"型双龙，造型精美．现要计算璜身面积（厚度忽略不计），测得各项数据（图2）：AB 8cm，AD 2cm，AO 5cm，若sin37 $\frac{3}{5}$，π 3.14，则璜身（即曲边四边形ABCD ）面积近似为（ ）

图 1

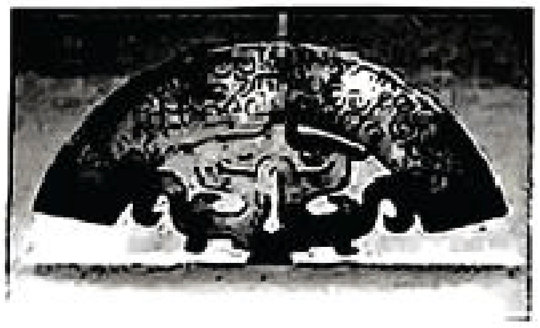
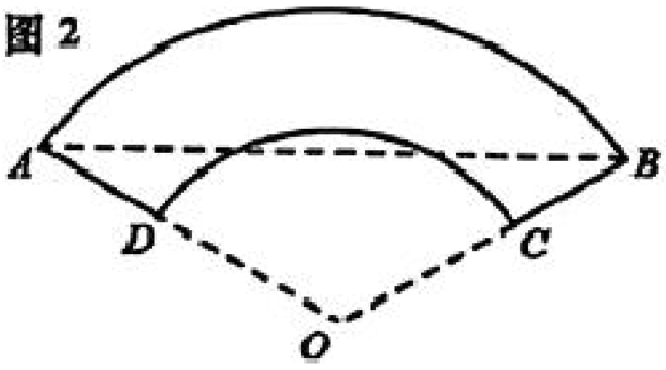


图 2



A． $6.8cm^2$　　　　B． $9.8cm^2$　　　　C． $14.8cm^2$　　　　D． $22.4cm^2$

6．记正项等差数列 a_n 的前 n 项和为 S_n， S_{20}　100，则 a_{10}　a_{11} 的最大值为（　）

A．9　　　　B．16　　　　C．25　　　　D．50

7．　x　R， $f(x)$　$f(x$　$3)$　1　$f(x)f(x$　$3)$， $f($ 1$)$　0，则 $f(2024)$ 的值为（　）

A．2　　　　B．1　　　　C．0　　　　D．－1

8．已知 $A($ 2,0$)$, $B(2,0)$, 设点 P 是圆 x^2　y^2　1 上的点，若动点 Q 满足：QP　PB　0，

QP　$\frac{QA}{|QA|}$ $\frac{QB}{|QB|}$，则 Q 的轨迹方程为（　）

A． x^2 $\frac{y^2}{3}$　1　　　　B． $\frac{x^2}{3}$　y^2　1　　　　C． $\frac{x^2}{5}$　y^2　1　　　　D． $\frac{x^2}{6}$ $\frac{y^2}{2}$　1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．袋子中有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中随机取出两个球，设事件 A　"取出的球的数字之积为奇数"，事件 B　"取出的球的数字之积为偶数"，事件 C　"取出的球的数字之和为偶数"，则（　）

A．事件 A 与 B 是互斥事件　　　　B．事件 A 与 B 是对立事件

C．事件 B 与 C 是互斥事件　　　　D．事件 B 与 C 相互独立

10．已知复数 z，下列说法正确的是（　）

A．若 z　$\bar{z}$　0，则 z 为实数　　　　B．若 z^2　$\bar{z}^2$　0，则 z　$\bar{z}$　0

C．若 $|z$　i$|$　1，则 $|z|$ 的最大值为 2　　　　D．若 $|z$　i$|$ $|z|$　1，则 z 为纯虚数

11．已知函数 $f(x)$　$\cos x$　$\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，则（　）

