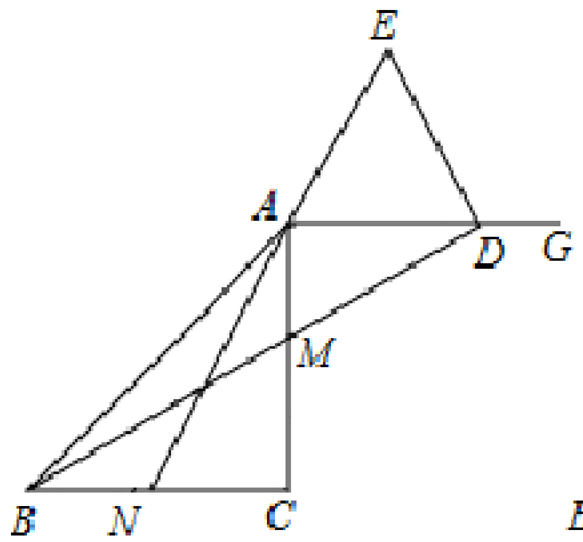
三轮冲刺：《三角形综合》（一）

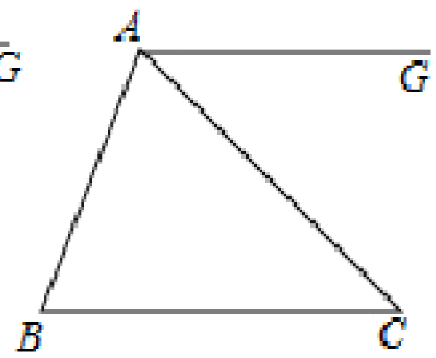
1．已知△ABC是等腰三角形，CA＝CB，0°＜∠ACB≤90°，点M在边AC上，点N在边BC上（点M，N不与所在线段端点重合），BN＝AM，连接AN，BM，射线AG∥BC，延长BM交射线AC于点D，点E在直线AN上，且AE＝DE．

（1）如图，当∠ACB＝90°时，请直接写出△BCM与△ACN的关系：________；BD与DE的位置关系：________．

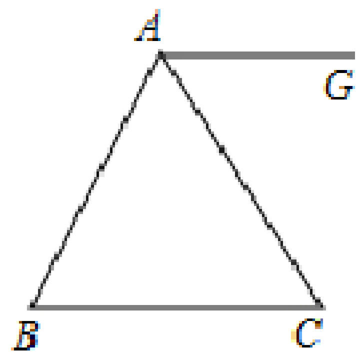
（2）当∠ACB＝α，其他条件不变时，∠BDE的度数是多少？（用含α的代数式表示）

（3）若△ABC是等边三角形，AB＝$3\sqrt{3}$，N是BC边上的三等分点，直线ED与直线BC交于点F，求线段CF的长．





备用图



备用图

2．在△ABC和△DBE中，CA＝CB，EB＝ED，点D在AC上．

（1）如图1，若∠ABC＝∠DBE＝60°，求证：∠ECB＝∠A；

（2）如图2，设BC与DE交于点F．当∠ABC＝∠DBE＝45°时，求证：CE∥AB；

（3）在（2）的条件下，若tan∠DEC＝$\frac{1}{2}$时，求$\frac{EF}{DF}$的值．

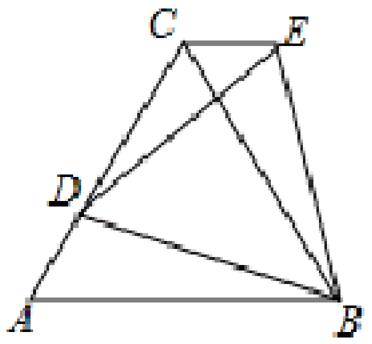


图1

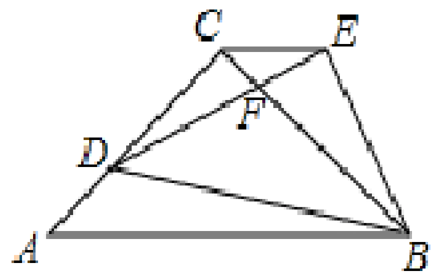


图2

3．如图，在△ABC中，AB＝AC，∠BAC＝45°，BD⊥AC于点D，AE⊥BC于E交BD于F.

（1）求证：AF＝BC；

（2）如图1，连结DE，问ED是否为∠AEC的平分线？请说明理由.

（3）如图2，Q为AB的中点，连结QD交AF于R，用等式表示AR与CE的数量关系，并给出证明.

