

第八章 数值积分与数值微分

8.1 求积公式

8.1.1 求积公式

对定义在区间 $[a,b]$ 上的定积分

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

以上公式多称为牛顿-莱布尼兹公式, $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数. 但有时原函数不能用初等函数表示, 有时原函数又十分复杂, 难于求出或计算. 如被积函数为:

$$e^{-x^2}, \frac{\sin x}{x}$$

等函数的积分都无法解决, 当被积函数为一组数据时, 更是无能为力. 为解决定积分的近似计算, 从定积分的定义:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad \text{有}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (8.1)$$

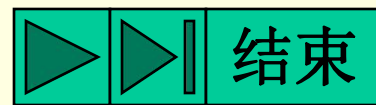
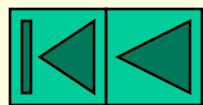
这样就避开了求原函数的运算.(8.1)式就叫做求积公式, $A_k(k=0,1,\dots,n)$ 与函数 $f(x)$ 无关,叫做求积系数,显然要确定一个求积公式,要确定求积结点 x_k 和求积系数 A_k ,或者说不同的求积结点和求积系数将确定不同的求积公式.

8.1.2 求积公式的余项和代数精度

一般情况下, (8.1)两端并不相等.我们称:

$$R[f] = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (8.2)$$

(8.2)为求积公式(8.1)的余项,或截断误差.



为考查一个求积公式的误差，通常用**代数精度**来表示，如果一个求积公式对于不超过 m 次的多项式都能够精确成立($R[f]=0$)，而对 $m+1$ 次以上的多项式不能精确成立，则称该求积公式的代数精度为 m 。

例如求积公式：
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + R[f]$$

验证当 $f(x)=x^m$ ， $m=0,1,2,3,4$ 时，是否有 $R[x^m]=0$

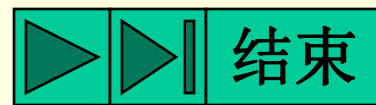
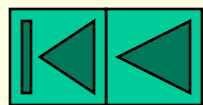
$$f(x) \equiv 1, \text{左边} = 2 = \text{右边} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{4}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1$$

$$f(x) = x, \text{左边} = \frac{1^2 - (-1)^2}{2} = 0 = \text{右边} = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{4}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1$$

$$f(x) = x^2, \text{左边} = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3} = \text{右边} = \frac{1}{3} \times (-1)^2 + \frac{4}{3} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 1^2$$

$$f(x) = x^3, \text{左边} = \frac{1^4 - (-1)^4}{4} = 0 = \text{右边} = \frac{1}{3} \times (-1)^3 + \frac{4}{3} \times 0^3 + \frac{1}{3} \times 1^3$$

$$f(x) = x^4, \text{左边} = \frac{1^5 - (-1)^5}{5} = \frac{2}{5} \neq \text{右边} = \frac{1}{3} \times (-1)^4 + \frac{4}{3} \times 0^4 + \frac{1}{3} \times 1^4 = \frac{2}{3}$$



所以以上求积公式的代数精度为3.

任何一个求积公式的代数精度至少为零 即取 $f(x)=1$ 时公式应精确成立, 这是求积系数应满足的起码条件, 可以用它检验一个求积公式的系数的正确性.

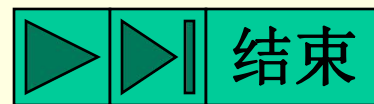
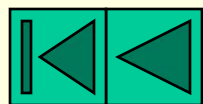
8.1.3 矩形求积公式

把 $f(x)$ 在 a 处作Taylor展开:

$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$, ξ 在 x, a 之间, 两端积分:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx \\ &= f(a)(b-a) + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx\end{aligned}$$

注意到右端第二项积分, 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而 $x-a$ 在 $[a,b]$ 上不变号(非负), 据积分中值定理有:



$$\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx = f'(\eta) \int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$$

于是有左矩形公式(如图)

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) \quad (8.3)$$

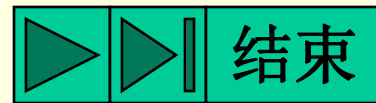
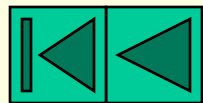
同理, $f(x)$ 在 b 点展开,可得右矩形公式(如图):

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) \quad (8.4)$$

$f(x)$ 在中点 $(a+b)/2$ 展开,可得中矩形公式(如图):

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \quad (8.5)$$

不难验证, (8.3)和(8.4)具有零次代数精度, (8.5)具有一次代数精度.