A． f　x　在区间　$0,\frac{\pi}{6}$　单调递增

B． f　x　的图象关于直线 x　π 对称

C． f　x　的值域为　$0,\frac{9}{8}$

D．关于 x 的方程 $f(x)$　a 在区间 $[0,2\pi]$ 有实数根，则所有根之和组成的集合为

π , 2 π , 4 π

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

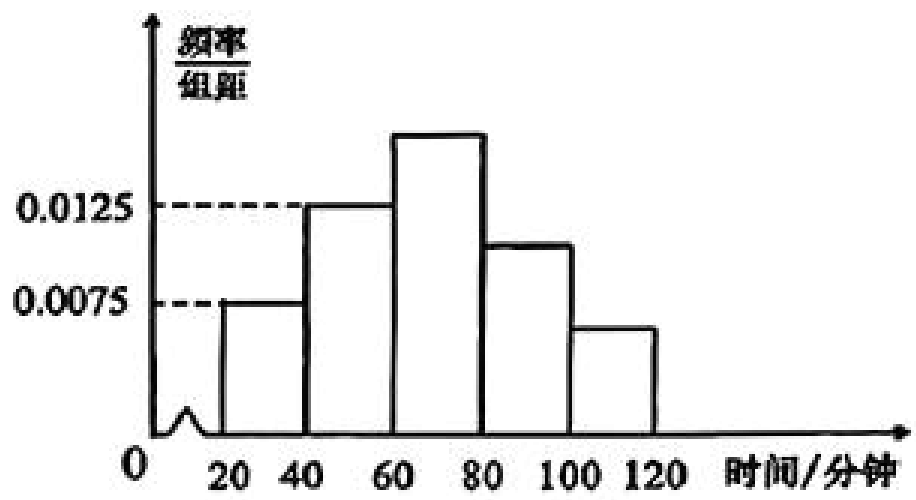
12．已知集合 $A \quad 1,0,1$, $B \quad y|y \quad 2x, x \quad A$，则 $A \quad B$ 的所有元素之和为______.

13．已知 O 为坐标原点，点 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1(a \quad b \quad 0)$ 的右焦点，点 A，B 在 C 上，AB 的中点为 F，OA　OB，则 C 的离心率为______.

14．已知球 O 的表面积为 12π，正四面体 ABCD 的顶点 B，C，D 均在球 O 的表面上，球心 O 为△BCD 的外心，棱 AB 与球面交于点 P．若 A　平面 $_1$，B　平面 $_2$，C　平面 $_3$，D　平面 $_4$，$_i // _{i1} (i \quad 1,2,3)$ 且 $_i$ 与 $_{i1} (i \quad 1,2,3)$ 之间的距离为同一定值，棱 AC，AD 分别与 $_2$ 交于点 Q，R，则 PQR 的周长为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．为促进全民阅读，建设书香校园，某校在寒假面向全体学生发出"读书好、读好书、好读书"的号召，并开展阅读活动．开学后，学校统计了高一年级共 1000 名学生的假期日均阅读时间（单位：分钟），得到了如下所示的频率分布直方图，若前两个小矩形的高度分别为 0.0075，0.0125，后三个小矩形的高度比为 3：2：1.



(1)根据频率分布直方图，估计高一年级 1000 名学生假期日均阅读时间的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

(2)开学后，学校从高一日均阅读时间不低于 60 分钟的学生中，按照分层抽样的方式，抽取 6 名学生作为代表分两周进行国旗下演讲，假设第一周演讲的 3 名学生日均阅读时间处于[80，100）的人数记为　，求随机变量　的分布列与数学期望.

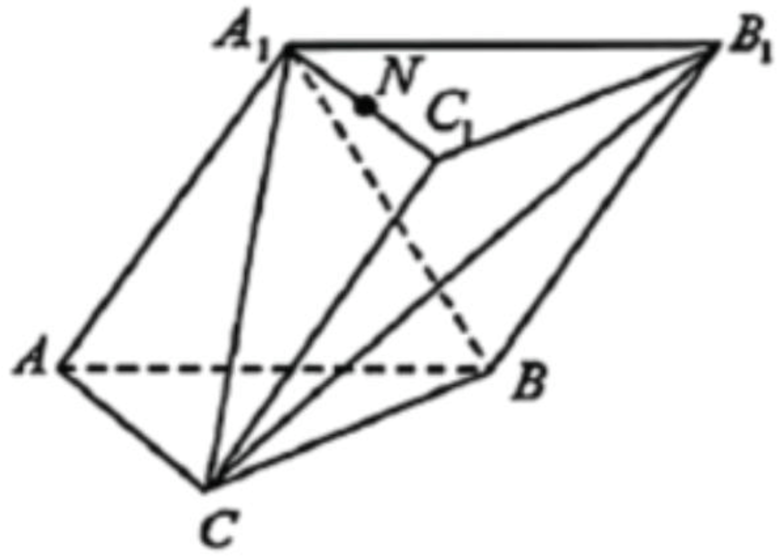
16．已知函数 $f(x) \quad \frac{1}{2}x^2 \quad ax \quad \ln x$.