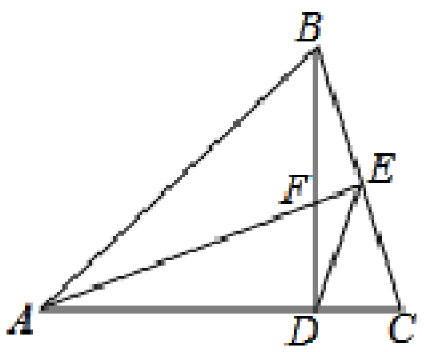


图1

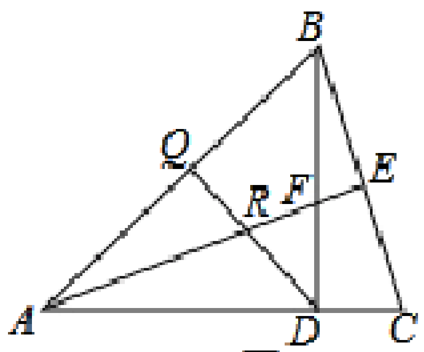


图2

4．如图1，在平面直角坐标系中，直线AB分别交y轴、x轴于点A（0，a），点B（b，0），且a、b满足$a^2-4a+4+\sqrt{2b+2}=0$.

（1）求a，b的值；

（2）以AB为边作Rt△ABC，点C在直线AB的右侧且∠ACB＝45°，求点C的坐标；

（3）若（2）的点C在第四象限（如图2），AC与x交于点D，BC与y轴交于点E，连接DE，过点C作CF⊥BC交x轴于点F.

①求证CF＝$\frac{1}{2}$BC；

②直接写出点C到DE的距离.

