吉林省延边朝鲜族自治州汪清县第六中学2024年高三4月份模拟考试数学试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回.

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效.

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若x,a,b均为任意实数，且$\left(a+2\right)^2+\left(b-3\right)^2=1$，则$\left(x-a\right)^2+\left(\ln x-b\right)^2$ 的最小值为（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．18　　C．$3\sqrt{2}-1$　　D．$19-6\sqrt{2}$

2．已知函数$f(x)=m^x-m(m>0$，且$m\neq1)$的图象经过第一、二、四象限，则$a=|f(\sqrt{2})|$，$b=\left|f\left(4^{\frac{3}{8}}\right)\right|$，$c=|f(0)|$的大小关系为(　　)

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$

C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

3．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0，b>0)的右焦点为F，若过点F且倾斜角为60°的直线l与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线的离心率e的取值范围是（　　）

A．$[2,+\infty)$　　B．(1,2),　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(1,2]$

4．已知函数$f(x)=\frac{k}{x}(k\in\mathrm{N}_+)$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x-1}$，若对任意的$c>1$，存在实数$a,b$满足$0<a<b<c$，使得$g(a)=f(b)=g(c)$，则$k$的最大值是(　　)

A．3　　B．2　　C．4　　D．5

5．已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{c}|=1$，$|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|=5$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

6．已知函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像与一条平行于$x$轴的直线有两个交点，其横坐标分别为$x_1,x_2$，则$x_1+x_2=$（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

7．正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_5+2a_3a_7+a_5a_9=16$，且a_5与a_9的等差中项为4，则$\{a_n\}$的公比是（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\sqrt{2}$

8．设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）的右焦点为F，右顶点为A,过F作AF的垂线与双曲线交于B,C两点，过B,C分别作AC，AB的垂线交于点D．若D到直线BC的距离小于$a+\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的渐近线斜率的取值范围是（ ）

A．$(-1,0)\cup(0,1)$

B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$

D．$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

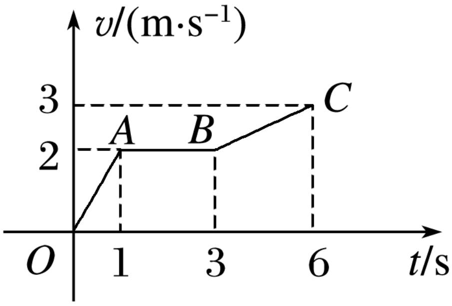
9．我国宋代数学家秦九韶（1202-1261）在《数书九章》（1247）一书中提出“三斜求积术”，即：以少广求之，以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积．其实质是根据三角形的三边长a，b，c求三角形面积S，即$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$．若$\Delta ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，$b=2$，则$\sin A$等于（　　）

A．$\frac{\sqrt{55}}{10}$　　　　B．$\frac{\sqrt{11}}{6}$　　　　C．$\frac{\sqrt{55}}{10}$或$\frac{\sqrt{11}}{6}$　　　　D．$\frac{11}{20}$或$\frac{11}{36}$

10．斜率为1的直线l与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交于A、B两点，则$|AB|$的最大值为(　　)

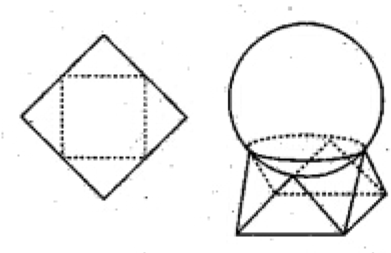
A．2　　　　B．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　　　C．$\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　　　D．$\frac{8\sqrt{10}}{5}$

11．一物体作变速直线运动，其$v-t$曲线如图所示，则该物体在$\frac{1}{2}$s~6s间的运动路程为（　　）***m***．



A．1　　　　B．$\frac{4}{3}$　　　　C．$\frac{49}{4}$　　　　D．2

12．如图所示，用一边长为$\sqrt{2}$的正方形硬纸，按各边中点垂直折起四个小三角形，做成一个蛋巢，将体积为$\frac{4\pi}{3}$的鸡蛋（视为球体）放入其中，蛋巢形状保持不变，则鸡蛋（球体）离蛋巢底面的最短距离为（　　）



A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

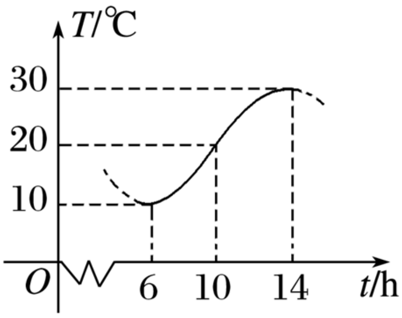
C．$\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，PQ 垂直 l 于点 Q，M，N 分别为 PQ，PF 的中点，MN 与 x 轴相交于点 R，若$\angle NRF=60°$，则$|FR|$等于_____.