(1)若 $a \quad 1$，曲线 $y \quad f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率为 1，求该切线的方程；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性.

17．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AA_1 与 BB_1 的距离为 $\sqrt{3}$，$AB \quad AC \quad A_1B \quad 2$，

A_1C　BC　$2\sqrt{2}$.



(1)证明：平面 A_1ABB_1　平面 ABC ；

(2)若点 N 在棱 A_1C_1 上，求直线 AN 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值的最大值.

18. 已知 O 为坐标原点，点 W 为　O ：x^2　y^2　4 和　M 的公共点，OM　OW　0，　M 与直线 x　2　0 相切，记动点 M 的轨迹为 C .

(1)求 C 的方程；

(2)若 n　m　0，直线 l_1 : x　y　m　0 与 C 交于点 A，B，直线 l_2 : x　y　n　0 与 C 交于点 A ，B ，点 A，A 在第一象限，记直线 AA 与 BB 的交点为 G，直线 AB 与 BA 的交点为 H，线段 AB 的中点为 E.

①证明：G，E，H 三点共线；

②若 m　1^2　n　7，过点 H 作 l_1 的平行线，分别交线段 AA ，BB 于点 T，T ，求四边形 GTET 面积的最大值.

19. 记集合 S　a_n 无穷数列 a_n 中存在有限项不为零，n　N*，对任意 a_n　S，设变换 f　a_n　a_1　a_2x　$a_nx^{n\ 1}$，x　R . 定义运算　：若 a_n，b_n　S，则 a_n　b_n　S，f　a_n　b_n　f　a_n　f　b_n .

(1)若 a_n　b_n　m_n，用 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ 表示 m_4；

(2)证明：a_n　b_n　c_n　a_n　b_n　c_n ；

(3)若 a_n $\begin{matrix} \dfrac{n\ 1^2\ 1}{n\ n\ 1}, 1\ n\ 100 \\ 0, n\ 100 \end{matrix}$，$b_n$ $\begin{matrix} \dfrac{1}{2}^{203\ n}, 1\ n\ 500 \\ 0, n\ 500 \end{matrix}$，$d_n$　a_n　b_n，证明：d_{200}　$\dfrac{1}{2}$.

1．A

【分析】利用已知求出首项a_1和公比q,再求a_7.

【详解】由题得$\begin{cases} a_1q=1 \\ a_1q^4=8 \end{cases}$，$a_1=\frac{1}{2},q=2$.

所以$a_7=\frac{1}{2}\times 2^6=32$.

故选：A.

2．D

【分析】

利用通项求解可得.

【详解】通项公式为$T_{r+1}=C_5^r 2^{5-r} x^r$，

当$r=2$时，$T_3=C_5^2 2^3 x^2=80x^2$，

所以x^2项的系数为80.

故选：D

3．B

【分析】

根据题意，由空间中的线面关系，即可判断.

【详解】根据线面平行的判定定理可得，若$a\parallel b$，则$a\parallel\alpha$，即必要性成立，

若$a\parallel\alpha$，则$a\parallel b$不一定成立，故充分性不成立，

所以“$a\parallel\alpha$”是“$a\parallel b$”的必要不充分条件.

故选：B

4．A

【分析】

根据正弦定理化边为角得$\sin A=\frac{1}{2}$，再利用三角形面积公式即可.

【详解】根据正弦定理得$\sin B=2\sin A\sin B$，因为$B\in(0,\pi)$，则$\sin B\neq 0$，

所以$1=2\sin A$，解得$\sin A=\frac{1}{2}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$.

故选：A.

5．C

【分析】

根据给定图形求出圆心角 $\angle AOB$，再利用扇形面积公式计算即得.