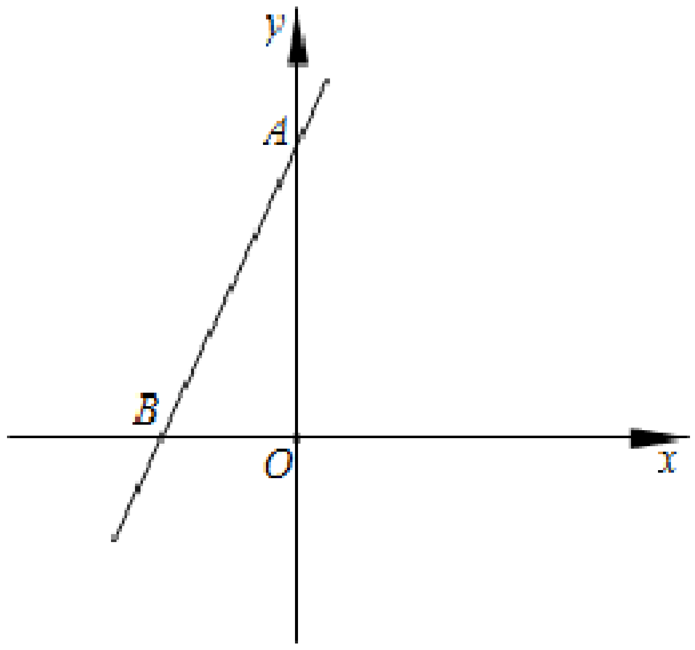


图1

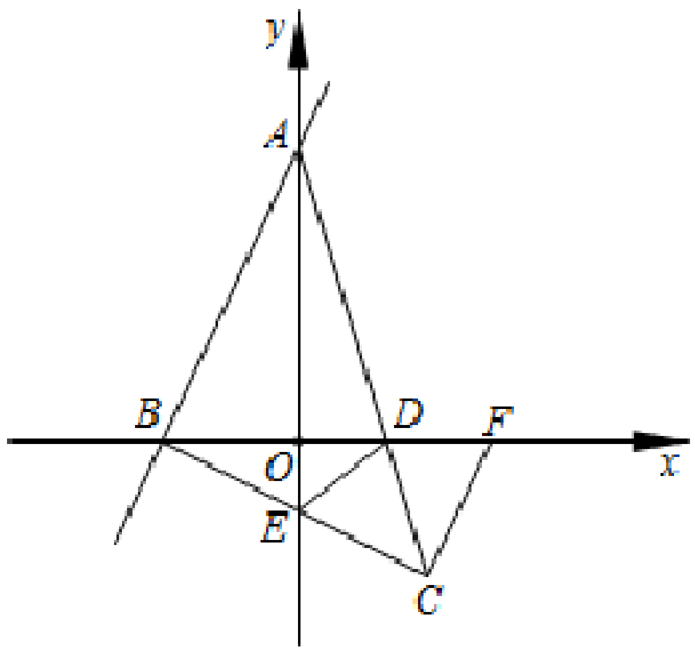


图2

5．如图，平面直角坐标系中，A（0，a）、B（b+1，0），且 a、b 满足 $a^2-10a+\sqrt{b-4}+25=0$．

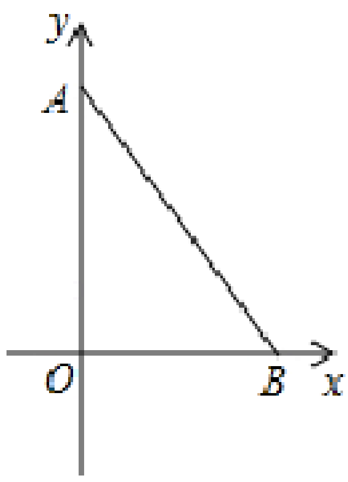


图1

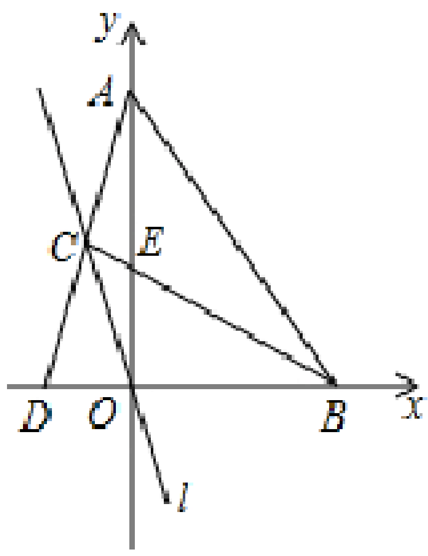


图2

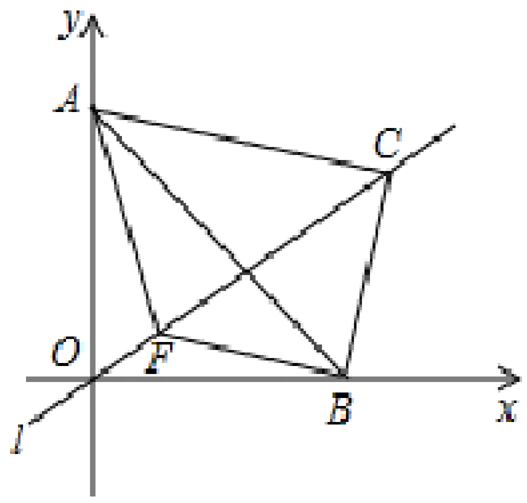


图3

（1）求 A、B 两点的坐标；

（2）过点 O 的直线 l 上有一点 C，连接 AC、BC，∠ACB＝90°，如图 2，当点 C 在第二象眼时，BC 交 y 轴于点 E，延长 AC 交 x 轴于点 D，设 OD 的长为 m，AE 的长为 d，用含 m 的式子表示 d；

（3）在（2）的条件下，如图 3，当点 C 在第一象限时，过点 B 作 BF⊥BC 交 OC 于点 F，连接 AF，若 OF＝$\frac{1}{2}$CF，AC＝$2\sqrt{10}$，求 BC 的长．

6．如图 1，在平面直角坐标系中，A（5，0），B（0，5），C（2，0），连接 AB．

（1）点 C 关于 AB 的对称点 C_1 的坐标为________；

（2）如图 2，D 为第一象限内一点，CD⊥BC 于点 C，AD⊥AB 于点 A，求点 D 坐标；

（3）E 为 x 轴负半轴上一动点，连接 BE，在 x 轴下方作 EF⊥BE 于点 E，并且 EF＝BE，连接 FC，直接写出当 CF 最短时点 E 的坐标．

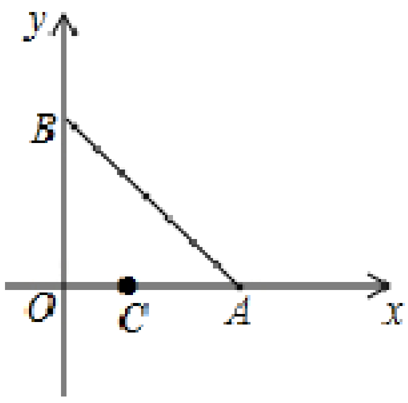


图1

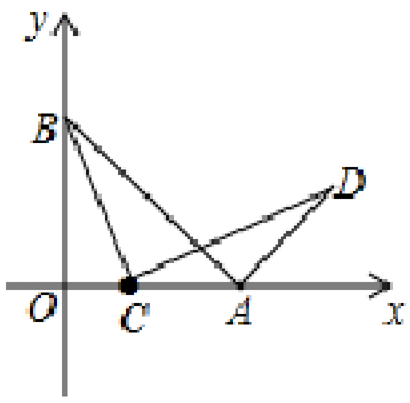
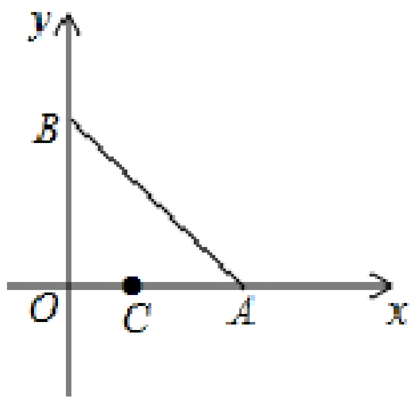


图2



备用图

7．已知，直线AB分别交x、y轴于A（a，0）、B（0，b）两点，并满足$\sqrt{b-6}$+|a－8|＝0，若点C、D、E分别在线段AB、OA、OB上，且AD＝AC，BE＝BC．