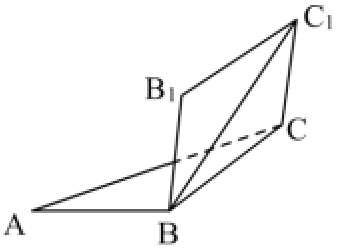
14．如图，某地一天从6：14时的温度变化曲线近似满足函数$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b$，则这段曲线的函数解析式为

_____________.



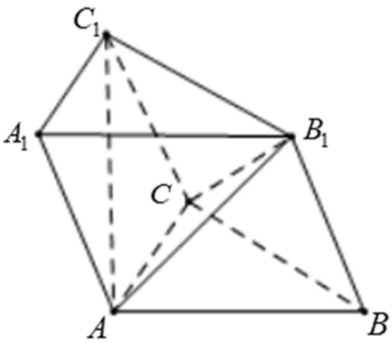
15．已知$\vec{i},\vec{j}$是夹角为$90°$的两个单位向量，若$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{j}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为______.

16．如图所示，平面 BCC_1B_1⊥平面 ABC，∠ABC＝120°，四边形 BCC_1B_1 为正方形，且 AB＝BC＝2，则异面直线 BC_1 与 AC 所成角的余弦值为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\vee ABC$ 与 $\vee B_1BC$ 是全等的等边三角形.



（1）求证：$BC \perp AB_1$；

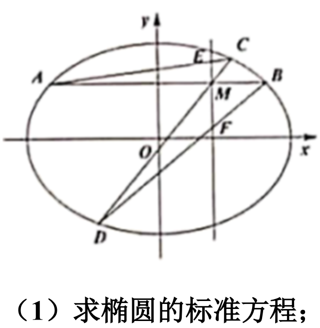
（2）若 $\cos\angle B_1BA=\dfrac{1}{4}$，求二面角 $B-B_1C-A$ 的余弦值.

18.（12 分）在平面直角坐标系 ***xOy*** 中，曲线 ***C*** 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以坐标原点为极点，***x*** 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 ***l*** 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

（1）求曲线 ***C*** 的极坐标方程和直线 ***l*** 的直角坐标方程；

（2）若射线 $\theta=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与曲线 ***C*** 交于点 ***A***（不同于极点 ***O***），与直线 ***l*** 交于点 ***B***，求 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的最大值.

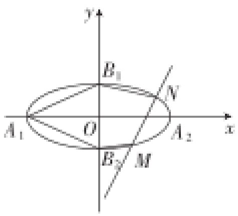
19.（12 分）如图，过点 $M\left(2,2\right)$ 且平行与 ***x*** 轴的直线交椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=m\left(m>0\right)$ 于 ***A***、***B*** 两点，且 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$.



（1）求椭圆的标准方程；

（2）过点 **M** 且斜率为正的直线交椭圆于段 **C**、**D**，直线 **AC**、**BD** 分别交直线 $x=2$ 于点 **E**、**F**，求证：$\frac{1}{|ME|}-\frac{1}{|MF|}$ 是定值.

20.（12 分）如图，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，上、下顶点分别为 B_1，B_2，且 $B_1(0,1)$，$\triangle A_1B_1B_2$ 为等边三角形，过点 $(1,0)$ 的直线与椭圆 C 在 y 轴右侧的部分交于 M 、N 两点.



（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求四边形 B_2MNB_1 面积的取值范围.

21.（12 分）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右顶点分别为 A 、B，过左焦点的直线 l 交椭圆 E 于 C 、D 两点（异于 A 、B 两点），当直线 l 垂直于 x 轴时，四边形 $ABCD$ 的面积为 **1**.

（1）求椭圆的方程；

（2）设直线 AC 、BD 的交点为 Q；试问 Q 的横坐标是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

22.（10 分）在平面直角坐标系 ***xOy*** 中，曲线 **C** 的参数方程为 $\begin{cases}x=2m+\frac{1}{6m}\\ y=2m-\frac{1}{6m}\end{cases}$（***m*** 为参数），以坐标点 ***O*** 为极点，***x*** 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 ***l*** 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1$.

（1）求直线 ***l*** 的直角坐标方程和曲线 **C** 的普通方程；

（2）已知点 ***M*** （**2**，**0**），若直线 ***l*** 与曲线 **C** 相交于 ***P***、***Q*** 两点，求 $\frac{1}{|MP|}+\frac{1}{|MQ|}$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

该题可以看做是圆上的动点到曲线 $y=\ln x$ 上的动点的距离的平方的最小值问题，可以转化为圆心到曲线 $y=\ln x$ 上的动点的距离减去半径的平方的最值问题，结合图形，可以断定那个点应该满足与圆心的连线与曲线在该点的切线垂直的问题来解决，从而求得切点坐标，即满足条件的点，代入求得结果.

