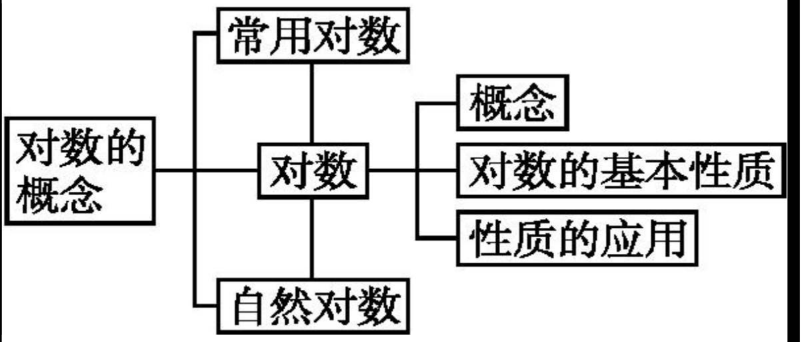
指数函数与对数函数

4.3.1 对数的概念

课标阐释	思维脉络
1.理解对数的概念,掌握对数的基本性质. **2**.掌握指数式与对数式的互化,能应用对数的定义和性质解方程. **3**.理解常用对数和自然对数的定义形式以及在科学实践中的应用. **4**.了解对数的发展历史,了解数学文化.	

一、对数的概念

1.(1)某种细胞分裂时,由1个分裂成2个,2个分裂成4个,…依次类推,那么1个这样的细胞分裂x次后,得到的细胞个数N是多少?

提示:$N=2^x$.

(2)上述问题中,若已知分裂后得到的细胞的个数分别为8个,16个,则分裂的次数分别是多少?

提示:3次,4次.

(3)上述问题中,如果已知细胞分裂后的个数N,能求出分裂次数x吗?

提示:能,$x=\log_2N$.

2.填空:

一般地,如果$a^x=N(a>0,且a\neq1)$,那么数_叫做以_为底_的对数,记作$x=$,其中a叫做对数的   ,N叫做   .

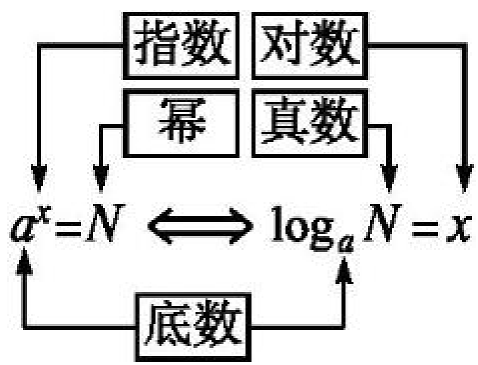
3.在对数式$x=\log_a N$中,底数a和真数N的取值范围是什么,为什么?

提示:由于对数式中的底数a就是指数式中的底数a,所以a的取值范围为$a>0$,且$a\neq1$;由于在指数式中$a^x=N$,而$a^x>0$,所以$N>0$.

4.对数式与指数式的互化

(1)在指数式和对数式中都含有a,x,N这三个量,那么这三个量在两个式子中各有什么异同点?

提示:



(2)$5^3=125$化为对数式是什么?$\log_4 16=2$化为指数式是什么?指数式与对数式具有怎样的关系?

提示:$\log_5 125=3$,$4^2=16$.

当$a>0,a\neq 1$时,$a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$.

(3)$(-3)^2=9$能否直接化为对数式$\log_{(-3)}9=2$?

提示:不能,因为只有符合$a>0,a\neq 1$时,才有$a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$.