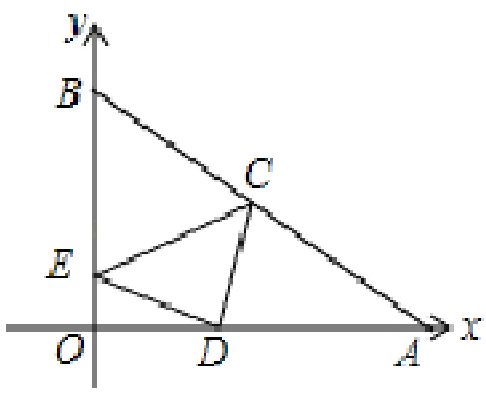


图1

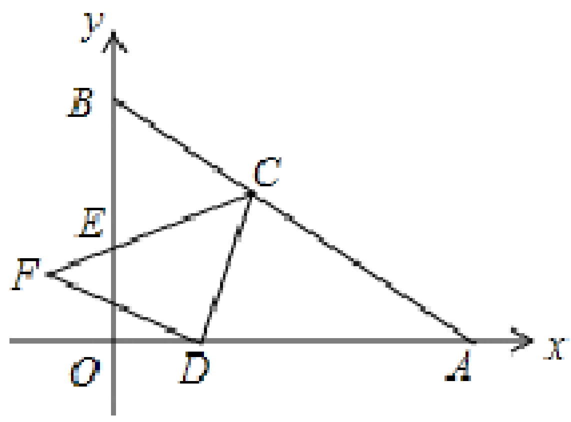


图2

（1）求线段AB的长；

（2）如图1，若点C为AB的中点，连结CD、CE、DE，试判断△CDE的形状并说明理由；

（3）如图2，过点D作DF⊥CD交CE的延长线于点F，若点F（－m，m），请求出此时C点的坐标．

8．已知在平面直角坐标系中A（0，a），且满足$a^2-4a+4=0$，P（3，3），且PA⊥PB．

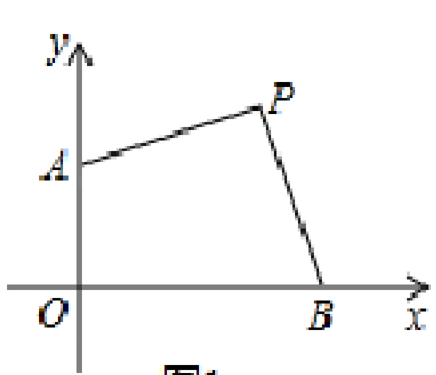


图1

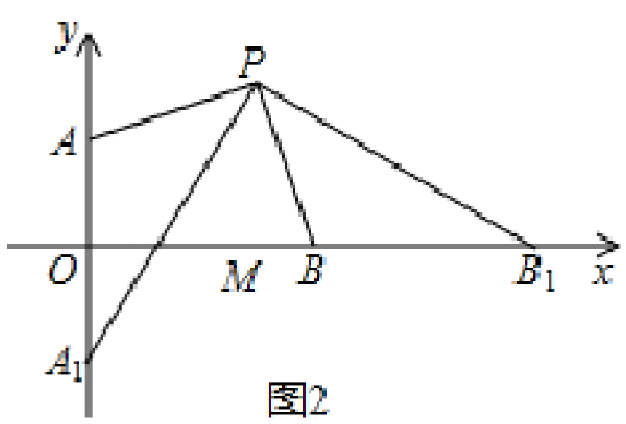


图2

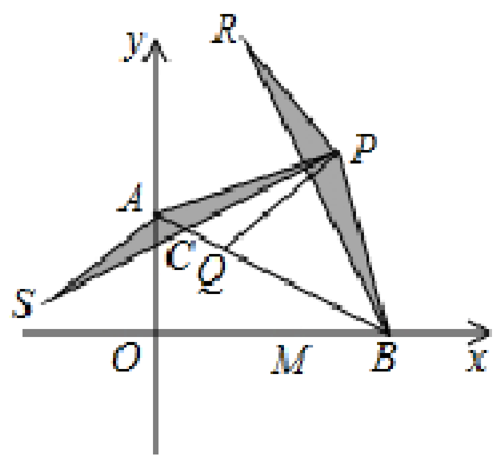


图3

（1）如图1，求B的坐标；

（2）如图2，若A点运动到A_1位置，B点运动到B_1位置，保持$PA_1\perp PB_1$，求OB_1-OA_1的值；

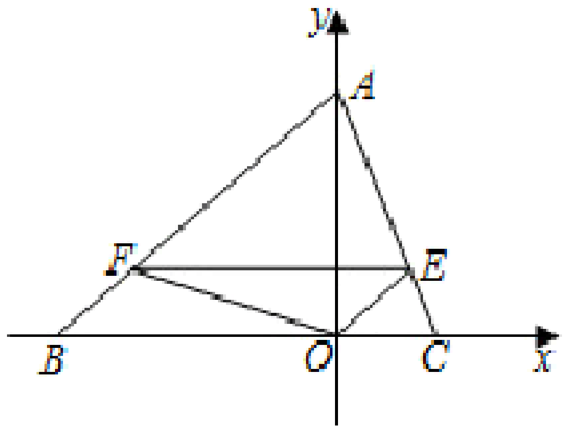
（3）若Q是线段AB上一点，C为AQ中点，作PR=PQ，PR⊥PQ，连BR，判定线段BR与PC的关系，并加以证明．

9．如图，等腰△ABC中，BA=BC，AO=3CO=6．动点F在BA上以每分钟5个单位长度的速度从B点出发向A点移动，过F作FE∥BC交AC边于E点，连结FO、EO，设F点移动的时间为t．