【详解】显然 $\triangle AOB$ 为等腰三角形，$OA=OB=5, AB=8$，则 $\cos\angle OAB=\frac{\frac{1}{2}AB}{OA}=\frac{4}{5}$，

$\sin\angle OAB=\frac{3}{5}$，

即 $\angle OAB\approx 37^\circ$，于是 $\angle AOB\approx 106^\circ=\frac{53\pi}{90}$，

所以璜身的面积近似为 $\frac{1}{2}\angle AOB\cdot\left(OA^2-OD^2\right)\approx\frac{1}{2}\times\frac{53\pi}{90}\times\left(5^2-3^2\right)\approx 14.8\,cm^2$.

故选：C

6．C

【分析】

根据等差数列的求和公式计算可得 $a_{10}+a_{11}=10$，利用基本不等式计算即可得出结果.

【详解】∵$S_{20}=\frac{\left(a_1+a_{20}\right)}{2}\times 20=100$，

$\therefore a_1+a_{20}=10$，$a_{10}+a_{11}=a_1+a_{20}=10$.

又∵$a_{10}>0, a_{11}>0$，

∴$a_{10}\cdot a_{11}\le\left(\frac{a_{10}+a_{11}}{2}\right)^2=\frac{100}{4}=25$，当且仅当 $a_{10}=a_{11}=5$ 时，取“=”

∴$a_{10}\cdot a_{11}$ 的最大值为 25.

故选：C

7．B

【分析】

利用赋值法求出 $f(2)$ 的值，将 $f(x)+f(x+3)=1-f(x)f(x+3)$ 变形为 $f(x+3)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，即可推出 $f(x+6)=f(x)$，可得函数周期，由此即可求得答案.

【详解】由题意知 $\forall x\in R$，$f(x)+f(x+3)=1-f(x)f(x+3)$，$f(-1)=0$，

令 $x=-1$，则 $f(-1)+f(2)=1-f(-1)f(2)$，$\therefore f(2)=1$

显然 $f(x)=-1$ 时，$-1+f(x+3)=1+f(x+3)$ 不成立，故 $f(x)\neq -1$，

故 $f(x\ \ 3)\ \ \dfrac{1\ \ f(x)}{1\ \ f(x)}$，则 $f(x\ \ 6)\ \ \dfrac{1\ \ \dfrac{1\ \ f(x)}{1\ \ f(x)}}{1\ \ \dfrac{1\ \ f(x)}{1\ \ f(x)}}\ \ f(x)$，

即 6 为函数 $f(x)$ 的周期，

则 $f(2024)\ \ f(337\ \ 6\ \ 2)\ \ f(2)\ \ 1$，

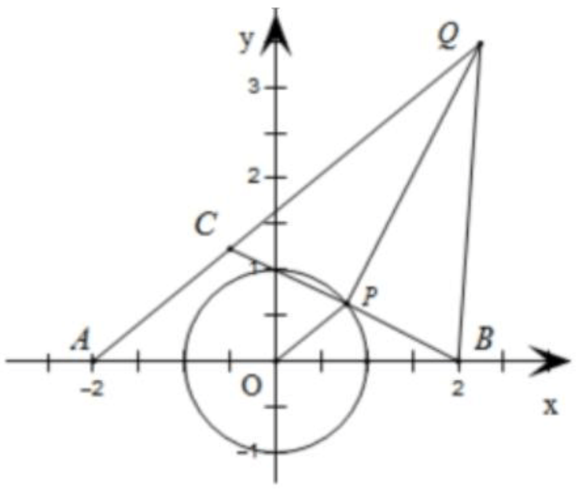
故选：B

8．A

【分析】根据题意，点 P 在 $\ \ BQA$ 的平分线上且 $QP\ \ \ PB$，由此作出图形，利用等腰三角形"三线合一"与三角形中位线定理，证出 $|QA|\ \ |QB|\ \ 2$，从而得到 Q 的轨迹方程.

【详解】由 $QP\ \ PB\ \ 0$，可得 $QP\ \ \ PB$，

而 $QP\ \ \ \dfrac{QA}{|QA|}\ \ \dfrac{QB}{|QB|}$，可知点 P 在 $\ \ BQA$ 的平分线上.