8.1.4 内插求积公式

由插值可知，对任一函数 $f(x)$ (包括表格形式的函数)可用一 n 次多项式对其插值，即

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

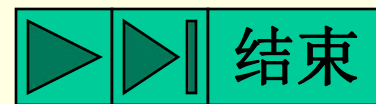
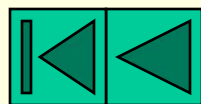
$$\text{因此} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

当 $P_n(x)$ 为拉格朗日插值多项式时，即

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

$$\text{则} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b l_k(x)dx \right) f(x_k) + R_n[f] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R_n[f] \quad (8.6)$$



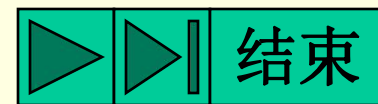
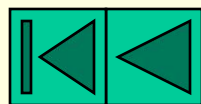
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R_n[f] \quad (8.6)$$

其中:

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} dx \quad (8.7)$$

$$R_n[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx \quad (8.8)$$

通常将公式(8.6)叫做内插求积公式.

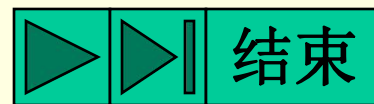
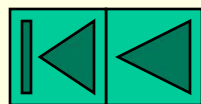


§ 8.2 牛顿-柯特斯公式

为便于上机计算，通常在内插求积公式中取等距节点，即将积分区间 $[a,b]$ n 等分，即令 $h=(b-a)/n$ ，且记 $x_0=a, x_n=b$ ，则节点为 $x_k=x_0+kh(k=0,1,\dots,n)$ ，作变换： $t=(x-x_0)/h$ ，代入求积系数公式：

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} dx \\ &= \int_0^n \frac{h^n t(t-1)\cdots(t-\overline{k-1})(t-\overline{k+1})\cdots(t-n)}{(-1)^{n-k} h^n (n-k)! k!} h dt \\ &= \frac{(-1)^{n-k} h}{(n-k)! k!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-\overline{k-1})(t-\overline{k+1})\cdots(t-n) dt \end{aligned} \quad (8.9)$$

这种由等距节点的内插求积公式通常叫做**牛顿-柯特斯公式**，下面介绍几个常用的公式：



8.2.1 梯形公式

取 $a=x_0, b=x_1$, (即 $n=1$), 代入(8.9)式得

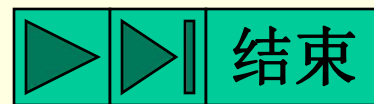
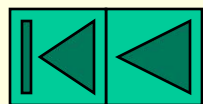
$$A_0 = \frac{(-1)^1 h}{1!} \int_0^1 (t-1) dt = -\frac{1}{2} (t-1)^2 \Big|_0^1 h = \frac{b-a}{2}.$$

$$A_1 = \frac{(-1)^0 h}{0!} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 h = \frac{b-a}{2}.$$

所以梯形公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (8.10)$$

从图8.1看到, 这是用梯形面积近似代替曲边梯形的面积, 对梯形公式的误差估计有如下定理:



定理8.1 设 $f(x)$ 为二阶连续可微函数, 则梯形求积公式的余项为 (证明)

$$R_1 = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

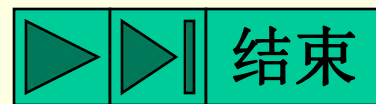
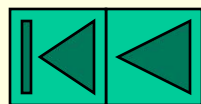
$$\text{即} \quad R_1 = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \quad \xi \in (a, b) \quad (8.11)$$

其中 $h=b-a$, 记成上面形式是为以后复化求积公式余项的一致性. 由余项公式立刻可以看出梯形公式的代数精度为1.