【详解】

由题意可得，其结果应为曲线 $y=\ln x$ 上的点与以 $C\left(-2,3\right)$ 为圆心，以 1 为半径的圆上的点的距离的平方的最小值，可以求曲线 $y=\ln x$ 上的点与圆心 $C\left(-2,3\right)$ 的距离的最小值，在曲线 $y=\ln x$ 上取一点 $M\left(m,\ln m\right)$，曲线有 $y=\ln x$ 在点 M 处的切线的斜率为 $k'=\frac{1}{m}$，从而有 $k_{CM}\cdot k'=-1$，即 $\frac{\ln m-3}{m+2}\cdot\frac{1}{m}=-1$，整理得 $\ln m+m^2+2m-3=0$，解得 $m=1$，所以点 $\left(1,0\right)$ 满足条件，其到圆心 $C\left(-2,3\right)$ 的距离为 $d=\sqrt{\left(-2-1\right)^2+\left(3-0\right)^2}=3\sqrt{2}$，故其结果为 $\left(3\sqrt{2}-1\right)^2=19-6\sqrt{2}$，

故选 D.

【点睛】

本题考查函数在一点处切线斜率的应用，考查圆的程，两条直线垂直的斜率关系，属中档题.

2、C

【解析】

根据题意，得 $0<m<1$，$f(1)=0$，则 $f(x)$ 为减函数，从而得出函数 $|f(x)|$ 的单调性，可比较 a 和 b，而 $c=|f(0)|=1-m$，比较 $f\left(0\right),f\left(2\right)$，即可比较 a,b,c.

【详解】

因为 $f(x)=m^x-m(m>0$，且 $m\neq 1)$ 的图象经过第一、二、四象限，

所以 $0<m<1$，$f(1)=0$，

所以函数 $f(x)$ 为减函数，函数 $|f(x)|$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $1<\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}<4^{\frac{3}{8}}=2^{\frac{3}{4}}<2$，

所以 $a<b$，

又 $c=|f(0)|=1-m$，$|f(2)|=m^2-m$，

则$||f(2)|-|f(0)||=m^2-1<0$，

即$|f(2)|<|f(0)|$，

所以$a<b<c$．

故选：**C.**

【点睛】

本题考查利用函数的单调性比较大小，还考查化简能力和转化思想．

3、**A**

【解析】

若过点F且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率．根据这个结论可以求出双曲线离心率的取值范围．

【详解】

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，

若过点F且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，

则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率$\frac{b}{a}$，

$\therefore \frac{b}{a}\ldots\sqrt{3}$，离心率$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}\ldots 4$，

$\therefore e\ldots 2$，

故选：A．

【点睛】

本题考查双曲线的性质及其应用，解题时要注意挖掘隐含条件．

4、**A**

【解析】

根据条件将问题转化为$\frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于$x>1$恒成立，然后构造函数$h(x)=x\cdot\frac{\ln x+1}{x-1}$，然后求出$h(x)$的范围，进一步得到$k$的最大值．

【详解】

Q $f(x)=\frac{k}{x}(k\in \mathrm{N}_+)$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x-1}$，对任意的$c>1$，存在实数$a,b$满足$0<a<b<c$，使得$g(a)=f(b)=g(c)$，

$\therefore$易得$g(c)=f(b)>f(c)$，即$\frac{\ln c+1}{c-1}>\frac{k}{c}$恒成立，

$\therefore \frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于$x>1$恒成立，

设$h(x)=x\cdot\dfrac{\ln x+1}{x-1}$，则$h'(x)=\dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$，

令$q(x)=x-2-\ln x$，$\therefore q'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$在$x>1$恒成立，

$\because q(3)=3-2-\ln 3<0$，$q(4)=4-2-\ln 4>0$，

故存在$x_0\in(3,4)$，使得$q\left(x_0\right)=0$，即$x_0-2=\ln x_0$，

当$x\in(1,x_0)$时，$q(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$q(x)>0$，$h(x)$单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}$,将$x_0-2=\ln x_0$代入得：

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，

$\because k\in\mathrm{N}_+$，且$k<h(x)_{\min}=x_0$，

$\therefore k\le 3$

故选：A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性，零点存在定理和不等式恒成立问题，考查了转化思想，属于难题.

5、B

【解析】

建立平面直角坐标系，将已知条件转化为所设未知量的关系式，再将$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值转化为用该关系式表达的算式，利用基本不等式求得最小值.