圆 $x^2\ \ y^2\ \ 1$，圆心为原点 O，半径 $r\ \ 1$，

连接 AQ，延长 BP 交 AQ 于点 C，连接 OP，

因为 $\ \ PQB\ \ \ \ PQC$ 且 $PQ\ \ \ BC$，所以 $QB\ \ \ QC$，且 P 为 BC 中点，$OP\ \ \ AC$，$OP=\dfrac{1}{2}AC$

因此，$|QA|\ \ |QB|\ \ |QA|\ \ |QC|\ \ |AC|\ \ 2|OP|\ \ 2$，

点 Q 在以 A、B 为焦点的双曲线上，设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}\ \ \dfrac{y^2}{b^2}\ \ 1\ a\ \ 0,b\ \ 0$，

可知 $c\ \ 2, a^2\ \ b^2\ \ c^2\ \ 4$，由 $2a\ \ |QA|\ \ |QB|\ \ 2$，得 $a\ \ 1$，故 $b^2\ \ 3$，

双曲线方程为 $x^2\ \ \dfrac{y^2}{3}\ \ 1$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键是将题中的 $QP\ \ \ \dfrac{QA}{|QA|}\ \ \dfrac{QB}{|QB|}$ 转化为 P 在 $\ \ BQA$ 的

平分线上，进而证明 $\triangle QCA$ 为等腰三角形，将 $|QA|-|QB|$ 转化为 $|QA|-|QC|=|AC|$ 得出所求轨迹为双曲线.

9．AB

【分析】

利用互斥，对立，相互独立的概念逐一判断.

【详解】对于 AB：取出的球的数字之积为奇数和取出的球的数字之积为偶数不可能同时发生，且必有一个发生，故事件 A 与 B 是互斥事件，也是对立事件，AB 正确；

对于 C：如果取出的数为 2，4，则事件 B 与事件 C 均发生，不互斥，C 错误；

对于 D：$P(B)=1-\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{4}{5}$，$P(C)=\frac{C_3^2+C_3^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$，$P(BC)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，

则 $P(B)P(C)\neq P(BC)$，即事件 B 与 C 不相互独立，D 错误；

故选：AB.

10．AC

【分析】

根据题意，由复数的运算以及其几何意义，对选项逐一判断，即可得到结果.

【详解】设 $z=a+bi\ (a,b\in R)$，则 $\overline{z}=a-bi$，

若 $z-\overline{z}=0$，即 $(a+bi)-(a-bi)=2bi=0$，即 $b=0$，则 z 为实数，故 A 正确；

若 $z^2+\overline{z}^2=0$，即 $(a+bi)^2+(a-bi)^2=0$，

化简可得 $a^2-b^2+2abi+a^2-b^2-2abi=0$，即 $a^2=b^2$，即 $a=\pm b$，

当 $a=b$ 时，$z=a+ai$，$\overline{z}=a-ai$，此时不一定满足 $z+\overline{z}=0$，

当 $a=-b$ 时，$z=a-ai$，$\overline{z}=a+ai$，此时不一定满足 $z+\overline{z}=0$，故 B 错误；

若 $|z-i|=1$，即 $|z-i|=|a+(b-1)i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=1$，

所以 $a^2+(b-1)^2=1$，即 z 表示以 $(0,1)$ 为圆心，以 1 为半径的圆上的点，

且 $|z|$ 表示圆上的点到原点的距离，所以 $|z|$ 的最大值为 2，故 C 正确；

若 $|z-i|=|z|+1$，即 $|z-i|=|a+(b-1)i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，

$|z|+1=\sqrt{a^2+b^2}+1$，即 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}+1$，

化简可得 $b\quad\sqrt{a^2\quad b^2}$，则 $a\quad 0$ 且 $b\quad 0$，

此时 z 可能为实数也可能为纯虚数，故D 错误；

故选：AC

11．BCD

【分析】

利用符合函数的单调性判断A，计算出 $f\ 2\pi\ x\quad f\ x$ 即可判断B，利用换元法求出函数的值域，即可判断C，求出函数在$[0,2\pi]$上的单调性，即可画出函数 $f\ x$ 在区间$[0,2\pi]$的图象，结合图象分类讨论，即可判断D.