例1 利用梯形公式计算 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

解:

$$I \approx \frac{1-0}{2} \left[\frac{4}{1+0^2} + \frac{4}{1+1^2} \right] = \frac{1}{2} (4+2) = 3.$$



8.2.2 抛物形（辛卜生）公式

取 $a=x_0, (a+b)/2=x_1, b=x_2$, (即 $n=2$), 代入(8.9)式得

$$A_0 = \frac{(-1)^2 h}{2!} \int_0^2 (t-1)(t-2) dt = \frac{h}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{h}{3}.$$

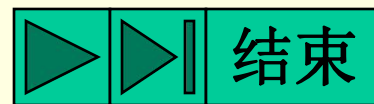
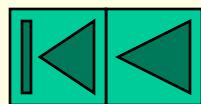
$$A_1 = \frac{(-1) h}{1!} \int_0^2 t(t-2) dt = -h \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4h}{3}.$$

$$A_2 = \frac{h}{2!} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{h}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{h}{3}.$$

所以抛物形公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (8.12)$$

其中 $h=(b-a)/2$, 上式也可写成:



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (8.13)$$

抛物形公式通常也称为辛普生公式，从图8.2看到，抛物形公式是用抛物线围成的曲边梯形近似代替 $f(x)$ 围成的曲边梯形。

定理8.2 设 $f(x) \in C^4[a,b]$ ，则辛普生公式的误差估计为：

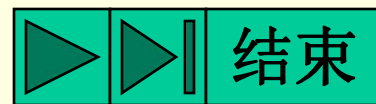
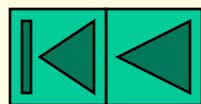
$$R_2[f] = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

直接可以验证**抛物形公式代数精度为3** (对 $f(x)$ 为三次以下多项式精确成立)。

例2 利用抛物形公式计算 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

解：

$$I \approx \frac{h}{3} [f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{1}{6} (4 + \frac{64}{5} + 2) = 3.1333$$



8.2.3 牛顿-柯特斯公式

(8.9)式给出

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{(-1)^{n-k} h^n}{(n-k)!k!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt \\ &= \frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{n(n-k)!k!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt = (b-a)C_k^{(n)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

其中:

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a} A_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n(n-k)!k!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt \quad (8.15)$$

可以看出, $C_k^{(n)}$ 不依赖函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$, 可以事先计算出来, 通常叫做**牛顿-柯特斯系数**, 下面给出 n 从1~6的牛顿-柯特斯系数表8-1:

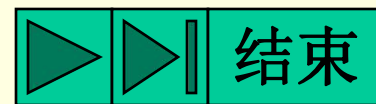
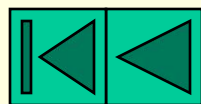
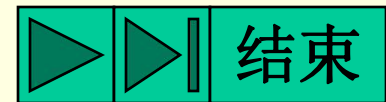
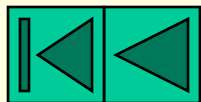


表8-1

n	$C_k^{(n)}$						
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840



对牛顿-柯特斯公式，当 $f(x) \in C^n [a, b]$ ， $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在时，求积公式的余项为：

$$R_n[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx \quad \xi \in [a, b]$$

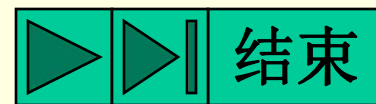
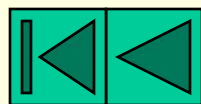
对 $f(x)$ 为任何不超过 n 次的多项式，均有 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ ，因而 $R_n[f] \equiv 0$ ，也就是说，牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为 n 。

我们可以证明当 n 为偶数时，牛顿-柯特斯公式的代数精度可达到 $n+1$ 。

证明：令 $n=2k$ ，设 $q_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$

为任一 $n+1$ 次多项式，其最高次系数为 a_{n+1} ，则它的 $n+1$ 阶导数为

$$q_{n+1}^{(n+1)}(x) = a_{n+1} (n+1)!$$



$$R[q_{n+1}(x)] = \int_a^b \frac{q_{n+1}^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx = a_{n+1} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) dx$$

$$= a_{n+1} \int_0^{2k} h^{n+2} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt$$

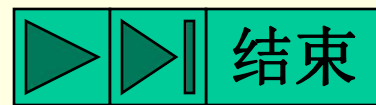
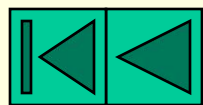
下面我们证明 $\int_0^{2k} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n) dt = 0$