（1）求A、B两点的坐标；

（2）计算：当△EFO面积最大时，t的值；

（3）在（2）的条件下，边BC上是否还存在一个点D，使得△EFD≌△FEO？若存在，请直接写出D点的坐标；若不存在，试说明理由．



10．如图1，在平面直角坐标系xOy中，A（a，0），B（0，b），C（﹣a，0），且$\sqrt{a-2}+b^2-4b+4=0$．

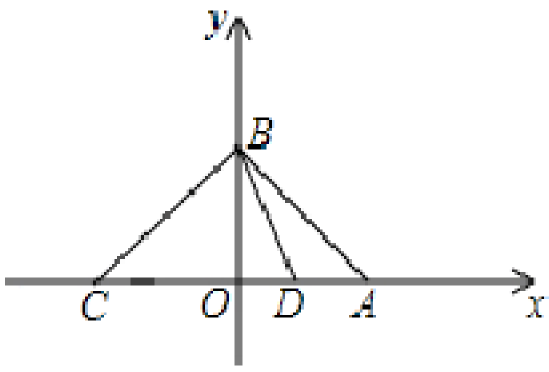


图1

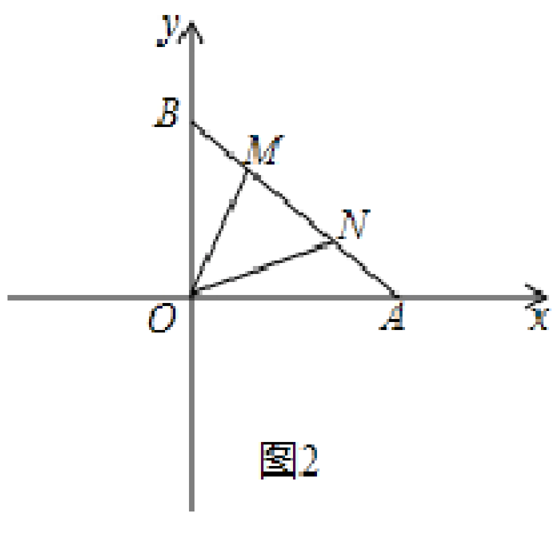


图2

（1）求证：$\angle ABC=90^{\circ}$

（2）$\angle ABO$的平分线交 x 轴于点 D，求 D点的坐标.

（3）如图 2，在线段 AB上有两动点 M，N满足$\angle MON=45^{\circ}$，求证：$BM^2+AN^2=MN^2$

参考答案

1．解：（1）$\triangle BCM\cong\triangle ACN$，$BD\perp DE$，理由如下：

如图 1：

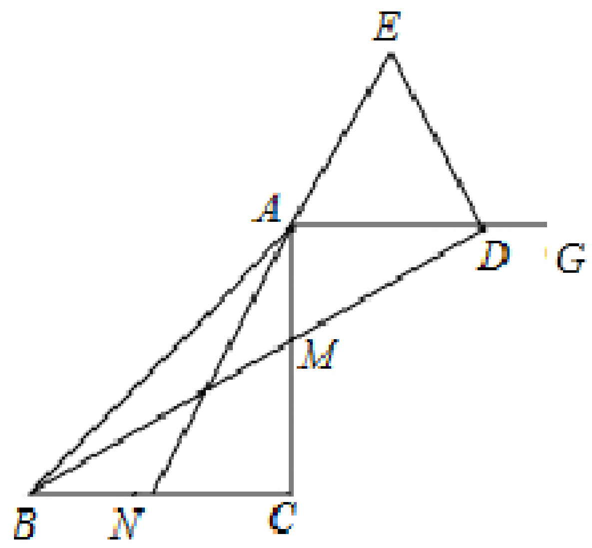


图1

∵$CA=CB$，$BN=AM$，

∴$CB-BN=CA-AM$，

即 $CN=CM$，

在$\triangle BCM$和$\triangle ACN$中，$\begin{cases}BC=AC\\ \angle BCM=\angle ACN,\\ CM=CN\end{cases}$