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示，设$\vec{c}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，且$A\left(m,0\right),B\left(0,n\right)$，由于

$\left|\vec{a}-\vec{c}\right|=\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=5$，所以$m,n\in\left[4,6\right]$.

$\vec{a}-\vec{c}=\left(m-\cos\theta,-\sin\theta\right),\vec{b}-\vec{c}=\left(-\cos\theta,n-\sin\theta\right)$.所以

$\begin{cases}m^2-2m\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=25\\ n^2-2n\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=25\end{cases}$，即$m^2+n^2=48+2m\cos\theta+2n\sin\theta$.

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\left(\vec{a}-\vec{c}\right)-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)^2-2\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=\sqrt{48+2m\cos\theta+2n\sin\theta}$

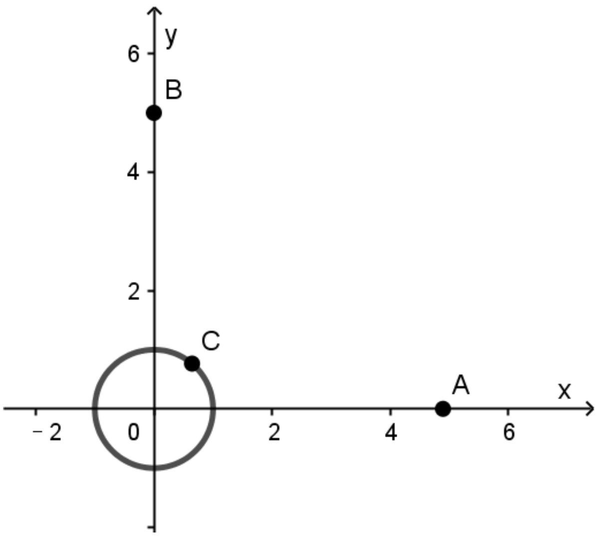
$=\sqrt{m^2+n^2}\geq\sqrt{2mn}$.当且仅当$m=n$时取得最小值，此时由$m^2+n^2=48+2m\cos\theta+2n\sin\theta$得

$2m^2=48+2m(\sin\theta+\cos\theta)=48+2\sqrt{2}m\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，当$\theta=\frac{5\pi}{4}$时，$2m^2$有最小值为$48-2\sqrt{2}m$，即

$2m^2=48-2\sqrt{2}m$，$m^2+\sqrt{2}m-24=0$，解得$m=3\sqrt{2}$.所以当且仅当$m=n=3\sqrt{2},\theta=\frac{5\pi}{4}$时$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$有最小值为

$\sqrt{2\times\left(3\sqrt{2}\right)^2}=6$.

故选：**B**



【点睛】

本小题主要考查向量的位置关系、向量的模，考查基本不等式的运用，考查数形结合的数学思想方法，属于难题.

6、**A**

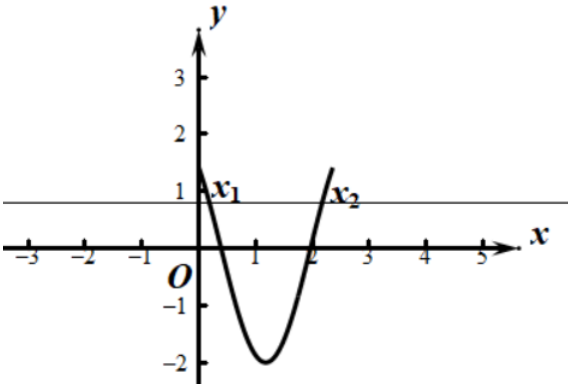
【解析】

画出函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像，函数对称轴方程为$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，由图可得$x_1$与$x_2$关于$x=\frac{3\pi}{8}$

对称，即得解.

【详解】

函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像如图，



对称轴方程为$2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又Q $0<x<\frac{3\pi}{4},\therefore x=\frac{3\pi}{8}$，

由图可得x_1与x_2关于$x=\frac{3\pi}{8}$对称，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

故选：**A**

【点睛】

本题考查了正弦型函数的对称性，考查了学生综合分析，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

7、D

【解析】

设等比数列的公比为**q**，$q>0$，运用等比数列的性质和通项公式，以及等差数列的中项性质，解方程可得公比**q**.

【详解】

由题意，正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_5+2a_3a_7+a_5a_9=16$，

可得$a_3^2+2a_3a_7+a_7^2=(a_3+a_7)^2=16$，即$a_3+a_7=4$，

a_5与a_9的等差中项为**4**，即$a_5+a_9=8$，

设公比为**q**，则$q^2\left(a_3+a_7\right)=4q^2=8$，

则$q=\sqrt{2}$(负的舍去)，

故选 **D**.