第二节 换元积分法

基础课教学部

第四章　不定积分

第二节 换元积分法

一、第一换元积分法

二、第二换元积分法

三、思政小课堂

一、第一换元积分法

引例　求 $\int e^{5x}dx$

分析：在基本积分公式中有

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

那么是否也有 $\int e^{5x}dx = e^{5x} + C$ 呢？

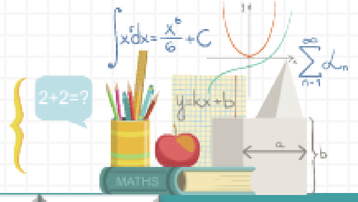
因为 $(e^{5x} + C)' = 5e^{5x} \neq e^{5x}$ 所以 $\int e^{5x}dx = e^{5x} + C$ 是错误的。

我们尝试用用下面的方法：

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}5dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d5x \underline{\underline{令5x=u}} \frac{1}{5}\int e^{u}du = \frac{1}{5}\int e^{u}du$$

$$\underline{\underline{回代u=5x}} \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

验证： $(\frac{1}{5}e^{5x} + C)' = e^{5x}$



1.定义：一般的，若 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，即 $F'(u)=f(u)$，则

$$\int f(u)du=F(u)+C$$

当 $u=\varphi(x)$ 时，根据一阶微分形式的不变性，我们有：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \xlongequal{凑微分} \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] \xlongequal{令\varphi(x)=u} \int f(u)du$$

$$\xlongequal{积分} F(u)+C \xlongequal{回代u=\varphi(x)} F[\varphi(X)]+C$$

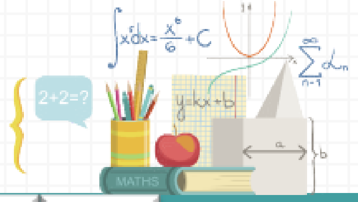
用这个方法计算不定积分，就称为***第一换元积分法***，又称为***凑微分法***，其中关键的一步就是凑微分。

例1 求 $\int(2x+3)^8dx$。

解：

$$\int(2x+3)^8dx \xlongequal{凑微分} \frac{1}{2}\int(2x+3)^8d(2x+3) \xlongequal{令2x+3=u} \frac{1}{2}\int u^8du$$

$$\xlongequal{积分} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}u^9+C \xlongequal{回代u=2x+3} \frac{1}{18}(2x+3)^9+C$$



例2 求$\int xe^{x^2}dx$

解：

$$\int xe^{x^2}dx \xlongequal{\text{凑微分}} \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 \xlongequal{\text{令}x^2=u} \frac{1}{2}\int e^u du \xlongequal{\text{积分}} \frac{1}{2}\int e^u du + C$$

$$\xlongequal{\text{回代}u=x^2} \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

例3 求$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

解：

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \xlongequal{\text{凑微分}} \frac{1}{2}\int \cos(\ln x)d\ln x \xlongequal{\text{令}\ln x=u} \frac{1}{2}\int \cos u du \xlongequal{\text{积分}} \sin u + C$$

$$\xlongequal{\text{回代}u=\ln x} \sin(\ln x) + C$$

凑微分基本公式:

1. $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ 2.

$xdx = \frac{1}{2} dx^2$

3.

$x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}$

$\frac{1}{x} dx = d \ln x$

4.

$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

5.

$\frac{1}{x^2} dx = -d \frac{1}{x}$

$e^x dx = de^x$ 6.

$\sin x dx = -d \cos x$

7.

$\cos x dx = d \sin x$

$\sec^2 x dx = d \tan x$

$\csc^2 x dx = -d \cot x$

$\sec x \tan x dx = d \sec x$

8.

$\csc x \cot x dx = -d \csc x$

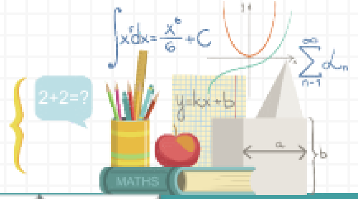
9. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d \arcsin x$

10.

$\frac{1}{1+x^2} dx = d \arctan x$

11. $f'(x)dx = \frac{1}{a} d(af(x)+b)$

12



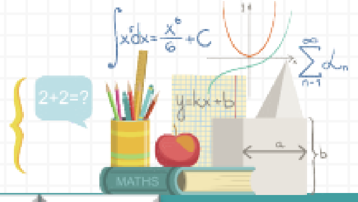
例 4　求下列不定积分：

（1）$\int \cos^3 x \sin x dx$　　　　（2）$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

（3）$\int \frac{\sin(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx$　　　　（4）$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

解：

（1）$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d\cos x = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$



(2)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d\ln x = \arcsin(\ln x) + C$$

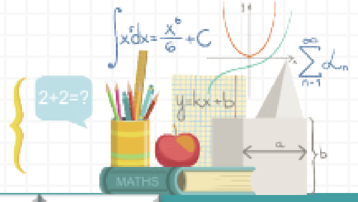
(3)

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin(\sqrt{x}+1)d(\sqrt{x}) = 2\int \sin(\sqrt{x}+1)d(\sqrt{x}+1)$$

$$= -2\cos(\sqrt{x}+1) + C$$

(4)

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = -\int e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x}) = -e^{\frac{1}{x}} + C$$



例5　计算下列不定积分

（1）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx(a>0)$　　（2）$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

（3）$\int \tan x dx$　　（4）$\int \cot x dx$

（5）$\int \sec x dx$　　（6）$\int \csc x dx$

解：　（1）

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx(a>0)=\int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d\frac{x}{a}$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

（2）

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

（3）$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + C$

同理（4）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

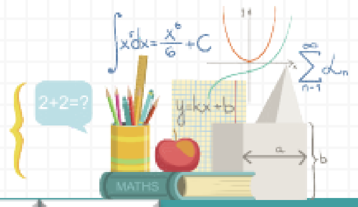
（5）$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} d(\sec x + \tan x)$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

类似地，有（6）$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$



例 6　求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$

解：　我们知道 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

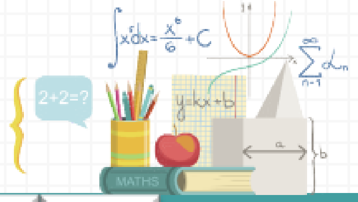
所以

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}d(x-a)-\int \frac{1}{x+a}d(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$



例7　求下列不定积分

（1）　$\int \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}}dx$　　（2）　$\int \frac{1}{1+e^x}dx$

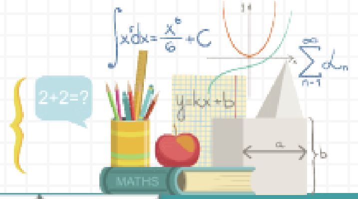
（3）　$\int \cos^2 x dx$　　（4）　$\int \cos 5x \sin 3x dx$

解：　（1）

$$\int \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$= 3\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}d(9-x^2)$$

$$= 3\arcsin x - \sqrt{9-x^2} + C$$



(2) $$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{(e^x+1)-e^x}{1+e^x}dx = \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= x - \int \frac{1}{1+e^x}d(e^x+1) = x - \ln(e^x+1) + C$$

(3) $$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(4) $$\int \cos 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x dx + \frac{1}{4}\int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$