作变换 $u=t-k$, 则

$$\int_0^{2k} t(t-1)\cdots(t-k-1)(t-k)(t-k+1)\cdots(t-2k-1)(t-2k) dt$$

$$= \int_{-k}^k (u+k)(u+k-1)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-k+1)(u-k) du$$

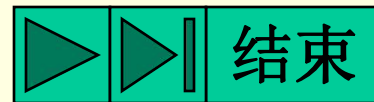
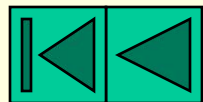
记 $\psi(u) = (u+k)(u+k-1)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-k+1)(u-k)$



容易验证 $\psi(u)$ 为奇函数，即 $\psi(-u) = -\psi(u)$ ，而奇函数在对称区间上的积分为零，所以

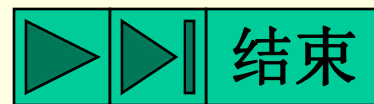
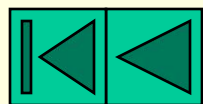
$$R_n[q_{n+1}(x)] = 0$$

也就是说，当 n 为偶数时，牛顿-柯特斯公式对不超过 $n+1$ 次的多项式均能精确成立，因此，其代数精度可达到 $n+1$ 。正是基于这种考虑，当 $n=2k$ 与 $n=2k+1$ 时具有相同的代数精度，因而在实用中常采用 n 为偶数的牛顿-柯特斯公式，如抛物形公式($n=2$)等。



§ 8.3 复化求积公式

从求积公式的余项的讨论中我们看到，被积函数所用的插值多项式次数越高，对函数光滑性的要求也越高. 另一方面，插值节点的增多 (n 的增大)，在使用牛顿-柯特斯公式时将导致求积系数出现负数 (当 $n \geq 8$ 时，牛顿-柯特斯求积系数会出现负数) 因而在实际应用中往往采用将积分区间划分成若干个小区间，在各小区间上采用低次的求积公式 (梯形公式或抛物形公式)，然后再利用积分的可加性，把各区间上的积分加起来，便得到新的求积公式，这就是复化求积公式的基本思想. 为叙述方便，我们仅讨论各小区间均采用同一低次的求积公式的复化求积公式 对各小区间也可分别采用不同的求积公式，也可推出新的求积公式，读者可按实际问题的具体情况讨论



8.3.1. 复化梯形公式

用 $n+1$ 个分点将区间 $[a, b]$ n 等分。每个区间长

$$h = \frac{b-a}{n}, n+1 \text{ 个分点 } x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

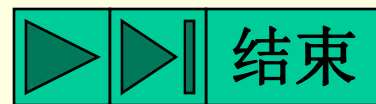
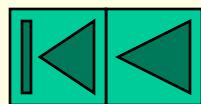
则
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$$

在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用梯形公式, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} [f(x_{k+1}) + f(x_k)] + \sum_{k=0}^{n-1} R_k[f] \\ &= \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] + \sum_{k=0}^{n-1} R_k[f] \quad (8.18) \end{aligned}$$

记
$$T_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] \quad (8.19)$$

T_n 叫做复化梯形求积公式, 下标 n 表示将积分区间等分的份数。



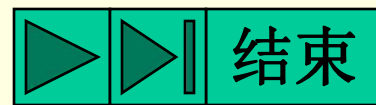
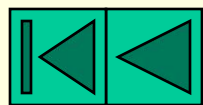
从公式的特点可以看出，内节点 $x_k(k=1,2,\dots,n-1)$ 作为小区间的端点参与前、后两个小区间的计算，因而系数为2，端点 a 与 b 只参与一次计算，系数为1.

如果在 T_n 的基础上，将各小区间对分，这时节点数为 $2n+1$ ，分段数为 $2n$.记新的分点的函数值的和为 σ_n ，则 T_{2n} 应为原内节点与新增节点函数值的和的两倍，加上两端点 a,b 的函数值之和再乘上新区间长度的一半，即

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \frac{h'}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 2 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 2 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (T_n + h \sigma_n) \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\text{或写为} \quad T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + h' \sigma_n \quad (8.21)$$

这里 $h' = h/2$ ，为对分新区间的长度.



从这一公式可以看出，将区间对分后，原复化梯形公式的值 T_n 作为一个整体保留.只需计算出新分点的函数值，便可得出对分后的积分值，不需重复计算原节点的函数值，从而减少了计算量.