∴$\triangle BCM\cong\triangle ACN$（SAS）．

∴$\angle MBC=\angle NAC$，

∵$EA=ED$，

∴$\angle EAD=\angle EDA$，

∵$AG\parallel BC$，

∴$\angle GAC=\angle ACB=90°$，$\angle ADB=\angle DBC$，

∴$\angle ADB=\angle NAC$，

∴$\angle ADB+\angle EDA=\angle NAC+\angle EAD$，

∵$\angle ADB+\angle EDA=180°-90°=90°$，

∴$\angle BDE=90°$，

∴BD⊥DE,

故答案为：△BCM≌△ACN，BD⊥DE；

（2）①如图 2 中，当点 E 在 AN 的延长线上时，

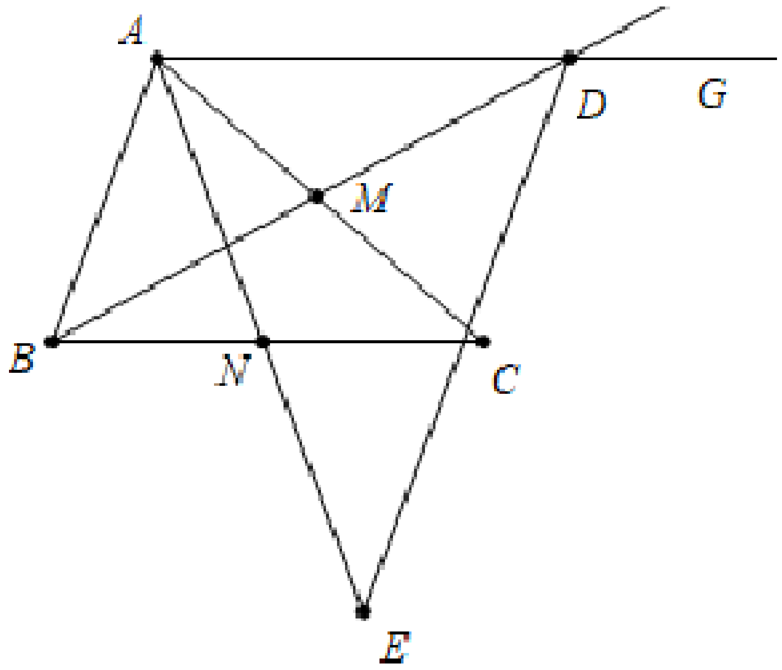


图 2

同（1）得：△BCM≌△ACN（SAS）．

∴∠CBM=∠CAN，

∵AG∥BC，

∴∠CBM=∠ADB=∠CAN，∠ACB=∠CAD，

∵EA=ED，

∴∠EAD=∠EDA，

∴∠CAN+∠CAD=∠BDE+∠ADB，

∴∠BDE=∠ACB=α．

②如图 3 中，当点 E 在 NA 的延长线上时，

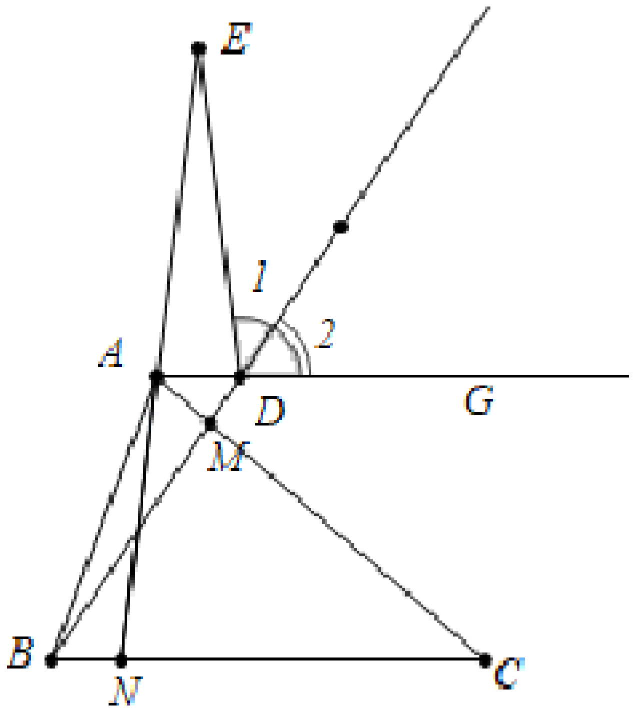


图3

则∠1+∠2＝180°－∠EDA＝180°－∠EAD＝∠CAN+∠DAC，

∵∠2＝∠ADM＝∠CBD＝∠CAN，

∴∠1＝∠CAD＝∠ACB＝α，

∴∠BDE＝180°－α．

综上所述，∠BDE＝α 或 180°－α．

（3）∵△ABC是等边三角形，

∴AC＝BC＝AB＝$3\sqrt{3}$，

①如图 4 中，当 BN＝$\frac{1}{3}$BC＝$\sqrt{3}$时，

作 AK⊥BC于 K，

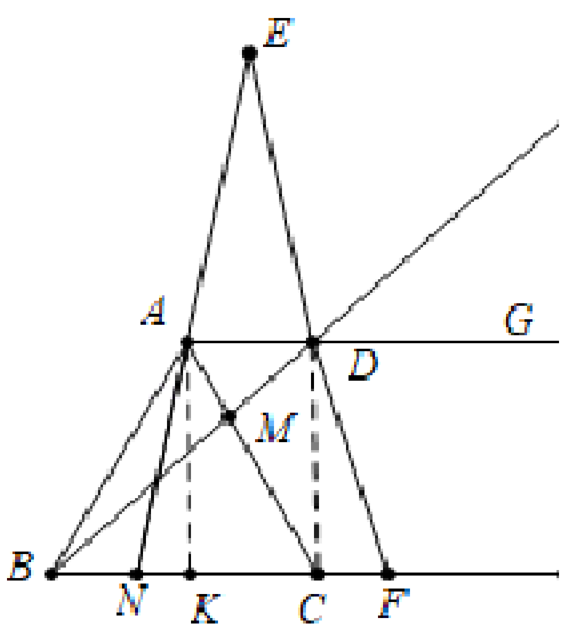


图4

∵AD∥BC，

$\frac{AD}{BC}=\frac{AM}{CM}=\frac{1}{2}$,

∴ $AD=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

∵ $AC=3\sqrt{3}$, ∠DAC=∠ACB=60°，

∴△ADC是直角三角形，则四边形 ADCK是矩形，

∴AK=DC, ∠AKN=∠DCF=90°，

∵AG∥BC,

∴∠EAD=∠ANK, ∠EDA=∠DFC,

∵AE=DE,

∴∠EAD=∠EDA,

∴∠ANK=∠DFC,

在△AKN和△DCF中， $\begin{cases}\angle AKN=\angle DCF\\ \angle ANK=\angle DFC,\\ AK=DC\end{cases}$