5.做一做

(1)若$a^{\frac{1}{2}}=b(a>0,且\ a\neq1)$,则(　　)

A.$\log_a\frac{1}{2}=b$　　B.$\log_ab=\frac{1}{2}$　　C.$\log_{\frac{1}{2}}a=b$　　D.$\log_{\frac{1}{2}}b=a$

(2)若 $\log_4x=\frac{1}{2}$,则(　　)

A.$4^x=\frac{1}{2}$　　B.$x^{\frac{1}{2}}=4$　　C.$x^4=\frac{1}{2}$　　D.$4^{\frac{1}{2}}=x$

(3)若对数 $\log_{(x-1)}(4x-5)$有意义,则 x 的取值范围是 (　　)

A.$\frac{5}{4}\leqslant x<2$　　B.$\frac{5}{2}<x<2$

C.$\frac{5}{4}<x<2$ 或 $x>2$　　D.$2\leqslant x\leqslant3$

解析:(3)由题意得 $\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq1,\\4x-5>0,\end{cases}$ 解得 $x>\frac{5}{4}$,且 $x\neq2$.

答案:(1)B　(2)D　(3)C

(4)判断正误

①因为$(-2)^2=4$,所以$\log_{-2}4=2$.(　　)

②$\log_3 4$与$\log_4 3$表示的含义相同.(　　)

解析:(3)由题意得 $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ 4x-5>0, \end{cases}$

解得 $x>\frac{5}{4}$,且 $x\neq 2$.

答案:(1)B　(2)D　(3)C　(4)①×　②×

二、常用对数与自然对数

1.(1)$10^b=a$用对数式如何表示?

提示:$b=\log_{10}a$,简记为$b=\lg a$.

(2)在科学计算器上,有一个特殊符号“ln”,你知道它是什么吗?

提示:符号“ln”是一种对数符号,它是用来计算以“e”为底的对数的.

(3)$\ln M=n$用指数式如何表示?

提示:$e^n=M$.

2.填空

常用对数	以 ___为底数,记作 $\lg N$
自然对数	以 _为底数,记作 $\ln N$,其中 $e=2.718\ 28\cdots$

3.做一做

(1)$\lg 10^5=$____________;(2)$\ln e=$____________.

答案:(1)5　(2)1

三、对数的基本性质

1.(1)“$6^0=?$”化成对数式呢?

提示:1　$\log_6 1=0$.

(2)“$5^1=?$”化成对数式呢?

提示:5　$\log_5 5=1$.

2.填空

对数的基本性质

(1)____和____没有对数.

(2)$\log_a 1=$__$(a>0,a\neq 1)$.

(3)$\log_a a=$__$(a>0,a\neq 1)$.

(4)对数恒等式$a^{\log_a N}=N(a>0$,且 $a\neq 1,N>0)$.

3.做一做

(1)式子$4^{\log_4 3}$的值是(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\sqrt[3]{3}$　　D.3

(2)若$\log_3(\log_2 x)=0$,则$x=$____________.

解析:(2)由已知得$\log_2 x=1$,故$x=2$.

答案:(1)D　(2)2

对数式与指数式的互化

例1 将下列指数式与对数式互化:

(1)$\log_{\frac{1}{3}}27=-3$;　(2)$4^3=64$;

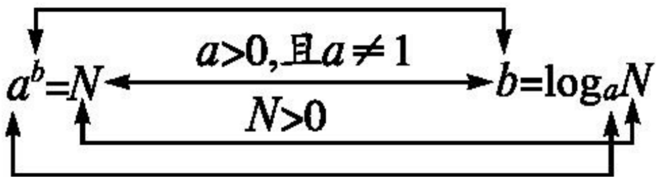
(3)$e^{-1}=\frac{1}{e}$;　(4)$10^{-3}=0.001$.

分析:利用当$a>0$,且$a\neq1$时,$\log_a N=b \Leftrightarrow a^b=N$进行互化.

解:(1)$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$.　(2)$\log_4 64=3$.

(3)$\ln\frac{1}{e}=-1$.　(4)$\lg 0.001=-3$.

反思感悟1.$\log_a N=b$与$a^b=N(a>0,$且$a\neq1)$是等价的,表示a,b,N三者之间的同一种关系.如下图:



2.根据这个关系式可以将指数式与对数式互化:将指数式化为对数式,只需将幂作为真数,指数作为对数,底数不变;而将对数式化为指数式,只需将对数式的真数作为幂,对数作为指数,底数不变.