【详解】对于A：当 $x\quad 0,\frac{\pi}{6}$ 时 $\sin\frac{x}{2}\quad 0$，

所以 $f(x)\quad\cos x\quad\sin\frac{x}{2}\quad 1\quad 2\sin^2\frac{x}{2}\quad\sin\frac{x}{2}$，

因为 $y\quad\sin\frac{x}{2}$ 在 $0,\frac{\pi}{6}$ 上单调递增，又 $\sin\frac{\pi}{12}\quad\sqrt{\frac{1\quad\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\quad\frac{\sqrt{2\quad\sqrt{3}}}{2}\quad\frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\sin\frac{x}{2}\quad 0,\frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}$，

因为 $\frac{49}{16}\quad 3$，即 $\frac{7}{4}\quad\sqrt{3}$，所以 $2\quad\sqrt{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{7}{4}\quad\sqrt{3}\quad 0$，即 $2\quad\sqrt{3}\quad\frac{1}{4}$，

所以 $\sqrt{2\quad\sqrt{3}}\quad\frac{1}{2}$，所以 $\sin\frac{\pi}{12}\quad\frac{\sqrt{2\quad\sqrt{3}}}{2}\quad\frac{1}{4}$，

又 $y\quad 2x^2\quad x\quad 1$ 在 $\quad,\frac{1}{4}$ 上单调递增，在 $\frac{1}{4},\quad$ 上单调递减，

所以 $y\quad 1\quad 2\sin^2\frac{x}{2}\quad\sin\frac{x}{2}$ 在 $0,\frac{\pi}{6}$ 上不单调，即 $f\ x$ 在区间 $0,\frac{\pi}{6}$ 不单调，故A 错误；

对于B：因为 $f\ 2\pi\ x\quad\cos 2\pi\ x\quad\left|\sin\frac{2\pi\quad x}{2}\right|\quad\cos x\quad\left|\sin\frac{x}{2}\right|\quad f\ x$，

所以 $f\ x$ 的图象关于直线 $x\quad\pi$ 对称，故B 正确；

对于C：因为 $f\ x\quad\cos x\quad\left|\sin\frac{x}{2}\right|\quad 1\quad 2\sin^2\frac{x}{2}\quad\left|\sin\frac{x}{2}\right|\quad 1\quad 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2\quad\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，

令 $t\quad\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，则 $t\quad 0,1$，令 $h\ t\quad 1\quad 2t^2\quad t$，$t\quad 0,1$，

则 $h\ t$ 在 $0,\frac{1}{4}$ 上单调递增，在 $\frac{1}{4},1$ 上单调递减，又 $h\ 0\quad 1$，$h\ 1\quad 0$，$h\ \frac{1}{4}\quad\frac{9}{8}$，

所以$h\ t\quad 0,\frac{9}{8}$，所以 $f\ x$ 的值域为 $0,\frac{9}{8}$，故C 正确；

对于D：当$x\quad [0,2\pi]$时$\sin\frac{x}{2}\quad 0$，所以$f\ x\quad \cos x\quad \sin\frac{x}{2}\quad 1\quad 2\sin\frac{x}{2}\quad \sin\frac{x}{2}$，

由A 选项可令 $\quad 0,\frac{\pi}{6}$ 且$\sin\frac{}{2}\quad \frac{1}{4}$，

则当$x\quad 0,\quad$ 时 $f\ x$ 单调递增，

令$\frac{}{2}\quad \frac{x}{2}\quad \frac{\pi}{2}$，即 $\quad x\quad \pi$时$y\quad \sin\frac{x}{2}$在 $\quad ,\pi$ 上单调递增，且$\frac{1}{4}\quad \sin\frac{x}{2}\quad 1$，

所以 $f\ x$ 在 $\quad ,\pi$ 上单调递减，

又$\sin\frac{2\pi}{2}\quad \sin\frac{}{2}\quad \frac{1}{4}$，令$\frac{\pi}{2}\quad \frac{x}{2}\quad \frac{2\pi}{2}$，即$\pi\quad x\quad 2\pi$ 时$y\quad \sin\frac{x}{2}$在 $\pi,2\pi$ 上单调递减，且$\frac{1}{4}\quad \sin\frac{x}{2}\quad 1$，