∴△AKN≌△DCF（AAS），

∴ $CF=NK=BK-BN=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

②如图 5 中，当 $CN=\frac{1}{3}BC=\sqrt{3}$时，

作 AK⊥BC于 K, DH⊥BC于 H.

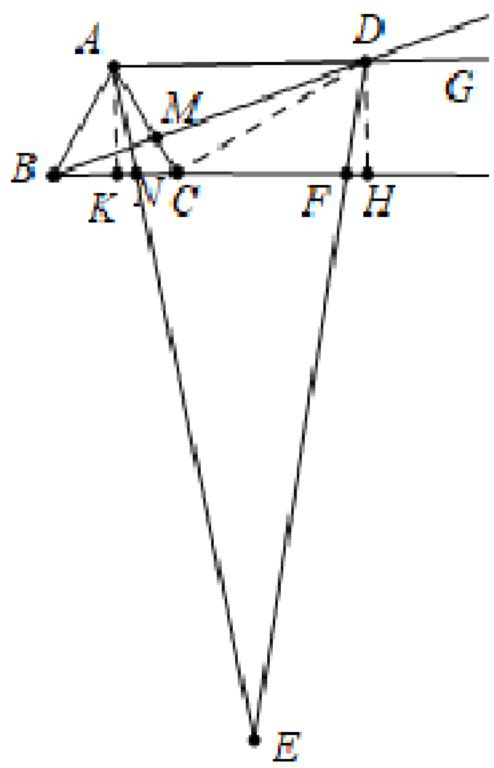


图 5

∵AD∥BC,

$\frac{AD}{BC}=\frac{AM}{MC}=2$，

$\therefore AD=2BC=6\sqrt{3}$，

则△ACD是直角三角形，△ACK∽△CDH，

则 $CH=\sqrt{3}AK=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，

同①得：△AKN≌△DHF（AAS），

$\therefore KN=FH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore CF=CH-FH=4\sqrt{3}$．

综上所述，CF的长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$或 $4\sqrt{3}$．

2．（1）证明：∵CA=CB，EB=ED，∠ABC=∠DBE=60°，

∴△ABC和△DBE都是等边三角形，

∴AB=BC，DB=BE，∠A=60°．

∵∠ABC=∠DBE=60°，

∴∠ABD=∠CBE，

∴△ABD≌△CBE（SAS）．

∴∠A=∠ECB，

（2）证明：∵∠ABC=∠DBE=45°，CA=CB，EB=ED，

∴△ABC和△DBE都是等腰直角三角形，

∴∠CAB=45°，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$，$\frac{DB}{BE}=\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DB}{BE}$，

∵∠ABC=∠DBE，

∴∠ABD=∠CBE，

∴△ABD∽△CBE，

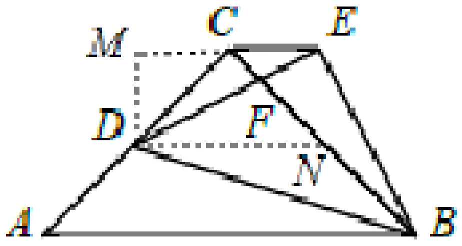
∴∠BAD=∠BCE=45°，

∵∠ABC=45°，

∴∠ABC=∠BCE，

$CE // AB$；

（3）解：过点 D 作 $DM \perp CE$ 于点 M，过点 D 作 $DN // AB$ 交 CB 于点 N，



∵$\angle ACB = 90°$，$\angle BCE = 45°$，

∴$\angle DCM = 45°$，

∴$\angle MDC = \angle DCM = 45°$，

∴$DM = MC$，

设 $DM = MC = a$，

∴$DC = \sqrt{2}a$，

∵$DN // AB$，

∴△DCN 为等腰直角三角形，

∴$DN = \sqrt{2}DC = 2a$，

∵$\tan\angle DEC = \frac{DM}{ME} = \frac{1}{2}$，

∴$ME = 2DM$，

∴$CE = a$，

∴$\frac{CE}{DN} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$，

∵$CE // DN$，

∴$\triangle CEF \backsim \triangle DNF$，

∴$\frac{EF}{DF} = \frac{CE}{DN} = \frac{1}{2}$.