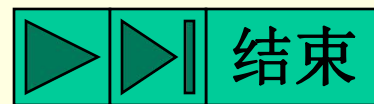
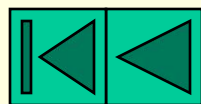
定理8.3 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ ，复化梯形公式的截断误差

$$R[T_n] = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

(证明)

这一复化梯形求积公式的余项在形式上与(8.13)式相同，不同的是，这里的 $h=(b-a)/n$ ，而(8.13)式中的 $h=b-a$.

利用复化求积公式的余项，我们可以估计出在满足精度的要求下，应将积分区间等分多少份，即 n 取多少.这种误差估计方法称为事前误差估计.如例8.3



例3 利用复化梯形公式计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

使其误差限为 10^{-4} , 应将区间 $[0, 1]$ 几等分?

解: 因为被积函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos tx dt$

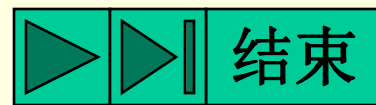
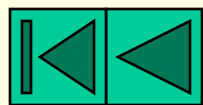
$$\therefore f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} (\cos tx) dt = \int_0^1 t^k \cos \left(tx + \frac{k\pi}{2} \right) dt$$

$$\therefore |f^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 \left| t^k \cos \left(tx + \frac{k\pi}{2} \right) \right| dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}.$$

$$\therefore |R[T_n]| = \left| -\frac{1-0}{12} h^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \times \frac{1}{2+1} = \frac{1}{36} h^2 \leq 10^{-4}.$$

$$\therefore h \leq 6 \times 10^{-2}, \quad \therefore n = \frac{1}{h} \geq \frac{1}{6} \times 10^2.$$

取 $n=17$ 可满足要求.



另一方法是利用公式前后两次计算结果的差来估计误差的，即用 $|T_{2n}-T_n| < \varepsilon$ ，这是因为

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

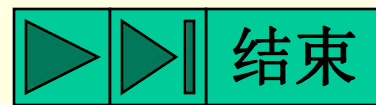
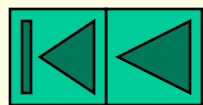
$$\int_a^b f(x)dx - T_{2n} = -\frac{b-a}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta)$$

$$\therefore T_{2n} - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 \left[f''(\xi) - \frac{1}{4} f''(\eta) \right]$$

当 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且假定当 n 充分大时有 $f''(\xi) \approx f''(\eta)$ ，则

$$\therefore T_{2n} - T_n \approx -\frac{b-a}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times 3 f''(\eta)$$

$$= 3 \left[\int_a^b f(x)dx - T_{2n} \right] = 3R[T_{2n}].$$

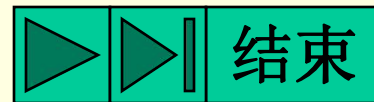
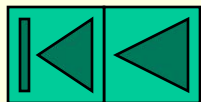


即
$$R[T_{2n}] \approx \frac{1}{3} [T_{2n} - T_n]$$

因此当 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$ 时，可认为

$$|R[T_{2n}]| < \frac{1}{3} \varepsilon < \varepsilon$$

这种误差估计方法通常叫做**事后误差估计**，在计算机上用来控制计算精度常用这一方法，有的也把这种方法叫做步长的自动选取或**逐次对分的方法**。

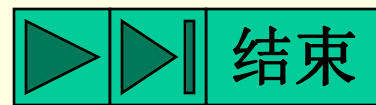
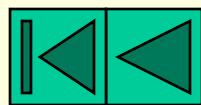


8.3.2 复化抛物形公式

将积分区间 $[a,b]$ $2m$ 等分, $n=2m$, 节点为 $x_k=a+kh$ ($k=0, 1, 2, \dots, 2m$), $h=(b-a)/2m$. 在每两个小区间 $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) 上用抛物形公式, 则有:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h}{3} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] + \sum_{k=0}^{m-1} R_k[f] \\ &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) \right] + \sum_{k=0}^{m-1} R_k[f] \\ S_{2m} &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) \right] \quad (8.25) \end{aligned}$$

S_{2m} 叫做**复化抛物形求积公式**, 下标 $2m$ 表示积分区间等分的份数, $2m$ 强调为偶数份.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/546005133141011010>