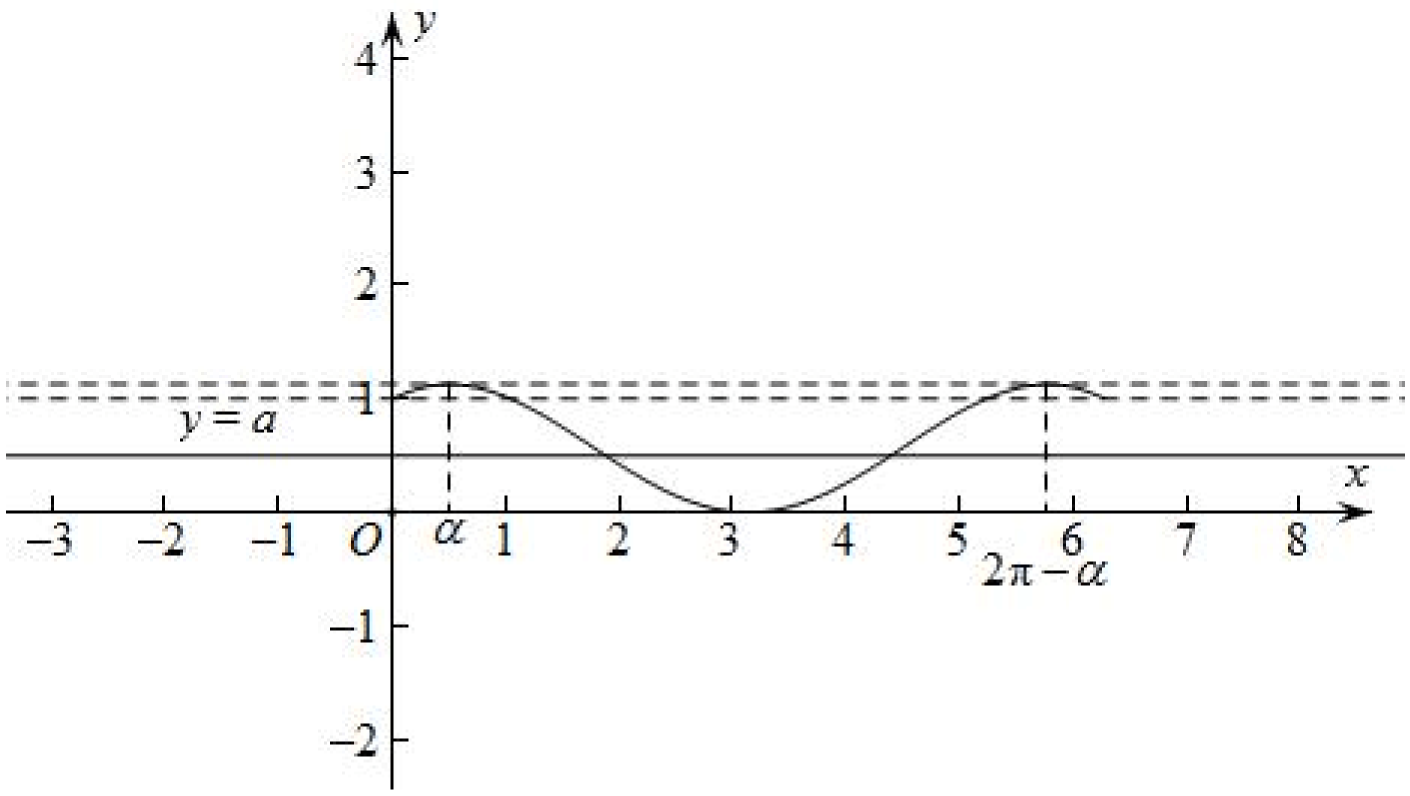
所以 $f\ x$ 在 $\pi,2\pi$ 上单调递增，

当$\frac{2\pi}{2}\quad \frac{x}{2}\quad \pi$，即$2\pi\quad x\quad 2\pi$时$y\quad \sin\frac{x}{2}$在 $2\pi\quad ,2\pi$上单调递减，且$0\quad \sin\frac{x}{2}\quad \frac{1}{4}$，

所以 $f\ x$ 在 $2\pi\quad ,2\pi$上单调递减，

又 $f\ 0\quad f\ 2\pi\quad 1$，$f\ \pi\quad 0$，$f\quad f\ 2\pi\quad \frac{9}{8}$，

所以 $f\ x$ 在$[0,2\pi]$上的函数图象如下所示：



由图可知：

①当$a\quad 0$时$y\quad f\ x$ 与$y\quad a$有且仅有一个交点，

即关于x的方程 $f(x)\quad a$在区间$[0,2\pi]$的实数根为 π；