3．证明：（1）∵$AB = AC$，$\angle BAC = 45°$，

∴$\angle ACB = \angle ABC = 67.5°$，

∵$\angle BAC = 45°$，$BD \perp AC$，

∴$\angle BAC = \angle ABD = 45°$，

∴$AD = BD$，

$AE\perp BC$,

$\therefore \angle C+\angle EAC=90°$，$\angle C+\angle CBD=90°$，

$\therefore \angle EAC=\angle CBD$，且 $AD=BD$，$\angle ADF=\angle BDC=90°$，

$\therefore \triangle AFD\cong\triangle BCD$（AAS）

$\therefore AF=BC$；

（2）ED为$\angle AEC$的平分线，

理由如下：如图1，过点D作$DM\perp BC$于M，过点D作$DN\perp AE$于N，

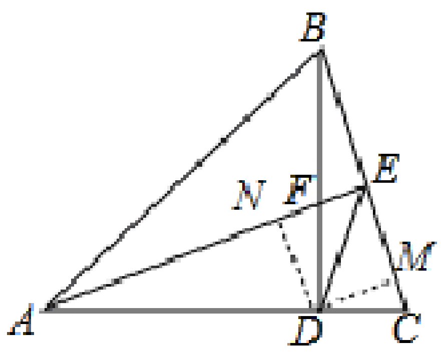


图1

$\because \triangle AFD\cong\triangle BCD$，

$\therefore S_{\triangle AFD}=S_{\triangle BCD}$，

$\therefore \frac{1}{2}AF\times DN=\frac{1}{2}\times BC\times DM$，

$\therefore DN=DM$，且 $DM\perp BC$，$DN\perp AE$，

$\therefore DE$平分$\angle AEC$；

（3）$AR=\sqrt{2}CE$，

理由如下：如图2，连接BR，CR，

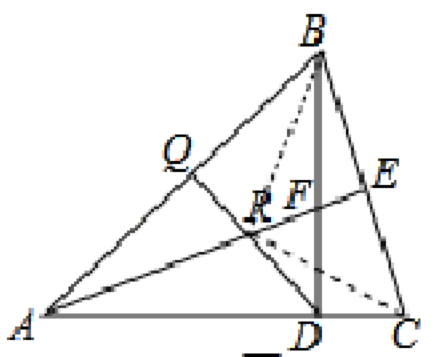


图2

$\because AD=BD$，$\angle ADB=90°$，点Q是AB是中点，

$\therefore AQ=BQ=\frac{1}{2}AB$，$AB=\sqrt{2}BD$，$QD\perp AB$，

$\therefore AR=BR$，

$\because AB=AC$，$AE\perp BC$，

$BE=EC=\frac{1}{2}BC$，$\angle BAE=\angle CAE=22.5°$，

∴$BR=CR$，

∴$AR=CR=BR$，

∴$\angle RAC=\angle RCA=22.5°$，

∴$\angle ERC=45°$，且 $AE\perp BC$，

∴$\angle ERC=\angle ECR=45°$，

∴$RC=\sqrt{2}EC=AR$．

4．解：（1）∵ $a^2-4a+4+\sqrt{2b+2}=0$，

∴$(a-2)^2+\sqrt{2b+2}=0$，

∵（$a-2$）$^2\geqslant 0$，$\sqrt{2b+2}\geqslant 0$，

∴$a-2=0$，$2b+2=0$，

∴$a=2$，$b=-1$；

（2）由（1）知 $a=2$，$b=-1$，

∴A（0，2），B（－1，0），

∴$OA=2$，$OB=1$，

∵△ABC是直角三角形，且∠ACB=45°，

∴只有∠BAC=90°或∠ABC=90°，

Ⅰ、当∠BAC=90°时，如图1，

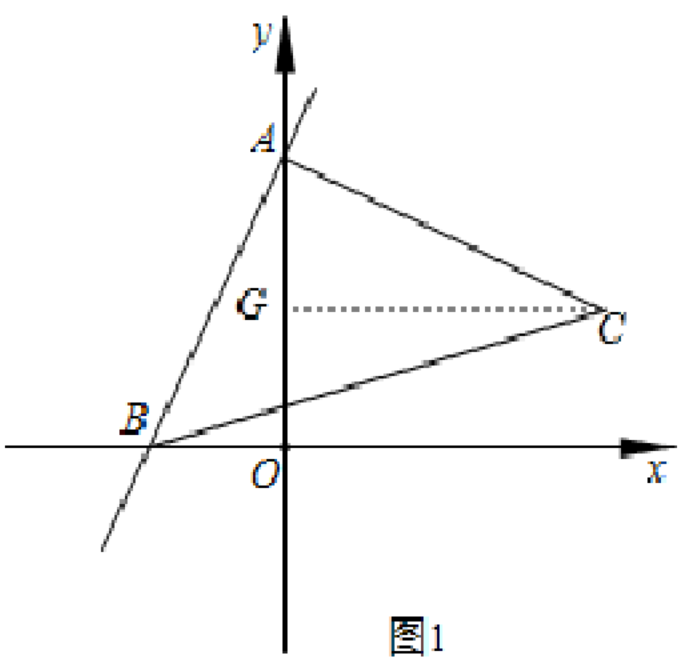


图1

∵∠ACB=∠ABC=45°，