变式训练1将下列指数式与对数式互化:

(1)$2^{-2}=\frac{1}{4}$; (2)$10^2=100$; (3)$e^a=16$;

(4)$\log_{64}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$; (5)$\log_x y=z(x>0$,且 $x\neq1,y>0)$.

解:(1)$\log_2\frac{1}{4}=-2$. (2)$\log_{10}100=2$,即 $\lg 100=2$.

(3)$\log_e 16=a$,即 $\ln 16=a$. (4)$64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

(5)$x^z=y(x>0$,且$x\neq1,y>0)$.

利用对数式与指数式的关系求值

例2求下列各式中x的值:

(1)$4^x=5\cdot3^x$; (2)$\log_7(x+2)=2$;

(3)$\ln e^2=x$; (4)$\log_x27=\frac{3}{2}$; (5)$\lg 0.01=x$.

分析:利用指数式与对数式之间的关系求解.

解:(1) $\because 4^x=5\cdot3^x$, $\therefore \frac{4^x}{3^x}=5$, $\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^x=5$,

$\therefore x=\log_{\frac{4}{3}}5$.

(2) $\because \log_7(x+2)=2$, $\therefore x+2=7^2=49$, $\therefore x=47$.

(3) $\because \ln e^2=x$, $\therefore e^x=e^2$, $\therefore x=2$.

(4) $\because \log_x27=\frac{3}{2}$, $\therefore x^{\frac{3}{2}}=27$, $\therefore x=27^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(5) $\because \lg 0.01=x$, $\therefore 10^x=0.01=10^{-2}$, $\therefore x=-2$.

反思感悟指数式$a^x=N$与对数式$x=\log_a N(a>0,$且$a\neq 1)$表示了三个量a,x,N之间的同一种关系,因而已知其中两个时,可以通过对数式与指数式的相互转化求出第三个.

变式训练2求下列各式中的x值:

(1)$\log_2 x=\frac{1}{2}$;(2)$\log_2 16=x$;(3)$\log_x 27=3$.

解:(1) $\because\log_2 x=\frac{1}{2}$, $\therefore x=2^{\frac{1}{2}}$, $\therefore x=\sqrt{2}$.

(2) $\because\log_2 16=x$, $\therefore 2^x=16$, $\therefore 2^x=2^4$, $\therefore x=4$.

(3) $\because\log_x 27=3$, $\therefore x^3=27$,即$x^3=3^3$, $\therefore x=3$.

利用对数的基本性质与对数恒等式求值

例3 求下列各式中x的值:

(1)$\ln(\log_2 x)=0$; (2)$\log_2(\lg x)=1$;

(3)$3^{\log_3\sqrt{x}}=9$.

分析:利用$\log_a a=1,\log_a 1=0(a>0$,且$a\neq1)$及对数恒等式求值.

解:(1) $\because \ln(\log_2 x)=0$, $\therefore \log_2 x=1$, $\therefore x=2^1=2$.

(2) $\because \log_2(\lg x)=1$, $\therefore \lg x=2$, $\therefore x=10^2=100$.

(3)由$3^{\log_3\sqrt{x}}=9$ 得$\sqrt{x}=9$,解得 $x=81$.

反思感悟 **1**.在对数的运算中,常用对数的基本性质:(1)负数和零没有对数;(2)$\log_a 1=0(a>0,a\neq 1)$;(3)$\log_a a=1(a>0,a\neq 1)$进行对数的化简与求值.

2.对指数中含有对数值的式子进行化简、求值时,应充分考虑对数恒等式的应用.对数恒等式 $a^{\log_a N}=N(a>0$,且$a\neq 1,N>0)$的结构形式:(1)指数中含有对数式;(2)它们是同底的;(3)其值为对数的真数.

变式训练3 求下列各式中x的值:

(1)$\ln(\lg x)=1$;(2)$\log_2(\log_5 x)=0$;(3)$3^{2+\log_3 5}=x$.

解:(1) ∵$\ln(\lg x)=1$, ∴$\lg x=e$, ∴$x=10^e$.

(2) ∵$\log_2(\log_5 x)=0$, ∴$\log_5 x=1$, ∴$x=5$.

(3)$x=3^2\times 3^{\log_3 5}=9\times 5=45$.

因忽视底数的取值范围而致错

典例 已知$\log_{(x+3)}(x^2+3x)=1$,求实数x的值.

错解由对数的性质可得$x^2+3x=x+3$,解得$x=1$或$x=-3$.

以上解题过程中都有哪些错误?出错的原因是什么?你如何改正?如何防范?

提示:上述解法的错误在于忘记检验底数需大于0且不等于1.

正解:由对数的性质知 $\begin{cases} x^2+3x=x+3, \\ x^2+3x>0, \\ x+3>0,\text{且}x+3\neq 1, \end{cases}$

解得$x=1$.故实数x的值为1.

防范措施 1.在对数表达式$x=\log_a N$中,需满足底数$a>0$,且$a\neq1$,真数$N>0$.

2.在利用对数式的性质求出a的值后,务必验证底数和真数是否满足对数式的意义.

变式训练对数式$\log_{(a-2)}(5-a)$中实数a的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,5)$

B.$(2,5)$

C.$(2,3)\cup(3,5)$

D.$(2,+\infty)$

解析:要使对数式$b=\log_{(a-2)}(5-a)$有意义,

则$\begin{cases} a-2>0, \\ 5-a>0, \\ a-2\neq 1, \end{cases}$解得$a\in(2,3)\cup(3,5)$,

故选C.

答案:C

1.将$\log_5 b=2$化为指数式是(　　)

A.$5^b=2$　B.$b^5=2$C.$5^2=b$　　D.$b^2=5$

答案:C

2.将$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$化为对数式是(　　)

A.$\log_{(-3)}8=\frac{1}{2}$　　B.$\log_{\frac{1}{2}}8=3$

C.$\log_{\frac{1}{2}}8=-3$　　D.$\log_3 8=-\frac{1}{2}$

答案:C

3.16、17世纪之交,随着天文、航海、工程、贸易以及军事的发展,改进数字计算方法成了当务之急,数学家纳皮尔在研究天文学的过程中,为简化计算发明了对数.直到18世纪,才由瑞士数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系,即$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$.现在已知$a=\log_2 3$,则$2^a=$________.

解析:由$a=\log_2 3$,

化对数式为指数式可得$2^a=3$.

答案:3

4.$3^{1+\log_3\frac{1}{4}}=$____________.

解析:$3^{1+\log_3\frac{1}{4}}=3\times 3^{\log_3\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$.

答案:$\frac{3}{4}$

5.若$\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,则$a^{2m+n}=$__________.

解析:因为$\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,

所以$a^m=2$,$a^n=3$.

所以$a^{2m+n}=a^{2m}\cdot a^n=(a^m)^2\cdot a^n=2^2\times 3=12$.

答案:12

6.求下列各式中x的值:

(1)$\log_8 x=-\frac{2}{3}$;(2)$\log_x 27=\frac{3}{4}$;(3)$\log_3(\lg x)=1$.

解:(1)由$\log_8 x=-\frac{2}{3}$,得$x=8^{-\frac{2}{3}}=(2^3)^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}$,故$x=\frac{1}{4}$.

(2)由$\log_x 27=\frac{3}{4}$,得$x^{\frac{3}{4}}=27$,即$x^{\frac{3}{4}}=3^3$,

故$x=(3^3)^{\frac{4}{3}}=3^4=81$.

(3)由$\log_3(\lg x)=1$,得$\lg x=3$,

故$x=10^3=1\ 000$.

指数函数与对数函数

4.3.2 对数的运算

课标阐释	思维脉络
1.掌握对数的运算性质,并能运用运算性质化简、求值. 2.了解对数的换底公式及其变形的应用. 3.初步掌握对数在生活中的应用.